ПРИКЛАДНАЯ ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

2013 Теоретические основы прикладной дискретной математики №3(21)

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

DOI 10.17223/20710410/21/1

УДК 519.1

ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЧИСЕЛ СВЯЗНЫХ ПОКРЫТИЙ

Р. М. Ганопольский

Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Россия

E-mail: rodion@utmn.ru

Вводится понятие связных покрытий, рассматриваются производящие функции последовательности комбинаторных чисел, исчисляющих количество связных покрытий конечного множества подмножествами с заданными мощностями и свойствами. Проведён анализ производящих функций, приведены примеры преобразований, получен ряд рекуррентных соотношений.

Ключевые слова: *покрытие, связное покрытие, конечное множество, подмножества, комбинаторные числа, производящие функции, связные графы.*

Введение

В работе [1] введены комбинаторные числа неупорядоченных покрытий конечного множества мощности n подмножествами с фиксированными мощностями

$$ {}_nN(k_1, k_2, \ldots, k_n), \tag{1}$$

где k_i — количество подмножеств мощности i в покрытии. В случае, когда часть коэффициентов $k_i = 0$, используется альтернативное обозначение

$$ {}_nN^{k_1 k_2 \cdots k_m}_{l_1\, l_2 \cdots l_m}, $$

где k_i — количество подмножеств мощности l_i в покрытии. Для введённых комбинаторных чисел получена формула

$$ {}_nN^{k_1 k_2 \cdots k_m}_{l_1\, l_2 \cdots l_m} = \prod_{i=1}^{m} C^{k_i}_{C_n^{l_i}} + \sum_{i\geqslant 1} (-1)^i C_n^i \prod_{j=1}^{m} C^{k_j}_{C_{n-i}^{l_j}}, $$

где $C_j^i = \dfrac{j!}{i!(j-i)!}$ — биномиальный коэффициент, и соотношение

$$ \sum_{i\geqslant 0} C_n^i \, {}_{n-i}N^{k_1 k_2 \cdots k_m}_{l_1\, l_2 \cdots l_m} = \prod_{i=1}^{m} C^{k_i}_{C_n^{l_i}}. $$

В случае, когда в (1) $k_n = 1$, получим ${}_nN(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, 1) = \prod\limits_{i=1}^{n-1} C^{k_i}_{C_n^i}$. Кроме того, принято, что ${}_0N_0^0 = 1$, то есть число покрытий пустого множества нулевым количеством пустых подмножеств равно 1.

В работе [2] рассматриваются производящие функции последовательности чисел (1): обычная —

$$F(x; A_1, A_2, A_3, \ldots) = \sum_{j\geqslant 0} \frac{x^j \prod\limits_{i=1}^{j} (1+A_i)^{C_j^i}}{(1+x)^{j+1}}$$

и экспоненциальная —

$$E(x; A_1, A_2, A_3, \ldots) = e^{-x} \sum_{j\geqslant 0} \frac{x^j}{j!} \prod_{i=1}^{j} (1+A_i)^{C_j^i}. \tag{2}$$

Числа (1) в этих функциях являются коэффициентами перед мономами $x^n \prod\limits_i A_i^{k_i}$ в случае обычной производящей функции и перед выражением $\dfrac{x^n}{n!} \prod\limits_i A_i^{k_i}$ — в случае экспоненциальной.

В работе [2] получено соотношение между производными производящей функции по A_1 и x:

$$x\left(E + \frac{\partial E}{\partial x}\right) = \frac{\partial E}{\partial A_1}(1+A_1). \tag{3}$$

Заменяя все переменные A_i одной переменной A, получаем экспоненциальную производящую функцию для последовательности чисел k-покрытий (покрытия, содержащие ровно k подмножеств [3]):

$$E(x; A) = e^{-x} \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}(1+A)^{2^n-1} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{2^n-1} A^k \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j C_n^j C_{2^{n-j}-1}^k, \tag{4}$$

где коэффициент перед $x^n A^k/n!$ — это количество k-покрытий множества мощности n.

