ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ РЕАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

DOI 10.17223/20710410/18/5

УДК 519.8

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ВЕКТОРНОЙ ИНВЕСТИЦИОННОЙ БУЛЕВОЙ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ МЕТРИКИ ГЕЛЬДЕРА В КРИТЕРИАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

В. А. Емеличев, В. В. Коротков

Белорусский государственный университет, г. Минск, Беларусь

E-mail: emelichev@bsu.by, wladko@tut.by

Проведён анализ устойчивости парето-оптимального портфеля многокритериального дискретного (булева) варианта инвестиционной задачи Марковица с максиминными критериями эффективности Вальда. Получены нижняя и верхняя достижимые оценки радиуса устойчивости такого портфеля в случае, когда в критериальном пространстве параметров задачи задана метрика Гельдера l_p, $1\leqslant p\leqslant\infty$.

Ключевые слова: *векторная инвестиционная задача, парето-оптимальный инвестиционный портфель, критерий эффективности Вальда, радиус устойчивости портфеля, метрика Гельдера.*

Введение

Большинство управленческих решений принимается в условиях неопределённости и риска, что обусловлено рядом факторов: отсутствием полной информации, наличием противоборствующих тенденций, элементами случайности и т. п. Для управления финансовыми инвестициями Г. Марковицем [1, 2] (см. также [3]) разработана оптимизационная модель, демонстрирующая, как инвестор, выбирая портфель активов, может максимально повысить ожидаемый уровень доходности (экономическую эффективность). Хорошо известно, что сложность вычисления подобных величин сопровождается большим количеством ошибок, приводящих к высокой степени неопределённости начальной информации. Тем самым появляется необходимость учёта неточности и некорректности входных параметров, которые свойственны реальным ситуациям решения практических задач оптимизации. Возникающий при этом вопрос о предельном уровне изменений (возмущений) числовых параметров исходной задачи, сохраняющих оптимальность выбранного решения (портфеля), приводит к ключевому понятию радиуса устойчивости. Конкретное содержание данного понятия зависит от выбора принципа оптимальности (если задача многокритериальная), множества параметров задачи, подверженным возмущениям, а также от структуры, определяющей отношения «близости» в пространстве параметров, т. е. от метрики, заданной в этом пространстве. Нахождению формул или оценок радиуса устойчивости парето-оптимальных решений векторных (многокритериальных) задач дискретной оптимизации посвящен ряд работ (см., например, [4 – 7]).

[1]Работа поддержана грантом Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований № Ф11К-095.

Настоящая работа продолжает начатые в [8 – 12] исследования, посвященные анализу устойчивости решений векторных задач выбора инвестиционных проектов с нелинейными целевыми функциями. В этих работах для инвестиционной задачи с минимаксными критериями рисков Сэвиджа получены нижняя и верхняя достижимые оценки радиуса устойчивости парето-оптимального или лексикографически оптимального инвестиционного портфеля в случаях, когда в трёхмерном пространстве параметров задачи заданы метрики l_1 и l_∞ в разнообразных комбинациях. Данная работа посвящена оценкам радиуса устойчивости парето-оптимального портфеля векторного булева варианта инвестиционной задачи Марковица с максиминными критериями экономической эффективности Вальда в случае, когда в критериальном пространстве параметров задачи задана метрика Гельдера l_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

1. Основные определения

Рассмотрим векторный дискретный (булевый) вариант задачи управления инвестициями Марковица. Для этого введём ряд обозначений:

$N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ — альтернативные инвестиционные проекты (активы);

N_m — возможные состояния рынка (рыночные ситуации, сценарии развития);

N_s — виды (показатели) экономической эффективности инвестиционного проекта;

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ — инвестиционный портфель, где

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{если проект } j \text{ реализуется,} \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$X \subseteq \mathbf{E}^n \setminus \{0_{(n)}\}$ — множество инвестиционных портфелей, где $\mathbf{E} = \{0, 1\}$; $|X| \geqslant 2$; $0_{(n)}$ — нулевой вектор пространства $\mathbb{R}^n$;

e_{ijk} — ожидаемая оценка экономической эффективности вида $k \in N_s$ инвестиционного проекта $j \in N_n$ в случае, когда рынок находится в состоянии $i \in N_m$;

$E = [e_{ijk}]$ — трёхмерная матрица размера $m \times n \times s$ с элементами из $\mathbb{R}$.

Отметим, что существует несколько подходов к оценке экономической эффективности инвестиционных проектов (NPV, NFV, PI и др.), по-разному учитывающих влияние неопределенности и риска (см., например, [13 – 16]). Поэтому полезной в практических применениях может быть рассмотренная в настоящей работе постановка инвестиционной задачи, которую охарактеризуем как задачу принятия решений при наличии многих критериев (видов эффективности проектов).

На множестве инвестиционных портфелей (булевых векторов) X зададим векторную целевую функцию

$$f(x, E) = (f_1(x, E_1), f_2(x, E_2), \ldots, f_s(x, E_s)),$$

компонентами которой являются максиминные критерии Вальда [17]

$$f_k(x, E_k) = \min_{i \in N_m} E_{ik} x = \min_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} e_{ijk} x_j \to \max_{x \in X}, \qquad k \in N_s,$$

где $E_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — k-е сечение матрицы $E = [e_{ijk}] \in \mathbb{R}^{m \times n \times s}$; $E_{ik} = (e_{i1k}, e_{i2k}, \ldots, e_{ink})$ — i-я строка этого сечения. Таким образом, следуя критерию Вальда, инвестор, предвидя непредсказуемость состояния рынка, проявляет крайнюю осторожность, оптимизируя эффективность портфеля $E_{ik}x$ (по критерию k) в предположении, что рынок находится в самом невыгодном для него состоянии, а именно тогда, когда эффективность минимальна. Очевидно, что подобный пессимистический подход в оценке рыночной ситуации целесообразно использовать только тогда, когда речь идёт о необходимости достижения гарантированного результата.

