

## ФОРМУЛА ДЛЯ ЧИСЛА СОЧЕТАНИЙ С ПОВТОРЕНИЯМИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ

В. В. Гоцуленко

*Институт технической теплофизики НАН Украины, г. Киев, Украина*

**E-mail:** gosul@ukr.net

Получены различные обобщения понятия числа сочетаний с повторениями. Найдены формулы для вычисления введённых комбинаторных чисел и рассмотрены различные задачи, которые решаются с их применением.

**Ключевые слова:** сочетания с повторениями при ограничениях, диофантовы уравнения, формальный полином, производящие функции, мультимножества.

### Введение

Всё разнообразие комбинаторных формул может быть фактически выведено из нескольких основных утверждений, касающихся конечных множеств [1, 2]. Тем не менее во многих отношениях полезно вводить различные комбинаторные числа, характеризующие те или иные количественные соотношения на множествах произвольной природы. Классические понятия числа сочетаний, размещений и перестановок в случае возможности дублирования элементов в выборках обобщаются в различных направлениях. Так, в частности, возникают сочетания, размещения и перестановки с повторениями [1]. Существует множество комбинаторных задач, которые можно эффективно решать, не обращаясь всякий раз к основным принципам комбинаторики, например к правилу произведения, а используя различные обобщения основных комбинаторных чисел.

Непосредственное прикладное применение комбинаторных чисел связано с подсчётом количества подмультимножеств заданного мультимножества [3], обладающих определёнными свойствами. При этом данная задача может рассматриваться и как универсальный способ построения и классификации комбинаторных чисел в зависимости от задаваемых свойств подмультимножеств.

Первичная спецификация мультимножества приводит к задаче подсчёта  $m$ -элементных подмультимножеств заданного мультимножества с фиксированными весами его элементов. Например, в [4] получена формула для решения данной задачи. В [5] на основе данной формулы получено выражение, более удобное для проведения вычислений. В этой же работе получена формула для числа упорядоченных подмультимножеств. Другой подход для определения количества  $m$ -элементных подмультимножеств заданного мультимножества через их вторичные спецификации рассматривается в [6].

В данной работе получено несколько новых возможных способов обобщения понятия числа сочетаний с повторениями и рассмотрены некоторые комбинаторные задачи, решаемые с их помощью. В частности, полученные результаты имеют непосредственное применение к задаче о подсчёте количества подмультимножеств заданного мультимножества.

### 1. Определение числа сочетаний с повторениями при ограничениях

Формулировка достаточно общей комбинаторной задачи, приводящей к сочетаниям с повторениями, может быть следующей: имеется большое число предметов, например бесконечное,  $n$  различных типов. Необходимо определить, сколько из них можно составить различных  $m$ -элементных наборов, не принимая во внимание порядок элементов. В качестве точной формализации понятия  $k$ -элементного набора можно рассматривать  $n$ -компонентный вектор  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где  $x_k$  означает количество элементов  $k$ -го типа,  $k = 1, \dots, n$ , в соответствующем  $m$ -элементном наборе.

Следовательно, исходная задача эквивалентна задаче определения количества неотрицательных решений линейного диофантова уравнения

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = m, \quad (1)$$

где  $x_k \geq 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Для числа сочетаний с повторениями в литературе используются различные обозначения, например  $\bar{C}_n^m$  или  $f_n^m$ ; будем придерживаться последнего обозначения. Решение задачи (1) дается следующей формулой [1]:

$$f_n^m = C_{n-1+m}^{m-1},$$

где  $C_n^m$  — число сочетаний без повторений из  $n$  элементов по  $m$  элементам.

Если в исходной задаче количество элементов каждого типа не является бесконечным, а ограничено некоторым числом, для каждого типа своим, то приходим к понятию числа сочетаний с повторениями при ограничениях. Иными словами, рассмотрим следующую комбинаторную задачу. Имеется  $n$  ящиков с конфетами. Разрешается взять ровно  $m$  конфет из этих ящиков, причём из  $k$ -го ящика разрешается взять не более  $m_k$  конфет. Необходимо найти, сколькими способами это можно сделать. Формулировка данной задачи в терминах диофантовых уравнений следующая: необходимо найти количество неотрицательных решений линейного диофантова уравнения (1) при наличии ограничений

$$0 \leq x_k \leq m_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Обозначим данное число символом  $f_n^m[m_1, m_2, \dots, m_n]$  и будем его называть числом сочетаний с повторениями из  $n$  типов элементов по  $m$  элементам при (простых) ограничениях, определяемых неравенствами (2).

