

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

DOI 10.17223/20710410/17/12

УДК 519.248, 519.176

СВЯЗНОСТЬ ПЛАНАРНОГО ГРАФА
С ВЫСОКОНАДЁЖНЫМИ РЁБРАМИ

Г. Ш. Цициашвили, А. С. Лосев

*Институт прикладной математики ДВО РАН, г. Владивосток, Россия***E-mail:** Guram@iam.dvo.ru, A.S.Losev@yandex.ru

Приведены результаты вычислительных экспериментов по определению вероятности несвязности планарных графов с высоконадёжными рёбрами. Полученные результаты подтверждают теоретическую, не более чем кубическую, оценку сложности проводимых вычислений, основанных на рассмотрении двойственных графов и построении асимптотических соотношений. Приведены результаты сравнения используемого метода с методом Монте-Карло, которые свидетельствуют о существенном сокращении числа арифметических операций и времени счета.

Ключевые слова: *вероятность связности, двойственный граф, минимальный разрез.*

Введение

В работе [1] доказаны асимптотические формулы вычисления вероятности несвязности планарного графа с высоконадёжными рёбрами, обобщающие известную формулу Буртина — Питтеля [2]. Параметрами доказанного соотношения являются минимальное число D рёбер в разрезах и число C разрезов с D рёбрами. Рассмотрение двойственных графов [3], в которых разрезы исходного графа порождают циклы, и использование известных алгоритмов перечисления циклов в произвольных графах [4] позволили сократить количество арифметических операций и получить сложность вычисления констант D , C не более чем кубическую от числа граней графа, а в частных случаях линейную.

В настоящей работе рассмотрены отдельные случаи планарных графов с минимальным числом рёбер в разрезах $D = 2, 3, 4, 5$, в том числе нанотрубка, имеющая прикладное значение. Для рассмотренных графов построены двойственные графы, точно вычислены константы D , C и получены асимптотические соотношения для вероятности несвязности. На основе полученных соотношений проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие быстроедействие предложенного алгоритма по сравнению с методом Монте-Карло.

1. Основные результаты

Рассмотрим неориентированный связный граф G с конечным множеством вершин U и рёбер W . Под разрезом графа понимается некоторое подмножество рёбер, после удаления которых граф перестает быть связным. Обозначим через $d(L)$ объём разреза L (число его рёбер), D — минимальный объём разреза, C — число разрезов объёма D . Пусть рёбра графа G отказывают независимо с вероятностями h .

Теорема 1. Для вероятности несвязности графа выполняется соотношение

$$\bar{P} \sim Ch^D, \quad h \rightarrow 0. \quad (1)$$

Данная теорема 1 является обобщением известной асимптотической формулы Буртина — Питтеля [2] и доказана в [1].

Предположим, что граф G является планарным и каждое ребро в нём принадлежит какому-либо простому циклу. Рёбра графа разбивают плоскость на грани. Сопоставим графу G двойственный граф G^* . Каждой грани z графа G соответствует вершина z^* графа G^* , каждому ребру w графа G , принадлежащему граням z_1, z_2 , соответствует ребро w^* , соединяющее вершины z_1^*, z_2^* . Нас будут интересовать разрезы минимального объёма, а значит, двойственные им циклы минимальной длины.

Обозначим m число рёбер, n — число граней (включая внешнюю) в планарном графе G . Пусть элементы a_{ij} матрицы A определяют число рёбер, содержащихся в пересечении граней $z_i \cap z_j$ ($i \neq j$) графа G , $a_{ii} = 0$. Элементы степени A^l , $l > 1$, матрицы A обозначим $a_{ij}^{(l)}$. В работе [4] получены формулы вычисления c_k — числа простых циклов длины k , $k = 3, 4, 5$, в двойственном графе, а в работе [1] — формула для c_2 :

$$c_2 = \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}(a_{ij} - 1), \quad c_3 = \frac{1}{6} \text{tr} A^3, \quad c_4 = \frac{1}{8} \left(\text{tr} A^4 - 2m - 2 \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} a_{ij}^{(2)} \right),$$

$$c_5 = \frac{1}{10} \left(\text{tr} A^5 - 5 \text{tr} A^3 - 5 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} - 2 \right) a_{ij}^{(3)} \right).$$

Из формулы Эйлера [5] в работе [1] получены соотношения

$$D \leq 5, \quad D = \min(k : 2 \leq k \leq 5, c_k > 0), \quad C = c_D. \quad (2)$$

Из вышеизложенного следует, что вычисление асимптотических констант D, C произвольных планарных графов путём перехода к двойственным графам и с использованием известных алгоритмов перечисления их циклов имеет сложность не более чем кубическую, что значительно меньше, чем в прямых алгоритмах счёта. В частных случаях, когда любые две внутренние грани имеют не более одного общего ребра, сложность вычислений становится линейной. Последнее часто встречается в приложениях и имеет практическую значимость, в частности при создании и изучении различных наноматериалов, в основе которых лежат гексагональные структуры [3]. Одно из таких соединений рассмотрено далее в примере 2.