Под векторной (s-критериальной) инвестиционной булевой задачей $Z^s(E)$, $s \in \mathbb{N}$, с критериями Вальда будем понимать задачу поиска множества парето-оптимальных инвестиционных портфелей (множества Парето)

$$P^s(E) = \{x \in X : \nexists x' \in X \ \ (g(x', x, E) \geqslant 0_{(s)} \ \ \& \ \ g(x', x, E) \neq 0_{(s)})\},$$

где

$$g(x', x, E) = (g_1(x', x, E_1), g_2(x', x, E_2), \ \ldots, g_s(x', x, E_s)),$$
$$g_k(x', x, E_k) = f_k(x', E_k) - f_k(x, E_k) = \max_{i \in N_m} \min_{i' \in N_m} (E_{i'k}x' - E_{ik}x), \ k \in N_s.$$

Легко видеть, что в частном случае при $m = 1$ векторная инвестиционная задача $Z^s(E)$ превращается в s-критериальную задачу линейного булева программирования

$$Z^s_B(E): \quad Ex \to \max_{x \in X},$$

где $X \subseteq \mathbf{E}^n$; $E = [e_{1jk}] \in \mathbb{R}^{1 \times n \times s}$ — матрица со строками $E_k = (e_{11k}, e_{12k}, \ldots, e_{1nk}) \in \mathbb{R}^n$, $k \in N_s$. Такой случай можно интерпретировать как ситуацию, при которой состояние рынка не вызывает сомнений ($m = 1$).

В пространствах портфелей $\mathbb{R}^n$ и состояний рынка $\mathbb{R}^m$ зададим линейную метрику l_1, а в критериальном пространстве эффективности $\mathbb{R}^s$ — метрику Гельдера l_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, т. е. полагаем

$$\|E_{ik}\|_1 = \sum_{j \in N_n} |e_{ijk}|, \quad i \in N_m, \quad k \in N_s,$$
$$\|E_k\|_{11} = \|(\|E_{1k}\|_1, \|E_{2k}\|_1, \ldots, \|E_{mk}\|_1)\|_1 = \sum_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} |e_{ijk}|, \quad k \in N_s,$$

$$\|E\|_{11p} = \|(\|E_1\|_{11}, \|E_2\|_{11}, \ldots, \|E_s\|_{11})\|_p, \tag{1}$$

где, как обычно, норму Гельдера l_p вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_s) \in \mathbb{R}^s$ определим формулой

$$\|a\|_p = \begin{cases} \Big(\sum\limits_{j \in N_s} |a_j|^p\Big)^{1/p}, & \text{если} \ \ 1 \leqslant p < \infty, \\ \max\{|a_j| : \ j \in N_s\}, & \text{если} \ \ p = \infty. \end{cases}$$

Очевидны неравенства

$$\|E_{ik}\|_1 \leqslant \|E_k\|_{11} \leqslant \|E\|_{11p}, \quad i \in N_m, \ k \in N_s.$$

Известно, что метрика l_p, заданная в пространстве $\mathbb{R}^d$, порождает метрику l_q в сопряжённом пространстве $(\mathbb{R}^d)^*$, причём числа p и q связаны условиями

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \qquad 1 < p < \infty.$$

Как обычно, полагаем $q = 1$, если $p = \infty$, и $q = \infty$, если $p = 1$. Поэтому в дальнейшем считаем, что областью изменений чисел p и q является интервал $[1, \infty]$, а сами числа связаны указанными выше условиями. Кроме того, полагаем, что $1/p = 0$ при $p = \infty$.

Используя очевидное соотношение $E_{ik}x \geqslant -\|E_{ik}\|_1$, $x \in \mathbf{E}^n$, легко убедиться, что при любых портфелях x и x' верны неравенства

$$E_{ik}x - E_{i'k}x' \geqslant -\|E_k\|_{11}, \qquad i,\ i' \in N_m, \quad k \in N_s. \tag{2}$$

Следуя [4, 6, 9, 10], радиусом устойчивости парето-оптимального инвестиционного портфеля $x^0 \in P^s(E)$ задачи $Z^s(E)$ назовем число

$$\rho = \rho^s(x^0, p, m) = \begin{cases} \sup\ \Xi_p, & \text{если}\ \ \Xi_p \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если}\ \ \Xi_p = \varnothing, \end{cases}$$

где

$$\Xi_p = \{\varepsilon > 0 :\ \forall E' \in \Omega_p(\varepsilon) \quad (x^0 \in P^s(E + E'))\};$$

$\Omega_p(\varepsilon) = \{E' \in \mathbb{R}^{m\times n\times s} :\ \|E'\|_{11p} < \varepsilon\}$ — множество возмущающих матриц, $P^s(E+E')$ — множество Парето возмущённой задачи $Z^s(E + E')$. Тем самым радиус устойчивости задаёт предельный уровень возмущений исходных данных задачи (элементов матрицы E), сохраняющих парето-оптимальность портфеля.