При $A = 1$ получаем экспоненциальную производящую функцию последовательности чисел покрытий множества мощности n [3, 4]:

$$E(x; 1) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j 2^{2^{n-j}-1}. \tag{5}$$

1. Связные покрытия и производящие функции

Каждому покрытию можно поставить в соответствие двудольный граф, где одна часть вершин соответствует элементам множества, а другая — подмножествам, входящим в покрытие [1]. По аналогии со связными графами [5, 6] введём понятие связного покрытия: покрытие является связным, если соответствующий ему двудольный граф является связным, — а также понятие компоненты связности покрытия: из двудольного графа выделяем компоненту связности и соответствующее ей подмножество, и его покрытие будем называть компонентой связности покрытия. Таким образом, количества компонент связности покрытия и соответствующего ему двудольного графа равны. Покрытие, состоящее из k компонент связности, представляет собой объединение k непересекающихся подсемейств, являющихся связными покрытиями k непересекающихся подмножеств исходного множества, то есть совокупность пар (множество, покрытие) можно разбить на k независимых непересекающихся частей.

Рассмотрим классы покрытий со следующим свойством: если покрытие, состоящее из k компонент связности, входит в один из этих классов, то в этот же класс входит каждая компонента связности. Такими классами покрытий являются: все неповторяющиеся покрытия (покрытия, подмножества которых различны); минимальные покрытия (покрытия, из которых нельзя изъять ни одного подмножества так, чтобы оно осталось покрытием исходного множества) [3]; антицепи (покрытия, никакое подмножество которых не является подмножеством другого) [3]; разбиения (покрытия, где каждый элемент множества принадлежит только одному подмножеству из покрытия); покрытия, где каждый элемент принадлежит как минимум двум подмножествам из покрытия, и т. п. Согласно экспоненциальной теореме, экспоненциальные производящие функции чисел связных покрытий $f(x)$ связаны с экспоненциальными производящими функциями чисел покрытий $E(x)$ следующими соотношениями [5]:

$$E(x) = e^{f(x)}, \qquad f(x) = \ln\left(E(x)\right). \tag{6}$$

Разложение экспоненциальных производящих функций по степеням связности имеет вид

$$E(x;y) = e^{f(x)y}, \tag{7}$$

где выражение $\dfrac{1}{k!}(f(x))^k$ перед y^k является производящей функцией последовательности чисел покрытий, состоящих из k компонент связности. Число всех m-покрытий множества мощности n (${}_nN_m$) является суммой всех чисел m-покрытий этого же множества, состоящих из k компонент связности (${}^k_n\tilde{N}_l$) [5]:

$${}_nN_m = \sum_{k=0}^{m} {}^k_n\tilde{N}_m,$$

а число всех покрытий множества мощности n равно сумме всех чисел покрытий этого множества, состоящих из k компонент связности:

$${}_nN = \sum_{k=0}^{n} {}^k_n\tilde{N}. \tag{8}$$

Коэффициент при нулевой степени y в (7) равен 1, то есть пустое покрытие пустого множества является покрытием, состоящим из 0 компонент связности. Если пустое покрытие пустого множества не входит в класс покрытий (примером может служить класс покрытий, в которых каждый элемент принадлежит как минимум двум подмножествам из покрытия), то соотношение (6) будет иметь вид $E(x) = e^{f(x)} - 1$, а выражение (7) — $E(x) = e^{f(x)y} - 1$.