2. Вычислительный эксперимент

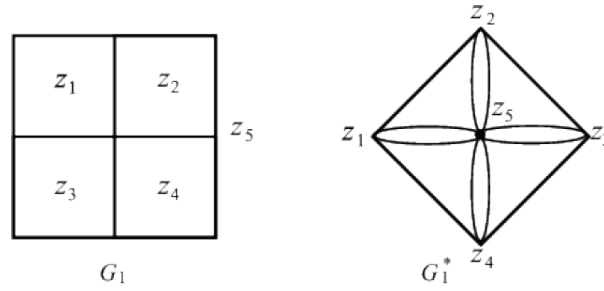
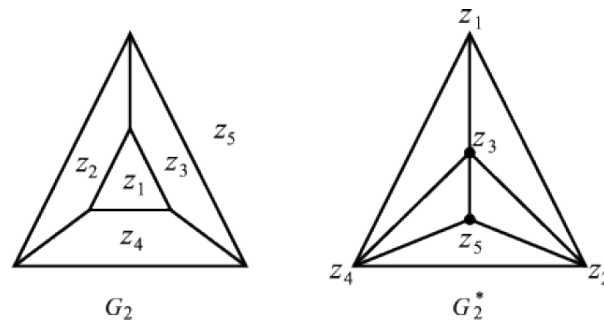
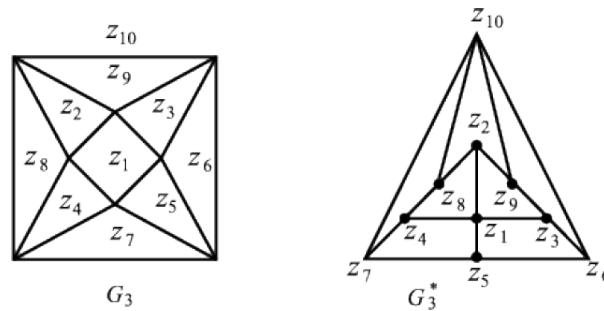
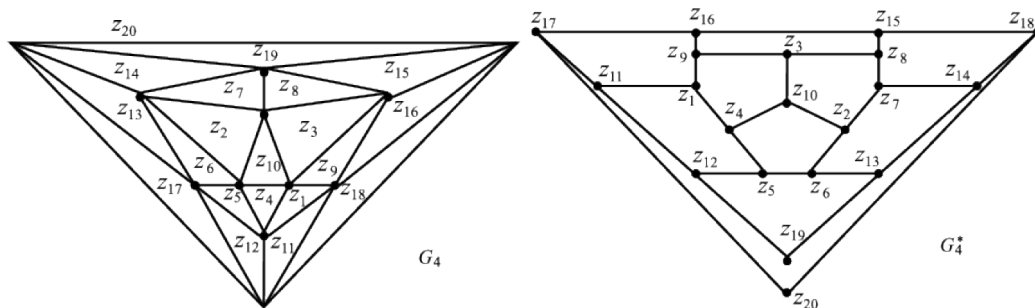
Пример 1. Приведём примеры планарных графов, минимальное число рёбер в разрезах которых $D = 2, 3, 4, 5$. На рис. 1–4 построены графы G_1, G_2, G_3, G_4 с $D = 2, 3, 4, 5$ соответственно и двойственные к ним графы $G_1^*, G_2^*, G_3^*, G_4^*$.

Из формулы (2) нетрудно определить, что

$$C_{G_1} = 4, \quad C_{G_2} = 7, \quad C_{G_3} = 8, \quad C_{G_4} = 12,$$

где C_{G_i} имеет смысл константы C для графа G_i , $i = 1, 2, 3, 4$. В свою очередь, из теоремы 1 следует:

$$\bar{P}_{G_1} \sim 4h^2, \quad \bar{P}_{G_2} \sim 7h^3, \quad \bar{P}_{G_3} \sim 8h^4, \quad \bar{P}_{G_4} \sim 12h^5, \quad h \rightarrow 0.$$

Рис. 1. Пример графа с $D = 2$ и двойственный ему (z_5 — внешняя грань)Рис. 2. Пример графа с $D = 3$ и двойственный ему (z_5 — внешняя грань)Рис. 3. Пример графа с $D = 4$ и двойственный ему (z_{10} — внешняя грань)Рис. 4. Пример графа с $D = 5$ и двойственный ему (z_{20} — внешняя грань)