2. Леммы

Для вектора $a = (a_1, a_2, \dots, a_s) \in \mathbb{R}^s$ введём оператор положительной срезки

$$a^+ = [a]^+ = (a_1^+, a_2^+, \dots, a_s^+),$$

где $a_k^+ = [a_k]^+ = \max\{0, a_k\}$, $k \in N_s$.

Лемма 1. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\varphi > 0$, $x^0 \neq x$,

$$\|g^+(x^0, x, E)\|_p \geqslant \varphi. \tag{3}$$

Тогда справедлива формула

$$\forall E' \in \Omega_p(\varphi) \quad \exists l \in N_s \qquad (g_l(x^0, x, E_l + E'_l) > 0). \tag{4}$$

Доказательство. Допустим, напротив, существует такая возмущающая матрица $E^0 \in \Omega_p(\varphi)$, что выполняются неравенства

$$g_k(x^0, x, E_k + E_k^0) \leqslant 0, \quad k \in N_s.$$

Тогда, привлекая (2), легко выводим

$$0 \geqslant g_k(x^0, x, E_k + E_k^0) = \max_{i\in N_m}\ \min_{i'\in N_m} (E_{i'k}x^0 - E_{ik}x + E_{i'k}^0x^0 - E_{ik}^0x) \geqslant g_k(x^0, x, E_k) - \|E_k^0\|_{11},$$

т. е.
$$g_k^+(x^0, x, E_k) \leqslant \|E_k^0\|_{11}, \quad k \in N_s.$$

Поэтому благодаря (1) и $E^0 \in \Omega_p(\varphi)$ при $p \in [1, \infty]$ имеем

$$\|g^+(x^0, x, E)\|_p \leqslant \|E^0\|_{11p} < \varphi.$$

Полученное неравенство противоречит условию (3). ■

Методом от противного легко доказать следующую лемму.

Лемма 2. Пусть $x^0 \in P^s(E)$, $\gamma > 0$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Если при любом портфеле $x \in X \setminus \{x^0\}$ и каждой возмущающей матрице $E' \in \Omega_p(\gamma)$ найдется такой индекс $l \in N_s$, что справедливо неравенство $g_l(x^0, x, E_l + E'_l) > 0$, то x^0 является парето-оптимальным портфелем возмущённой задачи $Z^s(E + E')$, т. е. $x^0 \in P^s(E + E')$ при $E' \in \Omega_p(\gamma)$.

Лемма 3. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $x^0 \neq x^*$, $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s)$, $\delta_k > 0$, $k \in N_s$,

$$\delta_k > g_k^+(x^0, x^*, E_k), \qquad k \in N_s. \tag{5}$$

Тогда при любом числе $\varepsilon > 2\|\delta\|_p$ существует такая возмущающая матрица $E^0 \in \Omega_p(\varepsilon)$, что $x^0 \notin P^s(E + E^0)$.

Доказательство. Для доказательства достаточно построить такую возмущающую матрицу $E^0 \in \Omega_p(\varepsilon)$, где $\varepsilon > 2\|\delta\|_p$, с сечениями E_k^0, $k \in N_s$, чтобы для каждого индекса $k \in N_s$ выполнялось неравенство

$$g_k(x^0, x^*, E_k + E_k^0) < 0. \tag{6}$$

Для этого введём обозначение

$$i(k) = \arg\min\{E_{ik}x^0 : \ i \in N_m\}, \quad k \in N_s,$$

и рассмотрим два возможных случая (при фиксированном индексе $k \in N_s$).

С л у ч а й 1. $x^0 \leqslant x^*$. Тогда ввиду неравенств $x^* \neq x^0 \neq 0_{(n)}$ существует такая пара различных индексов $(u, v) \in N_n \times N_n$, что $x_u^0 = 0$, $x_u^* = 1$, $x_v^0 = x_v^* = 1$. Вновь используя компоненты вектора δ (см. (5)), элементы любого k-го сечения $E_k^0 = [e_{ijk}^0] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ возмущающей матрицы $E^0 = [e_{ijk}^0] \in \mathbb{R}^{m\times n\times s}$ зададим по правилу

$$e_{ijk}^0 = \begin{cases} \delta_k, & \text{если } i = i(k),\ j = u, \\ -\delta_k, & \text{если } i = i(k),\ j = v, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда имеем

$$\begin{gathered} E_{i(k)k}^0 x^0 = -\delta_k; \qquad E_{i(k)k}^0 x^* = 0; \\ E_{ik}^0 x^0 = E_{ik}^0 x^* = 0, \qquad i \in N_m \setminus \{i(k)\}; \\ \|E_k^0\|_{11} = 2\delta_k, \quad k \in N_s. \end{gathered}$$

Отсюда легко убеждаемся, что $\|E^0\|_{11p} = 2\|\delta\|_p < \varepsilon$ и для любого индекса $k \in N_s$ справедливы следующие равенства:

$$f_k(x^0, E_k + E_k^0) = \min\Big\{(E_{i(k)k} + E_{i(k)k}^0)x^0, \min_{i \neq i(k)} (E_{ik} + E_{ik}^0)x^0\Big\} = f_k(x^0, E_k) - \delta_k;$$

$$f_k(x^*, E_k + E_k^0) = \min\Big\{(E_{i(k)k} + E_{i(k)k}^0)x^*, \min_{i \neq i(k)} (E_{ik} + E_{ik}^0)x^*\Big\} = f_k(x^*, E_k).$$