**Замечание 1.** Несложно проверить, что решение задачи (1), (2), т.е. формула для  $f_n^m[m_1, m_2, \dots, m_n]$ , имеет смысл лишь при  $m_k \geq 0$  для  $k = 1, \dots, n$  и  $m_1 + m_2 + \dots + m_n \geq m$ .

Задача (1), (2) также может быть сформулирована как задача подсчёта  $m$ -элементных подмультимножеств заданного мультимножества с весами элементов  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Применяя метод производящих функций, далее мы получим новую формулу для решения задачи (1), (2) и некоторых её обобщений.

Отметим, что конфеты в ящиках могут быть упакованы не насыпью, а находиться в коробках или блоках по  $r_j$  штук,  $j = 1, \dots, N$ . Таким образом, имеется  $N$  типов коробок, где в коробке  $j$ -го типа находится  $r_j$  конфет.

**Замечание 2.** В отношении последней задачи возможны два варианта. В первом случае разрешается из каждого ящика брать не более одной коробки конфет. Решение задачи в этом случае будем называть числом сочетаний с повторениями при блочных ограничениях и обозначать символом  $f_n^m \left[ \frac{m_1, m_2, \dots, m_n}{r_1, r_2, \dots, r_N} \right]$ . Во втором случае ограничений на количество коробок нет. Необходимо лишь, чтобы суммарное количество

конфет, взятых из  $k$ -го ящика, не превышало  $m_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Решение второй задачи будем называть числом сочетаний второго типа с повторениями при блочных ограничениях и обозначать символом  $F_n^m \left[ \frac{m_1, m_2, \dots, m_n}{r_1, r_2, \dots, r_N} \right]$ .

Интерпретация формулы  $f_n^m \left[ \frac{m_1, m_2, \dots, m_n}{r_1, r_2, \dots, r_N} \right]$  в терминах числа решений диофантова уравнения (1) приводит к следующим ограничениям для допустимых решений:

$$0 \leq x_k \leq m_k, \quad x_k \in \{r_1, r_2, \dots, r_N\}, \quad k = 1, \dots, n,$$

где  $r_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , — произвольные целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию  $\min_{1 \leq j \leq N} \{r_j\} \leq \min_{1 \leq k \leq n} \{m_k\}$ .

Введём в рассмотрение следующие множества целых чисел ( $k = 1, \dots, n$ ):

$$I(m_k; r_1, r_2, \dots, r_N) = \left\{ r : r = \sum_{p=1}^N \alpha_{kp} r_p \leq m_k, \quad \alpha_{kp} \in \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad p = 1, \dots, N \right\}.$$

Тогда для определения комбинаторного числа  $F_n^m \left[ \frac{m_1, m_2, \dots, m_n}{r_1, r_2, \dots, r_N} \right]$  через целочисленные решения уравнения (1) приходим к следующим ограничениям:

$$0 \leq x_k \leq m_k, \quad x_k \in I(m_k; r_1, r_2, \dots, r_N), \quad k = 1, \dots, n.$$

## 2. Формулы для числа сочетаний с повторениями при ограничениях

Для вывода формул числа сочетаний с повторениями при ограничениях воспользуемся следующей конструкцией метода производящих функций [7]. Рассмотрим формальный полином

$$\begin{aligned} P(t) &= (1 + t + t^2 + \dots + t^{m_1}) (1 + t + t^2 + \dots + t^{m_2}) \dots (1 + t + t^2 + \dots + t^{m_n}) = \\ &= \sum_{\substack{j=0, x_1+x_2+\dots+x_n=j, \\ 0 \leq x_k \leq m_k, k=1, \dots, n}} t^{x_1} t^{x_2} \dots t^{x_n}. \end{aligned} \quad (3)$$

Представим  $P(t)$  в стандартной форме по возрастающим показателям степеней:

$$P(t) = 1 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots + p_R t^R, \quad R = m_1 + m_2 + \dots + m_n.$$