2. Анализ производящих функций

В работе [2] показано, что если произвольная производящая функция чисел покрытий является сложной функцией от экспоненциальной производящей функции (5), то производящая функция чисел покрытий с фиксированными числом и мощностями подмножеств будет сложной функцией от функции (2):

$$f(x; A_1, A_2, A_3, \ldots) = \ln\left(E(x; A_1, A_2, A_3, \ldots)\right).$$

Эквивалентное равенство справедливо и для экспоненциальных производящих функций последовательности чисел k-покрытий:

$$f(x; A) = \ln\left(E(x; A)\right).$$

Используя явные выражения для экспоненциальных производящих функций (2), получим соответствующие выражения для производящих функций связных покрытий:

$$f(x; A_1, A_2, A_3, \ldots) = \ln\left(\sum_{j\geqslant 0} \frac{x^j}{j!} \prod_{i=1}^{j} (1+A_i)^{C_j^i}\right) - x, \tag{9}$$

$$f(x; A) = \ln\left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{2^n-1} C_{2^n-1}^k A^k\right) - x.$$

Приравнивая A_i для всех $i > 1$ нулю, получим

$$f(x; A_1) = A_1 x. \tag{10}$$

Подставив в соотношение (3) выражение (6), получим соотношение между частными производными функции f:

$$x\left(1 + \frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial A_1}(1 + A_1). \tag{11}$$

Разлагая (2) по степеням x и A_i, получим

$$f(x; A_1, A_2, \ldots) = P_1(A_1)x + P_2(A_1, A_2)\frac{x^2}{2!} + P_3(A_1, A_2, A_3)\frac{x^3}{3!} + \cdots, \tag{12}$$

где P_i — некие полиномы от переменных A_i. Из (10) следует, что $P_1(A_1) = A_1 x$ и $P_i(A_1, 0, \ldots, 0) = 0$. Подставляя (12) в (11) и учитывая (10), получаем, что производящая функция чисел связных покрытий f имеет вид

$$f(x; A_1, A_2, \ldots) = A_1 x + p_2(A_2)\frac{(1+A_1)^2 x^2}{2!} + p_3(A_2, A_3)\frac{(1+A_1)^3 x^3}{3!} + \cdots,$$

где p_i — полиномы, свободные члены которых равны нулю.

Все неповторяющиеся покрытия можно разделить на два непересекающихся класса: антицепи и покрытия, в которых хотя бы одно множество включает в себя другое множество этого покрытия (назовём их не-антицепи). Таким образом, сумма производящих функций последовательности чисел не-антицепей G и антицепей H равна

$$E(x, A) = H(x, A) + G(x, A).$$

Покрытие, состоящее из k компонент связности, является не-антицепью, если хотя бы одна компонента связности покрытия является не-антицепью. Воспользовавшись для E и H соотношением (6), получим выражение для G:

$$G(x, A) = e^{h(x,A)}\left(e^{g(x,A)} - 1\right),$$

где g — производящая функция связных не-антицепей, а h — связных антицепей.

3. Рекуррентные соотношения

Получим систему рекуррентных соотношений для комбинаторных чисел неповторяющихся связных k-покрытий. Умножим левые части (4) на $(1 + A)$ и найдём производную по A:

$$\frac{\partial}{\partial A}\left((1+A)E(x, A)\right) = e^{-x}\sum_{n\geqslant 0}\frac{2^n x^n}{n!}(1+A)^{2^n-1} = e^x E(2x, A).$$

С другой стороны, $\dfrac{\partial}{\partial A}\left((1+A)E(x,A)\right) = (1+A)\dfrac{\partial E(x,A)}{\partial A} + E(x,A)$.

Продифференцируем выражение (6): $\dfrac{\partial E(x,A)}{\partial A} = e^{f(x)}\dfrac{\partial f(x,A)}{\partial A}$, выразим производную $f(x,A)$ через производную $E(x,A)$ и подставим полученное ранее соотношение

$$\frac{\partial f(x,A)}{\partial A} = e^x e^{f(2x,A)-f(x,A)} - A\frac{\partial f(x,A)}{\partial A} - 1. \tag{13}$$