Поэтому ввиду (5) получаем требуемое неравенство (6):

$$g_k(x^0, x^*, E_k + E_k^0) = g_k(x^0, x^*, E_k) - \delta_k \leqslant g_k^+(x^0, x^*, E_k) - \delta_k < 0, \quad k \in N_s.$$

С л у ч а й 2. Пусть неравенство $x^0 \leqslant x^*$ не выполняется, т. е. существует такой индекс $u \in N_n$, что $x_u^0 = 1$ и $x_u^* = 0$. Используя компоненты вектора δ (см. (5)), зададим элементы любого k-го сечения $E_k^0 = [e_{ijk}^0] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ возмущающей матрицы $E^0 = [e_{ijk}^0] \in \mathbb{R}^{m\times n\times s}$ по правилу

$$e_{ijk}^0 = \begin{cases} -2\delta_k, & \text{если } \ i = i(k),\ j = u, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда имеем

$$E^0_{i(k)k}x^0 = -2\delta_k; \qquad E^0_{i(k)k}x^* = 0;$$
$$E^0_{ik}x^0 = E^0_{ik}x^* = 0, \qquad i \in N_m \setminus \{i(k)\};$$
$$\|E^0_k\|_{11} = 2\delta_k, \quad k \in N_s.$$

Отсюда получаем, что $\|E^0\|_{11p} = 2\|\delta\|_p < \varepsilon$. Кроме того, для любого $k \in N_s$ справедливы равенства

$$f_k(x^0, E_k + E^0_k) = \min\Big\{(E_{i(k)k} + E^0_{i(k)k})x^0, \min_{i\neq i(k)}(E_{ik} + E^0_{ik})x^0\Big\} = f_k(x^0, E_k) - 2\delta_k;$$
$$f_k(x^*, E_k + E^0_k) = \min\Big\{(E_{i(k)k} + E^0_{i(k)k})x^*, \min_{i\neq i(k)}(E_{ik} + E^0_{ik})x^*\Big\} = f_k(x^*, E_k).$$

Поэтому, используя соотношения (5), выводим неравенство (6):

$$g_k(x^0, x^*, E_k + E^0_k) = g_k(x^0, x^*, E_k) - 2\delta_k \leqslant g^+_k(x^0, x^*, E_k) - 2\delta_k < 0, \quad k \in N_s.$$

Лемма доказана. ■

Замечание 1. Легко видеть, что утверждение леммы 3 в случае 1 верно и для $\varepsilon > \|\delta\|_p$. Этим обстоятельством мы воспользуемся, когда будем доказывать достижимость нижней оценки (см. теорему 2).

При $\gamma > 0$ матрицу $W = [u, v] \in \mathbb{R}^{m\times 2}$, $m \geqslant 2$, со столбцами $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ и $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)^T$ назовем γ-*особой*, если выполняется неравенство

$$\min_{i\in N_m}(u_i + v_i) - \min_{i\in N_m} u_i < \gamma.$$

Лемма 4. Всякая матрица $W = [u, v] \in \mathbb{R}^{m\times 2}$, $m \geqslant 2$, с нормой $\|W\|_{11} = \|(\|u\|_1, \|v\|_1)\|_1 < 2\gamma$, где $\gamma > 0$, является γ-особой.

Доказательство. Проведем индукцию по числу $m \geqslant 2$. Сначала докажем утверждение леммы при $m = 2$. Пусть

$$W = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}.$$

Убедимся, что неравенство

$$\min\{u_1 + v_1, u_2 + v_2\} - \min\{u_1, u_2\} < \gamma \tag{7}$$

следует из неравенства $\|W\|_{11} < 2\gamma$, т. е. из неравенства

$$|u_1| + |u_2| + |v_1| + |v_2| < 2\gamma. \tag{8}$$

Не исключая общности, будем полагать, что

$$u_1 + v_1 \leqslant u_2 + v_2. \tag{9}$$

Рассмотрим два случая.

С л у ч а й 1. $u_1 \leqslant u_2$. Тогда неравенство (7) ввиду (9) принимает вид $v_1 < \gamma$. Доказательство этого неравенства проведем от противного. Пусть

$$v_1 \geqslant \gamma. \tag{10}$$

Из (9) и (10) имеем $-u_1 + u_2 + v_2 \geqslant \gamma$, а из (8) и (10) выводим $|u_1| + |u_2| + |v_2| < \gamma$. Полученные неравенства приводят к противоречию

$$0 \leqslant |u_2| - u_2 + |v_2| - v_2 < -(u_1 + |u_1|) \leqslant 0.$$

С л у ч а й 2. $u_1 > u_2$. Тогда неравенство (7), согласно (9), превращается в неравенство $u_1 + v_1 - u_2 < \gamma$. Пусть, напротив,

$$u_1 + v_1 - u_2 \geqslant \gamma. \tag{11}$$

Отсюда, учитывая (9), имеем $v_2 \geqslant \gamma$, и в силу (8) получим $|u_1| + |u_2| + |v_1| < \gamma$. Это неравенство вместе с (11) дают противоречие

$$0 \leqslant |u_1| - u_1 + |v_1| - v_1 < -(u_2 + |u_2|) \leqslant 0.$$

Далее будем предполагать, что утверждение леммы верно при $m \geqslant 2$. Покажем, что матрица $W = [u, v] \in \mathbb{R}^{(m+1)\times 2}$ со столбцами $u = (u_1, u_2, \ldots, u_{m+1})^T$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_{m+1})^T$ и нормой $\|W\|_{11} < 2\gamma$ является γ-особой. Положим

$$i_1 = \arg\min\{u_i + v_i : \ i \in N_{m+1}\}, \quad i_2 = \arg\min\{u_i : \ i \in N_{m+1}\},$$