Тогда из тождества (3) следует, что  $f_n^m[m_1, m_2, \dots, m_n] = p_m$ . Для вычисления данного коэффициента положим в тождестве (3)  $t = \exp\{i\varphi\}$ , где  $i = \sqrt{-1}$  — мнимая единица. Умножим обе части полученного соотношения на  $\exp\{-im\varphi\}$  и проинтегрируем его по переменной  $\varphi$  на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Учитывая, что система функций  $\{\exp\{ik\varphi\}\}_{k=0}^\infty$  является ортогональной в пространстве  $L_2[-\pi, \pi]$ , получим следующее представление:

$$f_n^m[m_1, m_2, \dots, m_n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-im\varphi) \prod_{k=1}^n \frac{\exp\{i(m_k + 1)\varphi\} - 1}{\exp\{i\varphi\} - 1} d\varphi.$$

Аналогично, рассматривая тождество

$$\left( \sum_{j:r_j \leq m_1} t^j \right) \left( \sum_{j:r_j \leq m_2} t^j \right) \dots \left( \sum_{j:r_j \leq m_n} t^j \right) = \sum_{\substack{0 \leq x_k \leq m_k, \quad k=1, \dots, n, \\ x_k \in \{r_1, r_2, \dots, r_N\}}} t^{x_1} t^{x_2} \dots t^{x_n},$$

приходим к представлению

$$f_n^m \left[ \frac{m_1, m_2, \dots, m_n}{r_1, r_2, \dots, r_N} \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{p=1}^n \sum_{j: 0 \leq r_j \leq m_p} \exp \{i\varphi (r_j - m)\} d\varphi. \quad (4)$$

Наконец, используя тождество

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{j: r_j \in I(m_1; r_1, r_2, \dots, r_N)} t^j \right) \left( \sum_{j: r_j \in I(m_2; r_1, r_2, \dots, r_N)} t^j \right) \dots \left( \sum_{j: r_j \in I(m_n; r_1, r_2, \dots, r_N)} t^j \right) = \\ & = \sum_{\substack{0 \leq x_k \leq m_k, \quad k=1, \dots, n, \\ x_k \in I(m_k; r_1, r_2, \dots, r_N)}} t^{x_1} t^{x_2} \dots t^{x_n}, \end{aligned}$$

получаем выражение для числа сочетаний второго типа с повторениями при блочных ограничениях:

$$F_n^m \left[ \frac{m_1, m_2, \dots, m_n}{r_1, r_2, \dots, r_N} \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{p=1}^n \sum_{j: r_j \in I(m_p; r_1, r_2, \dots, r_N)} \exp \{i\varphi (r_j - m)\} d\varphi. \quad (5)$$

### 3. Некоторые следствия и обобщения

Отметим, что если элементы в последовательности  $\{r_1, r_2, \dots, r_N\}$  рекуррентно связаны, например образуют геометрическую прогрессию, то подынтегральные выражения в соотношениях (4), (5) допускают дальнейшее упрощение. Например, если  $r_j/r_{j-1} = a = \text{const}$  для  $j = 2, \dots, N$ , то, учитывая, что

$$\sum_{j: r_j \leq m_k} t^j = t^{r_1} \frac{t^{\psi(k)} - 1}{t - 1}, \quad \text{где } \psi(k) = \left[ 1 + \log_a \left( \frac{m_k}{r_1} \right) \right], \quad [z] - \text{целая часть числа } z,$$

соотношение (4) примет в этом случае более простую форму

$$f_n^m \left[ \frac{m_1, m_2, \dots, m_n}{r_1, r_2, \dots, r_N} \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \{-im\varphi\} A(i\varphi) d\varphi,$$

где

$$A(t) = \frac{t^{nr_1}}{(t-1)^n} \prod_{k=1}^n (t^{\psi(k)} - 1).$$

Выше мы рассмотрели задачи о количестве выборок конфет различного состава для одного ребенка. В качестве небольшого обобщения рассмотрим задачу, когда конфеты необходимо распределить между несколькими детьми. Пусть имеется  $n$  ящиков с конфетами, причём в разных ящиках конфеты разных видов. Пусть также в  $j$ -м ящике находится  $r_j$  конфет. Конфеты из всех ящиков необходимо распределить между  $m$  детьми так, чтобы первому досталось ровно  $k_1$  конфет, второму —  $k_2$  конфет и т. д., последнему —  $k_m$  конфет. Необходимо определить, сколькими способами это можно сделать. Интерпретация данной задачи в терминах решений диофантовых уравнений приводит к следующей формулировке.