В левой части (13) коэффициент перед мономом $A^k x^n/n!$ — число связных $(k+1)$-покрытий множества мощности n, а в правой части коэффициент перед таким же мономом содержит числа связных покрытий множеств мощности не больше n, в которых меньше k подмножеств [2, 7]. Используя разложение экспоненты в ряд Тейлора

$$e^x e^{f(2x,A)-f(x,A)} = \sum_{l=0}\frac{x^l}{l!}\sum_{m=0}\frac{1}{m!}\left(\sum_{n=0}\sum_{k=0}\frac{(2x)^n - x^n}{n!}{}_n\tilde{N}_k\right)^m,$$

получим явный вид системы рекуррентных соотношений

$${}_n\tilde{N}_{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{m=1}^{n-l}\left(\sum_{\substack{\sum i=n-l\\ \sum j=k}}\frac{n!}{(n-l)!}\frac{{}_{i_1}\tilde{N}_{j_1}}{i_1!}(2^{i_1}-1)\cdots\frac{{}_{i_m}\tilde{N}_{j_m}}{i_m!}(2^{i_m}-1)\right) - \frac{k}{k+1}({}_n\tilde{N}_k),$$

где в скобках — сумма по всем возможным комбинациям натуральных чисел $i_1 \dots i_m$ и $j_1 \dots j_m$, таких, что

$$\sum i = i_1 + \dots + i_m = n-l, \quad \sum j = j_1 + \dots + j_m = k.$$

Другая система соотношений показывает связь между числом покрытий, состоящих из k компонент связности, и числами связных покрытий. Найдём производную по y от обеих частей выражения (7):

$$\frac{\partial E(x;y)}{\partial y} = f(x)e^{f(x)y} = f(x)E(x;y).$$

Приравнивая в обеих частях коэффициенты перед мономами $x^n y^k$ и учитывая (8), получим соотношения $(k>0)$

$$({}^{k+1}_{n}\tilde{N}) = \frac{1}{k+1}\sum_{l=1}^{n-k} C_l^n({}^{1}_{l}\tilde{N})({}^{k}_{n-l}\tilde{N}). \tag{14}$$

Система соотношений (14) даёт процедуру получения числа покрытий, состоящих из k компонент связности $(k>1)$, при известных числах связных покрытий: число связных покрытий множества мощности 1 равно числу всех покрытий этого множества; для каждого $n>1$ по формулам (14) получаем все числа покрытий, состоящих из k компонент связности $(k>1)$; по формуле

$${}_n\tilde{N} = {}_nN - \sum_{k=2}^{n}{}^{k}_{n}\tilde{N}$$

вычисляем числа связных покрытий.

Заключение

В работе введены понятия связных покрытий и компонент связности покрытий, приведены выражения для экспоненциальных производящих функций последовательности чисел связных покрытий и показаны основные их свойства. На примере неповторяющихся покрытий рассмотрено, как с помощью преобразований выражений для производящих функций последовательности чисел связных покрытий можно получать рекуррентные соотношения. Получено несколько систем рекуррентных соотношений, на основе одной из них приведён последовательный алгоритм получения чисел связных покрытий и k-покрытий.

Использование связных покрытий и производящих функций последовательности чисел связных покрытий позволяет снизить объём вычислений чисел покрытий различных классов, среди которых минимальные покрытия и покрытия-антицепи, широко используемые в вычислениях количества булевых функций, в том числе монотонных [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ганопольский Р. М.* Число неупорядоченных покрытий конечного множества подмножествами фиксированного размера // Прикладная дискретная математика. 2010. №4(10). С. 5–17.
2. *Ганопольский Р. М.* Производящие функции последовательности чисел покрытий конечного множества // Прикладная дискретная математика. 2011. №1(11). С. 5–13.
3. *Macula A. J.* Covers of a finite set // Mathematics Magazine. 1994. V. 67. No. 2. P. 141–144.
4. *Comtet L.* Advanced combinatorics. The art of finite and infinite expansions. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company, 1974.
5. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. М.: Мир, 2005.
6. *Харари Ф.* Теория графов. М.: УРСС, 2003.
7. *Ландо С. К.* Лекции о производящих функциях. М.: МЦНМО, 2002.