и пусть индекс $h \in N_{m+1}$ таков, что

$$h \neq i_1, \quad h \neq i_2. \tag{12}$$

Через $W' \in \mathbb{R}^{m\times 2}$ обозначим матрицу, полученную из матрицы W путем удаления строки с номером h. Тогда $\|W'\|_{11} \leqslant \|W\|_{11} < 2\gamma$ и по предположению индукции матрица W' является γ-особой, т. е. выполняется неравенство

$$\min_{i\in N_{m+1}\setminus\{h\}}(u_i + v_i) - \min_{i\in N_{m+1}\setminus\{h\}} u_i < \gamma.$$

Кроме того, учитывая (12), нетрудно убедиться, что справедливы равенства

$$\min_{i\in N_{m+1}} (u_i + v_i) = u_{i_1} + v_{i_1} = \min_{i\in N_{m+1}\setminus\{h\}}(u_i + v_i), \quad \min_{i\in N_{m+1}} u_i = u_{i_2} = \min_{i\in N_{m+1}\setminus\{h\}} u_i.$$

Следовательно, матрица W является γ-особой. ■

3. Оценки радиуса устойчивости

Для парето-оптимального портфеля x^0 задачи $Z^s(E)$ введем обозначение

$$\varphi = \varphi^s(x^0, p, m) = \min_{x\in X\setminus\{x^0\}} \|g^+(x^0, x, E)\|_p.$$

Очевидно, что $\varphi \geqslant 0$.

Теорема 1. При любых m, $s \in \mathbb{N}$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$ для радиуса устойчивости $\rho^s(x^0, p, m)$ инвестиционного портфеля $x^0 \in P^s(E)$ задачи $Z^s(E)$ справедливы следующие оценки:

$$\varphi^s(x^0, p, m) \leqslant \rho^s(x^0, p, m) \leqslant 2\varphi^s(x^0, p, m). \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $x^0 \in P^s(E)$. Сначала докажем справедливость нижних оценок (13). Не уменьшая общности, будем считать, что $\varphi > 0$ (в противном случае неравенство $\rho \geqslant \varphi$ очевидно). В соответствии с определением числа φ для любого портфеля $x \neq x^0$ справедливо неравенство $\|g^+(x^0, x, E)\|_p \geqslant \varphi$, а поэтому в силу леммы 1 верна формула (4). Тогда (согласно лемме 2) $x^0 \in P^s(E+E')$ при любой возмущающей матрице $E' \in \Omega_p(\varphi)$. Следовательно, $\rho^s(x^0, p, m) \geqslant \varphi^s(x^0, p, m)$.

Далее докажем справедливость верхней оценки (13) при любом числе $p \in [1, \infty]$. Пусть $\varepsilon > 2\varphi > 0$, а портфель $x^* \neq x^0$ таков, что

$$\|g^+(x^0, x^*, E)\|_p = \varphi. \tag{14}$$

Тогда, учитывая непрерывную зависимость нормы l_p вектора от его координат, подберем такой вектор $\delta \in \mathbb{R}^s$ с положительными компонентами, удовлетворяющими неравенствам (5), что $\varepsilon/2 > \|\delta\|_p > \varphi$. Отсюда, согласно лемме 3, при $\varepsilon > 2\varphi$ существует такая возмущающая матрица $E^0 \in \Omega_p(\varepsilon)$, что портфель $x^0 \in P^s(E)$ не является парето-оптимальным портфелем возмущенной задачи $Z^s(E+E^0)$. Тем самым доказано, что для любого числа $\varepsilon > 2\varphi$ справедливо неравенство $\rho^s(x^0, p, m) < \varepsilon$. Следовательно, $\rho^s(x^0, p, m) \leqslant 2\varphi^s(x^0, p, m)$ при любом числе $p \in [1, \infty]$. ■

Замечание 2. Нетрудно видеть, что при обосновании нижней оценки φ допустима принадлежность нулевого вектора $0_{(n)}$ множеству портфелей X. Отсутствие нулевого вектора необходимо лишь при установлении верхней оценки, поскольку доказательство неравенства $\rho^s(x^0, E) \leqslant 2\varphi$ основано на использовании леммы 3.

Следствие 1. Радиус устойчивости $\rho^s(x^0, p, m)$ больше 0 (парето-оптимальный портфель x^0 устойчив) тогда и только тогда, когда $\varphi > 0$.

Докажем достижимость нижней оценки радиуса устойчивости при $m = 1$.