Рассматривается система линейных диофантовых уравнений

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = k_1, \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = k_2, \\ \dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = k_m, \end{cases} \quad \begin{cases} x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = r_1, \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = r_2, \\ \dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = r_n, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\sum_{j=1}^n r_j = \sum_{i=1}^m k_i; \quad k_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad r_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Необходимо определить количество её неотрицательных решений. Решение задачи (6), (7) обозначим символом  $f_{m;n}^{k_1, \dots, k_m; r_1, \dots, r_n}$ , который также может рассматриваться как некоторое расширение понятия числа сочетаний с повторениями. Для определения данного комбинаторного числа рассмотрим следующую промежуточную подзадачу. Обозначим через  $\mathbf{A} = \|a_{ij} : i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\|$  произвольную матрицу с целыми неотрицательными элементами. Через  $\mathbf{b} = \|b_i : i = 1, \dots, m\|$  обозначим произвольный вектор-столбец с целыми неотрицательными элементами. Рассматривается задача определения количества неотрицательных решений системы линейных диофантовых уравнений

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (8)$$

Обозначим решение рассматриваемой задачи через  $\mathcal{N}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Данное число равно коэффициенту при  $t_1^{b_1} t_2^{b_2} \dots t_m^{b_m}$  в разложении по возрастающим показателям степеней производящей функции

$$\prod_{j=1}^n \sum_{k=0}^{K_j} t_1^{ka_{1j}} t_2^{ka_{2j}} \dots t_m^{ka_{mj}}, \quad (9)$$

где  $K_j = 1 + \max \left\{ \left[ \frac{b_j}{a_{ij}} \right] + \operatorname{sgn} \left( \frac{b_j}{a_{ij}} - \left[ \frac{b_j}{a_{ij}} \right] \right) : \forall i = 1, \dots, m \ (a_{ij} > 0) \right\}, \quad j = 1, \dots, n.$

Поступая по аналогии, как и ранее, положим в (9)  $t_k = \exp \{i\varphi_k\}$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Далее, интегрируя полученное выражение на кубе  $[-\pi, \pi]^m$  по переменным  $\varphi_k$ , учитывая ортогональность системы функций  $\left\{ \exp \left\{ -i \sum_{k=1}^m q_k \varphi_k \right\} : q_k \in \mathbb{Z}^+, k = 1, \dots, m \right\}$  в пространстве  $L_2[-\pi, \pi]^m$ , приходим к следующему результату:

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ -i \sum_{k=1}^m b_k \varphi_k \right\} \prod_{j=1}^n \sum_{k=0}^{K_j} \exp \left\{ ik \sum_{i=1}^m a_{ij} \varphi_i \right\} d\varphi_1 \dots d\varphi_m.$$

Для применения полученной формулы к определению числа целочисленных неотрицательных решений системы диофантовых уравнений (6), (7) перенумеруем неизвестные  $x_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ , с помощью одного индекса  $k$  построено слева направо и сверху вниз. Это соответствие для  $k = 1, \dots, mn$  задаётся правилом:  $\nu_{n,m}(k) = (i, j)$ , если  $k = (i-1)n + j$ .

Следовательно, задача (6), (7) допускает представление в виде (8), если положить

$$\mathbf{A} = \|a_{ij} : i = 1, \dots, m+n, j = 1, \dots, mn\|, \quad \mathbf{b} = \|b_i : i = 1, \dots, m+n\|,$$

где для  $i = 1, \dots, m+n$ ,  $j = 1, \dots, mn$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ и } \nu_{n,m}(j) \in \{(i, q) : 1 \leq q \leq n\}, \\ 1, & \text{если } i = m+p, 1 \leq p \leq n \text{ и } \nu_{n,m}(j) \in \{(q, p) : 1 \leq q \leq m\}, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \quad (10)$$

$$b_i = \begin{cases} k_i, & \text{если } 1 \leq i \leq m, \\ r_j, & \text{если } i = m+j, 1 \leq j \leq n. \end{cases} \quad (11)$$

Таким образом, справедлива формула  $f_{m;n}^{k_1, \dots, k_m; r_1, \dots, r_n} = \mathcal{N}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , где матрица  $\mathbf{A}$  и вектор  $\mathbf{b}$  определяются с помощью соотношений (10), (11).

