ПРИКЛАДНАЯ ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

2013 Теоретические основы прикладной дискретной математики №3(21)

DOI 10.17223/20710410/21/3

УДК 519.7

О НАДСТРУКТУРЕ КЛАССА КВАЗИОДНОРОДНЫХ k-ЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

В. Б. Ларионов

ООО «Атес Медика Софт», г. Москва, Россия

E-mail: VitalyBLarionov@yandex.ru

Рассматривается фрагмент решётки замкнутых классов функций многозначной логики — надструктура класса, являющегося обобщением класса однородных функций. Доказано, что никаких классов, содержащих класс квазиоднородных функций, кроме классов квазисамодвойственных функций и их пересечений, не существует.

Ключевые слова: *многозначная логика, решётка замкнутых классов, самодвойственные функции.*

Введение

Известно [1], что решётка замкнутых относительно операции суперпозиции классов функций k-значной логики для любого $k \geqslant 3$ содержит континуальное число классов. Данный факт делает практически невозможным описание указанной решётки при $k \geqslant 3$, поэтому впоследствии изучались лишь её фрагменты. К указанному направлению и принадлежит данная работа. Автором развивается техника, разработанная в [2], для описания надструктуры классов, обладающих определёнными свойствами, с помощью которой изучается надструктура класса квазиоднородных функций, являющегося обобщением класса однородных функций. Данная техника использует предикатный подход и позволяет перейти от формул из предикатов к графам.

1. Основные понятия

Обозначим через E_k множество $\{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Определение 1. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *функцией k-значной логики* ($k \geqslant 2$), если она определена на E_k^n и все её значения принадлежат E_k.

Будем использовать следующие стандартные обозначения [3]. Множество всех функций k-значной логики обозначим P_k. Для любого подмножества A из P_k через $[A]$ будем обозначать замыкание относительно операции суперпозиции (для функций везде далее будет идти речь именно об этом типе замыкания). Для краткости везде далее под термином «класс» будем подразумевать именно замкнутый класс.

Определение 2. Для данного класса A *надструктурой* будем называть множество классов, строго содержащих класс A.

Пусть на множестве E_k задана некоторая подстановка σ.

Определение 3. Функция k-значной логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *самодвойственной относительно подстановки σ*, если выполнено следующее тождество:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sigma^{-1}(f(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))),$$

где через σ^{-1} обозначается подстановка, обратная к σ.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ № 13-01-00684-а.

Известно [4], что множество всех функций из P_k, самодвойственных относительно σ, является замкнутым классом. Обозначим этот класс через S_σ.

Определение 4. Замкнутый класс функций, равный пересечению всех классов самодвойственных функций, называется *классом однородных функций*. Будем обозначать указанный класс через S_k.

Определение 5. Пусть $p(x_1, \ldots, x_m)$ — некоторый предикат, определённый на E_k^m, $f(y_1, \ldots, y_n)$ — функция из множества P_k. Будем говорить, что функция $f(y_1, \ldots, y_n)$ *сохраняет предикат* $p(x_1, \ldots, x_m)$, если для любых n наборов $\tilde{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{im})$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, удовлетворяющих предикату p, набор $f(a_{11}, \ldots, a_{n1}), \ldots, f(a_{1m}, \ldots, a_{nm})$ также удовлетворяет предикату p. По определению будем считать, что тождественно ложный предикат сохраняет любая функция.

Обозначим через $\mathrm{Pol}(p)$ множество функций, сохраняющих предикат p. Для произвольного множества функций A через $\mathrm{Inv}(A)$ обозначим множество предикатов, каждый из которых сохраняет любая функция из A.

На множестве предикатов вводятся следующие операции: конъюнкция, отождествление переменных, добавление квантора существования по какой-либо переменной (проекция). Для произвольного множества предикатов P через $[P]$ будем обозначать замыкание относительно указанных операций. Подробное определение этих операций можно найти в [5, 3].

Лемма 1 [5]. Если $p_1 \in [p_2]$, то $\mathrm{Pol}(p_2) \subseteq \mathrm{Pol}(p_1)$.

Лемма 2 [6]. Пусть $p = p_1 \& \ldots \& p_m$, где предикаты $p_1, \ldots, p_m$ не имеют общих переменных. Тогда $\mathrm{Pol}(p) = \bigcap\limits_{i=1}^{m} \mathrm{Pol}(p_i)$.

2. Классы самодвойственных и квазисамодвойственных функций

Обобщим определение классов самодвойственных функций, заменив подстановку на множестве E_k на взаимно однозначное отображение некоторых подмножеств множества E_k.

Итак, пусть A и B — произвольные непустые подмножества E_k одинаковой мощности. Обозначим через F_{AB} множество всех различных взаимно однозначных отображений множества A во множество B, а через F_k — объединение множеств F_{AB} для всевозможных пар подмножеств A и B указанного вида. Для $f \in F_{AB}$ обозначим $D_f = A$, $T_f = A \bigcup B$.

Для произвольного отображения $f \in F_k$ обозначим через $R_f(x_1, x_2)$ предикат, истинный на всех парах $(a, f(a))$, где $a \in D(f)$, и только на них.