Следствие 2. При любых $s \in \mathbb{N}$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$ для радиуса устойчивости $\rho^s(x^0, p, 1)$ инвестиционного портфеля $x^0 \in P^s(E)$ s-критериальной задачи булева программирования $Z^s_B(E)$ справедлива формула

$$\rho^s(x^0, p, 1) = \varphi^s(x^0, p, 1).$$

Доказательство. Пусть портфель $x^* \neq x^0$ таков, что выполняется равенство

$$\|[E(x^0 - x^*)]^+\|_p = \varphi.$$

Тогда при $\varepsilon > \varphi$ очевидно, что существует вектор $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s) \in \mathbb{R}^s$, компоненты которого удовлетворяют неравенствам

$$\delta_k > [E_k(x^0 - x^*)]^+, \qquad k \in N_s, \tag{15}$$

$$\varphi < \|\delta\|_p < \varepsilon.$$

Пусть индекс $l \in N_n$ такой, что $x^*_l \neq x^0_l$. Рассмотрим возмущающую матрицу $E^0 = [e^0_{1jk}] \in \mathbb{R}^{1\times n\times s}$, элементы которой зададим по правилу

$$e^0_{1jk} = \begin{cases} \delta_k(x^*_l - x^0_l), & \text{если } \ j = l, \ k \in N_s, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$E_k(x^0 - x^*) = -\delta_k, \quad k \in N_s;$$
$$\|E^0_k\|_1 = \delta_k, \quad k \in N_s;$$
$$\varphi < \|E^0\|_{1p} = \|\delta\|_p < \varepsilon.$$

Поэтому ввиду (15) запишем

$$(E_k + E_k^0)(x^0 - x^*) = E_k(x^0 - x^*) - \delta_k \leqslant [E_k(x^0 - x^*)]^+ - \delta_k < 0, \quad k \in N_s.$$

В результате получаем, что для любого числа $\varepsilon > \varphi$ существует такая возмущающая матрица $E^0 \in \Omega_p(\varepsilon)$, что портфель $x^0 \in P^s(E)$ перестает быть парето-оптимальным портфелем возмущённой задачи $Z_B^s(E+E^0)$. Это значит, что $\rho^s(x^0, p, 1) \leqslant \varphi$. Следовательно, в силу теоремы 1 радиус устойчивости парето-оптимального портфеля задачи $Z_B^s(E)$ равен $\varphi = \varphi^s(x^0, p, 1)$. ■

4. Достижимость нижней оценки (при $m \geqslant 2$)

Теорема 2. При любых $\varphi > 0$, $m \geqslant 2$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ существует такой класс векторных инвестиционных задач $Z^s(E)$, $s \in \mathbb{N}$, что для радиуса устойчивости портфеля $x^0 \in P^s(E)$ любой задачи из этого класса справедлива формула

$$\rho^s(x^0, p, m) = \varphi = \varphi^s(x^0, p, m).$$

Доказательство. Пусть портфель $x^* \neq x^0$ таков, что выполняется равенство (14). Тогда при $\varepsilon > \varphi$ очевидно, что существует вектор $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s) \in \mathbb{R}^s$, компоненты которого удовлетворяют неравенствам (5) и $\varphi < \|\delta\|_p < \varepsilon$. Далее будем предполагать, что существует индекс $l \in N_n$ с условием $x_l^0 = 1$, $x_l^* = 0$.

Рассмотрим возмущающую матрицу $E^0 = [e_{ijk}^0] \in \mathbb{R}^{m \times n \times s}$, элементы любого k-го сечения E_k^0, $k \in N_s$, которой зададим по правилу

$$e_{ijk}^0 = \begin{cases} -\delta_k, & \text{если } i = i(k),\ j = l, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $i(k) = \arg\min\{E_{ik}x^0 : \ i \in N_m\}$. Тогда для каждого индекса $k \in N_s$ очевидны соотношения

$$\begin{gathered} E_{i(k)k}^0 x^0 = -\delta_k; \\ E_{ik}^0 x^0 = 0, \quad i \in N_m \setminus \{i(k)\}; \\ E_{ik}^0 x^* = 0, \quad i \in N_m; \\ \|E_k^0\|_{11} = \delta_k; \quad \varphi < \|E^0\|_{11p} = \|\delta\|_p < \varepsilon. \end{gathered}$$

Отсюда с учётом неравенств (5) получаем

$$g_k(x^0, x^*, E_k + E_k^0) = \min_{i \in N_m} (E_{ik} + E_{ik}^0)x^0 - \min_{i \in N_m} (E_{ik} + E_{ik}^0)x^* =$$
$$= f_k(x^0, E) - \delta_k - f_k(x^0, E_k) = g_k(x^0, x^*, E_k) - \delta_k \leqslant g_k^+(x^0, x^*, E_k) - \delta_k < 0, \quad k \in N_s.$$

Следовательно, для каждого индекса $k \in N_s$ верно неравенство (6).

В результате получаем, что для любого числа $\varepsilon > \varphi$ существует такая возмущающая матрица $E^0 \in \Omega_p(\varepsilon)$, что портфель $x^0 \in P^s(E)$ перестает быть парето-оптимальным портфелем возмущённой задачи $Z^s(E + E^0)$. Это значит, что $\rho^s(x^0, p, m) \leqslant \varphi$. Следовательно, в силу теоремы 1 радиус устойчивости парето-оптимального портфеля любой задачи введенного класса равен $\varphi = \varphi^s(x^0, p, m)$. ■

Приведем числовой пример, свидетельствующий о существовании задач того класса, который указан в доказательстве теоремы 2.