**Пример.** Рассмотрим применение полученных выше формул для решения задачи (6), (7). Пусть  $m = 3$  и  $n = 2$ . Необходимо найти количество всех целых неотрицательных решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = k_1, \\ x_{21} + x_{22} = k_2, \\ x_{31} + x_{32} = k_3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = r_1, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = r_2. \end{cases}$$

Пусть также  $k_1 = 3$ ,  $k_2 = 5$ ,  $k_3 = 2$ ,  $r_1 = 4$  и  $r_2 = 6$ . Очевидно, что условие (7) при этом выполнено. Матрица  $\mathbf{A}$  и вектор  $\mathbf{b}$  имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, количество всех целых неотрицательных решений рассматриваемой системы уравнений даётся формулой

$$f_{3;2}^{3,5,2;4,6} = \frac{1}{(2\pi)^5} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5) d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 d\varphi_4 d\varphi_5 = 11,$$

где

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5) = e^{-i(3\varphi_1 + 5\varphi_2 + 2\varphi_3 + 4\varphi_4 + 6\varphi_5)} \prod_{j=1}^6 F_j(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5),$$

$$\begin{aligned} F_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5) &= 1 + e^{i(\varphi_1 + \varphi_4)} + e^{2i(\varphi_1 + \varphi_4)} + e^{3i(\varphi_1 + \varphi_4)} + e^{4i(\varphi_1 + \varphi_4)} + e^{5i(\varphi_1 + \varphi_4)} + e^{6i(\varphi_1 + \varphi_4)}, \\ F_2(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5) &= 1 + e^{i(\varphi_1 + \varphi_5)} + e^{2i(\varphi_1 + \varphi_5)} + e^{3i(\varphi_1 + \varphi_5)} + e^{4i(\varphi_1 + \varphi_5)} + e^{5i(\varphi_1 + \varphi_5)} + e^{6i(\varphi_1 + \varphi_5)}, \\ F_3(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5) &= 1 + e^{i(\varphi_2 + \varphi_4)} + e^{2i(\varphi_2 + \varphi_4)} + e^{3i(\varphi_2 + \varphi_4)} + e^{4i(\varphi_2 + \varphi_4)} + e^{5i(\varphi_2 + \varphi_4)} + e^{6i(\varphi_2 + \varphi_4)}, \\ F_4(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5) &= 1 + e^{i(\varphi_2 + \varphi_5)} + e^{2i(\varphi_2 + \varphi_5)} + e^{3i(\varphi_2 + \varphi_5)} + e^{4i(\varphi_2 + \varphi_5)} + e^{5i(\varphi_2 + \varphi_5)} + e^{6i(\varphi_2 + \varphi_5)}, \\ F_5(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5) &= 1 + e^{i(\varphi_3 + \varphi_4)} + e^{2i(\varphi_3 + \varphi_4)} + e^{3i(\varphi_3 + \varphi_4)} + e^{4i(\varphi_3 + \varphi_4)} + e^{5i(\varphi_3 + \varphi_4)} + e^{6i(\varphi_3 + \varphi_4)}, \\ F_6(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5) &= 1 + e^{i(\varphi_3 + \varphi_5)} + e^{2i(\varphi_3 + \varphi_5)} + e^{3i(\varphi_3 + \varphi_5)} + e^{4i(\varphi_3 + \varphi_5)} + e^{5i(\varphi_3 + \varphi_5)} + e^{6i(\varphi_3 + \varphi_5)}. \end{aligned}$$

### Заключение

Получены некоторые обобщения понятия числа сочетаний с повторениями. Найдены интегральные формулы для рассматриваемых комбинаторных чисел, применение которых может рассматриваться как альтернатива использованию различных переборных алгоритмов, реализуемых на ЭВМ с помощью языков программирования. Однако использование данных формул приводит к вычислению определённых интегралов; вопросы, связанные с эффективностью реализации операции интегрирования, требуют дальнейшего исследования.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969. 323 с.
2. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов. СПб.: Питер, 2009. 384 с.
3. Петровский А. Б. Пространства множеств и мультимножеств. М.: УРСС, 2003. 248 с.
4. MacMahon P. A. Combinatory analysis. Cambridge: The University Press, 1915. 296 p.
5. Juric Z. and Siljak H. A new formula for the number of combinations and permutations of multisets // Appl. Math. Sci. 2011. V. 5. No. 18. P. 875–881.
6. Заторский Р. А. Подсчет  $m$ -подмультимножеств через их вторичные спецификации // Комбинаторный анализ. Вып. 7. М.: МГУ, 1986. С. 136–145.
7. Поллиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978. 391 с.