Сравним результаты вычисления вероятности несвязности $\bar{P}$ по асимптотической формуле и методом Монте-Карло $\bar{P}^*$ с числом реализаций 10^6 . Положим $h = 0,05$,

тогда

$$\begin{aligned}\bar{P}_{G_1} &\approx 0,01, \quad \bar{P}_{G_1}^* \approx 0,009982, \quad \left| \frac{\bar{P}_{G_1}^*}{\bar{P}_{G_1}} - 1 \right| \approx 0,0018, \\ \bar{P}_{G_2} &\approx 0,000875, \quad \bar{P}_{G_2}^* \approx 0,000821, \quad \left| \frac{\bar{P}_{G_2}^*}{\bar{P}_{G_2}} - 1 \right| \approx 0,061714, \\ \bar{P}_{G_3} &\approx 0,00005, \quad \bar{P}_{G_3}^* \approx 0,000048, \quad \left| \frac{\bar{P}_{G_3}^*}{\bar{P}_{G_3}} - 1 \right| \approx 0,041667.\end{aligned}$$

В результате проведённых вычислений время счёта методом Монте-Карло составило несколько часов, а по асимптотическому соотношению — не более минуты, что подтверждает полученную теоретическую оценку о том, что вычисление констант имеет не более чем кубическую сложность. Полученные результаты несложно распространить на произвольные планарные графы с соответствующим числом рёбер в разрезах.

Пример 2. Аналогичным образом определим вероятность несвязности $\bar{P}$ нанотрубки, которая получается склеиванием гексагональной решётки по противоположным сторонам. Данное соединение является основным элементом в различных наноструктурах и имеет прикладное значение [6].

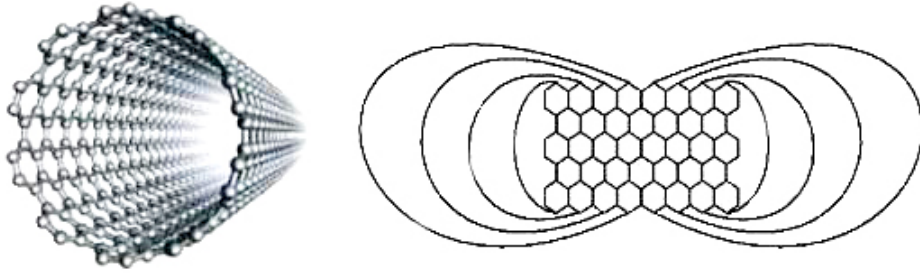


Рис. 5. Нанотрубка и её расположение на плоскости

Из формул (1), (2) следует

$$D = 2, \quad C = 18, \quad \bar{P} \sim 18h^2, \quad h \rightarrow 0.$$

Положим $h = 0,005$ и проведём вычислительный эксперимент, аналогичный описанному в примере 1. Имеем

$$\bar{P} \approx 0,00045, \quad \bar{P}^* \approx 0,00044, \quad \left| \frac{\bar{P}^*}{\bar{P}} - 1 \right| \approx 0,02272.$$

В результате эксперимента подтверждена линейная оценка сложности вычисления констант D, C . В итоге время счёта вероятности несвязности нанотрубки методом Монте-Карло составило чуть более суток, что в несколько сотен раз больше, чем по асимптотическому соотношению.

Полученные формулы определения параметров планарного графа на основе построения двойственных графов существенно облегчают задачу в вычислительном плане, что подтверждается расчётами. А построение двойственного графа в обход традиционным подходам существенно уменьшает оценку сложности вычисления вероятности несвязности произвольных планарных графов и имеет не более чем кубическую

сложность. Помимо этого, в большинстве случаев переход к рассмотрению двойственных графов приводит к уменьшению обрабатываемого множества вершин, что также сокращает количество необходимых арифметических операций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tsitsiashvili G. Sh.* Complete calculation of disconnection probability in planar graphs // Reliability: Theory and Applications. 2012. V. 1(24). No. 1. P. 154–159.
2. *Буртин Ю., Пяттель Б.* Асимптотические оценки надёжности сложных систем // Техническая кибернетика. 1972. Т. 10. № 3. С. 90–96.
3. *Whithney H.* Nonseparable and planar graphs // Trans. American Math. Soc. 1932. V. 34. P. 39–362.
4. *Harary F. and Manvel B.* On the Number of Cycles in a Graph // Matematickycasopis. 1971. V. 21. No. 1. P. 55–63.
5. *Прасолов В. В.* Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М.: МЦНМО, 2004. 352 с.
6. *Золотухин И. В.* Углеродные нанотрубки // Соросовский образовательный журнал. 1999. № 3. С. 111–115.