Пример 1. Пусть $m = 3$, $n = 3$, $s = 2$, $X = \{x^0, x^*\}$, $x^0 = (1, 1, 0)^T$, $x^* = (0, 1, 1)^T$, $E \in \mathbb{R}^{3\times3\times2}$ — матрица с сечениями

$$E_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тогда $f(x^0, E) = (3, 3)$, $f(x^*, E) = (2, 2)$, $x^0 \in P^2(E)$, $l = 1$,

$$\varphi^2(x^0, p, 3) = \|g^+(x^0, x^*, E)\|_p = \|(1, 1)\|_p = 2^{1/p}.$$

Поэтому, согласно теореме 2, при любом числе $p \in [1, \infty]$ имеем

$$\rho^2(x^0, p, 3) = \|g^+(x^0, x^*, E)\|_p = 2^{1/p}.$$

5. Достижимость верхней оценки

Теорема 3. При любых $\varphi > 0$, $m \geqslant 2$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$ существует такой класс векторных инвестиционных задач $Z^s(E)$, $s \in \mathbb{N}$, что для радиуса устойчивости портфеля $x^0 \in P^s(E)$ любой задачи из этого класса справедлива формула

$$\rho^s(x^0, p, m) = 2\varphi^s(x^0, p, m).$$

Доказательство. Пусть $x^0 \in P^s(E)$, $\varphi > 0$ и $m \geqslant 2$. Согласно теореме 1, достаточно построить класс задач $Z^s(E)$ с условием $\rho^s(x^0, p, m) \geqslant 2\varphi$. Покажем, что такой класс существует при $X = \{x^0, x^*\}$, где $x^0 \in P^s(E)$, $x^0 \leqslant x^*$, $x^0 \neq x^*$. Непосредственно из определения числа φ следует равенство (14).

Далее будем предполагать, что все строки E_{ik}, $i \in N_m$, любого сечения E_k, $k \in N_s$, матрицы $E \in \mathbb{R}^{m\times n\times s}$ одинаковы. Обозначив такую строку через e, будем считать, что $E_{ik}(x^0 - x^*) = e(x^0 - x^*) > 0$, $i \in N_m$, $k \in N_s$. Тогда имеем

$$g_k(x^0, x^*, E_k) = f_k(x^0, E_k) - f_k(x^*, E_k) = e(x^0 - x^*) > 0, \quad k \in N_s. \tag{16}$$

Учитывая это, из (14) получаем

$$e(x^0 - x^*) = \varphi/s^{1/p}. \tag{17}$$

Пусть теперь $E' \in \mathbb{R}^{m\times n\times s}$ — произвольная матрица с сечениями E'_k, $k \in N_s$. Тогда из равенств (16) и (17) для любого индекса $k \in N_s$ вытекают равенства

$$g_k(x^0, x^*, E_k + E'_k) = \min_{i\in N_m}(e - E'_{ik})x^0 - \min_{i\in N_m}(e - E'_{ik})x^* = e(x^0 - x^*) - \zeta_k = \varphi/s^{1/p} - \zeta_k,$$

где

$$\zeta_k = \min_{i\in N_m} E'_{ik}(x^0 + \widehat{x}) - \min_{i\in N_m} E'_{ik}x^0, \quad k \in N_s; \tag{18}$$

$$\widehat{x} = x^* - x^0. \tag{19}$$

Заметим, что $\widehat{x} \in \mathbf{E}^n$ и $\widehat{x} \neq 0_{(n)}$ в силу неравенств $x^* \geqslant x^0$ и $x^* \neq x^0$.

Пусть теперь возмущающая матрица $E' = [e'_{ijk}] \in \Omega_p(2\varphi)$. Тогда существует хотя бы один такой индекс $l \in N_s$, что для l-го сечения $E'_l = [e'_{ijl}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ матрицы E' справедливо неравенство $\|E'_l\|_{11} < 2\varphi/s^{1/p}$. Рассмотрим матрицу $W = [u, v] \in \mathbb{R}^{m\times2}$ со столбцами $u = E'_l x^0$ и $v = E'_l\widehat{x}$. Далее, введя для портфеля $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$

обозначение $N(x) = \{j \in N_n : x_j = 1\}$, убеждаемся (ввиду (19)) в справедливости равенства $N(x^0) \cap N(\widehat{x}) = \varnothing$. Отсюда получаем

$$\|W\|_{11} = \|E'_l x^0\|_1 + \|E'_l \widehat{x}\|_1 = \sum_{i \in N_m} \left| \sum_{j \in N(x^0)} e'_{ijl} \right| + \sum_{i \in N_m} \left| \sum_{j \in N(\widehat{x})} e'_{ijl} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i \in N_m} \sum_{j \in N(x^*)} |e'_{ijl}| \leqslant \|E'_l\|_{11} < 2\varphi/s^{1/p}.$$

Поэтому благодаря лемме 4 (применение этой леммы возможно, так как $m \geqslant 2$ по условию теоремы 3) матрица W является $\varphi/s^{1/p}$-особой, т. е., согласно (18), выполняется неравенство $\zeta_l < \varphi/s^{1/p}$, которое вместе с (5) дает $g_l(x^0, x^*, E_l + E'_l) > 0$.

Следовательно, на основании леммы 2 заключаем, что при всякой возмущающей матрице $E' \in \Omega_p(2\varphi)$ выполняется включение $x^0 \in P^s(E + E')$, т. е. $\rho^s(x^0, p, m) \geqslant 2\varphi^s(x^0, p, m)$. ■

Следующий пример свидетельствует, что существуют задачи, принадлежащие классу, указанному в доказательстве теоремы 3.

Пример 2. Пусть $m = 3$, $n = 3$, $s = 2$, $X = \{x^0, x^*\}$, $x^0 = (0, 1, 1)^T$, $x^* = (1, 1, 1)^T$, $E \in \mathbb{R}^{3\times3\times2}$ — матрица с сечениями

$$E_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $x^0 \leqslant x^*$, $x^0 \neq x^*$, $f(x^0, E) = (-1, -1)$, $f(x^*, E) = (-2, -2)$. Поэтому $x^0 \in P^2(E)$, $e = (-1, 1, -2)$, $g_k(x^0, x^*, E_k) = e(x^0 - x^*) = 1$, $k \in N_2$. Отсюда $\varphi^2(x^0, p, 3) = \|(1, 1)\|_p = 2^{1/p}$. Следовательно, согласно теореме 3, для любого числа $p \in [1, \infty]$ имеем $\rho^2(x^0, p, 3) = 2\varphi^2(x^0, p, 3) = 2 \cdot 2^{1/p}$.

Замечание 3. Из теорем 2 и 3 следует, что оценки радиуса устойчивости (13) векторной задачи $Z^s(E)$ являются достижимыми при любых числах $m \geqslant 2$ и $p \in [1, \infty]$. Ранее такой результат был известен лишь при $p = 1$ [18].

Заключение

В настоящей работе на базе портфельной теории Марковица сформулирована векторная (многокритериальная) булева задача выбора парето-оптимальных инвестиционных портфелей, состоящая в максимизации различных показателей эффективности принимаемых решений. При этом непредсказуемость состояния финансового рынка, присущая рыночной экономике, учитывается путём использования классических критериев теории игр [19, 20] — максиминных критериев Вальда, а учёт неточности и некорректности исходных числовых параметров (оценок экономической эффективности инвестиционных проектов), характерных для реальных инвестиционных задач, основан на проведении параметрического постоптимального анализа устойчивости парето-оптимального инвестиционного портфеля к возмущению этих параметров в случае, когда в критериальном пространстве задана любая метрика Гельдера l_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Получены нижняя и верхняя оценки (границы) радиуса устойчивости, под которым, как обычно, понимается предельный уровень изменений параметров, сохраняющих оптимальность портфеля. Построение конкретных классов векторных инвестиционных задач показало неулучшаемость этих оценок. Использование полученных здесь результатов позволяет указать границы надёжности решений, принимаемых инвестором при формировании инвестиционного портфеля, оптимального по нескольким максиминным критериями экономической эффективности Вальда.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Markowitz H.* Portfolio selection // J. Finance. 1952. V. 7. No. 1. P. 77–91.
2. *Markowitz H. M.* Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. New York: Willey, 1991. 400 p.
3. *Шарп У. Ф., Александер Г. Дж., Бейли Д. В.* Инвестиции. М.: Инфра-М, 2003. 1028 с.
4. *Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.* О радиусе устойчивости эффективного решения векторной задачи целочисленного линейного программирования в метрике Гёльдера // Кибернетика и системный анализ. 2006. № 4. С. 175–181.
5. *Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.* Об одном типе устойчивости многокритериальной задачи целочисленного линейного программирования в случае монотонной нормы // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 5. С. 45–51.
6. *Емеличев В. А., Карелкина О.В.* Конечные коалиционные игры: параметризация концепции равновесия (от Парето до Нэша) и устойчивость эффективной ситуации в метрике Гельдера // Дискретная математика. 2009. Т. 21. Вып. 2. С. 43–50.
7. *Emelichev V. and Podkopaev D.* Quantitative stability analysis for vector problems of 0-1 programming // Discrete Optimization. 2010. V. 7. No. 1-2. P. 48–63.
8. *Емеличев В. А., Коротков В. В.* Оценки радиуса устойчивости лексикографического оптимума векторной булевой задачи с критериями рисков Сэвиджа // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18. № 2. С. 41–50.
9. *Емеличев В. А., Коротков В. В., Кузьмин К. Г.* Многокритериальная инвестиционная задача в условиях неопределенности и риска // Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. № 6. С. 157–164.
10. *Емеличев В. А., Коротков В. В.* О радиусе устойчивости эффективного решения многокритериальной задачи портфельной оптимизации с критериями Сэвиджа // Дискретная математика. 2011. Т. 23. Вып. 4. С. 33–38.
11. *Емеличев В. А., Коротков В. В.* Постоптимальный анализ многокритериальной инвестиционной задачи Марковица // Информатика. 2011. № 4. С. 5–14.
12. *Emelichev V. and Korotkov V.* On stability radius of the multicriteria variant of Markowitz's investment portfolio problem // Bull. Acad. Sci. Moldova. Mathematics. 2011. No. 1. P. 83–94.
13. Portfolio Decision Analysis: Improved Methods for Resource Allocation (International Series in Operations Research and Management Science) / eds. A. Salo, J. Keisler, A. Morton. New York: Springer, 2011. 424 p.
14. *Бронштейн Е. М., Качкаева М. М., Тулупова Е. В.* Управление портфелем ценных бумаг на основе комплексных квантильных мер риска // Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. № 1. С. 178–183.
15. *Царев В. В.* Оценка экономической эффективности инвестиций. СПб.: Питер, 2004. 464 с.
16. *Виленский П. Л., Лившиц В. Н., Смоляк С. А.* Оценка эффективности инвестиционных проектов: теория и практика. М.: Дело, 2008. 1104 с.
17. *Wald A.* Statistical Decision Functions. New York: Wiley, 1950. 179 p.
18. *Emelichev V. and Korotkov V.* Post-optimal analysis of investment problem with Wald's ordered maximin criteria // Bull. Acad. Sci. Moldova. Mathematics. 2012. No. 1. P. 59–69.
19. *Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А.* Теория игр. М.: Высшая школа, 1998.
20. *Фон Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970. 707 с.