Определение 6. Замкнутые классы функций $S_f = \mathrm{Pol}(R_f)$, где $f \in F_k$, будем называть классами квазисамодвойственных функций, а сами функции, входящие в указанные классы, — квазисамодвойственными. Отметим, что, согласно данному определению, все классы самодвойственных функций [4] (в случае $D_f = E_k$, f — не тождественная подстановка), а также класс P_k (в случае $D_f = E_k$, f — тождественная подстановка на множестве E_k) являются классами квазисамодвойственных функций. Если f — тождественная подстановка на D_f, где $D_f \neq E_k$, то S_f — предполный центральный класс [6].

По аналогии с классом однородных функций, равным пересечению всех классов самодвойственных функций, определим класс квазиоднородных функций KS_k как пересечение всех классов квазисамодвойственных функций.

Класс KS_k можно задать и через предикаты. Пусть R_{KS} — множество всех предикатов R_f, где $f \in F_k$. Тогда $KS_k = \mathrm{Pol}(R_{KS})$.

В работе [7] установлено, что не все классы квазисамодвойственных функций содержат класс однородных функций, то есть класс KS_k строго содержится в классе однородных функций. Возникает вопрос, какие ещё классы, кроме классов квазисамодвойственных функций, содержат класс KS_k? В данной работе даётся ответ на поставленный вопрос.

Лемма 3. Пусть замкнутый класс A содержит класс KS_k. Тогда $\mathrm{Inv}(A) \subseteq [R_{KS}]$.

Доказательство. Из $KS_k \subseteq A$ с учетом антимонотонности оператора Inv [5] получаем $\mathrm{Inv}(A) \subseteq \mathrm{Inv}(KS_k) = \mathrm{Inv}\,\mathrm{Pol}(R_{KS})$.

Обозначим через $d(x_1, x_2)$ предикат, являющийся двухместной диагональю ($d(a, b) = $ $=$ `true` тогда и только тогда, когда $a = b$). Отметим, что $d \in R_{KS}$, поскольку $d = R_f$, где $f \in F_k$ — тождественное отображение множества E_k в себя. С учетом сказанного из [5] следует $\mathrm{Inv}\,\mathrm{Pol}(R_{KS}) = [R_{KS}]$, откуда $\mathrm{Inv}(A) \subseteq [R_{KS}]$. ■

3. Формулы над R_{KS}

Предположим, что предикат p реализуется над R_{KS} формулой F. Везде далее будем считать, что в формуле F вынесены вперёд все кванторы существования. Сопоставим F ориентированный граф $G(F)$ по следующему правилу: между множеством вершин $G(F)$ и множеством переменных F (учитываем и свободные, и связанные) существует взаимно однозначное соответствие. Вершину, соответствующую переменной x, пометим символом «x», если переменная x свободная, и «$\exists x$», если связанная. Данную вершину будем обозначать v_x. В графе $G(F)$ есть ориентированное ребро (v_x, v_y) с пометкой «f_i» тогда и только тогда, когда в формуле F содержится запись $R_{f_i}(x, y)$.

Отметим, что по графу формулы $G(F)$ формула F с вынесенными вперёд кванторами существования восстанавливается однозначно.

Определение 7. *Путём* из вершины v_1 в вершину v_2 в ориентированном графе G будем называть любую последовательность рёбер вида

$$\{(v_1, w_1), (w_1, w_2), (w_2, w_3), \ldots, (w_m, v_2)\},$$

вершины и рёбра в которой могут повторяться. Ориентация рёбер последовательности может быть любой. *Замкнутым путём* называется путь, в котором первая и последняя вершины совпадают.

Для произвольного пути S в графе определим величину $L(S) \in F_k \cup \{f_0\}$, где f_0 — пустое отображение, т. е. L ставит в соответствие пути некоторое взаимно однозначное отображение подмножеств (возможно, пустых) множества E_k. При этом для пути, состоящего из одного ребра (v_1, v_2) с пометкой f_i, положим $L(\{(v_1, v_2)\}) = f_i$, $L(\{(v_2, v_1)\}) = f_i^{-1}$. Для пути $S = \{(w_1, w_2), (w_2, w_3), \ldots, (w_{m-1}, w_m)\}$ положим

$$L(S) = L(\{(w_{m-1}, w_m)\})L(\{(w_{m-1}, w_{m-2})\}) \ldots L(\{(w_1, w_2)\}).$$

То есть, $L(S)$ — композиция отображений в обратном порядке.

Непосредственно из определений графа формулы и величины L следует

Лемма 4. Пусть предикат p реализуется над R_{KS} формулой F с графом $G(F)$. Тогда для любого набора $\tilde{a}$, такого, что $p(\tilde{a}) =$ `true`, и для двух произвольных вершин графа v_{y_1}, v_{y_2}, соединённых путём S и таких, что переменные y_1, y_2 принимают на наборе $\tilde{a}$ значения b и c соответственно, справедливо $c = (L(S))(b)$.

Для произвольной вершины v_y графа формулы $G(F)$ через T_y обозначим множество элементов $a \in E_k$, таких, что

1) для любого пути S из v_y в некоторую вершину v_z существует $L(S)(a)$;
2) для любого замкнутого пути S, проходящего через вершину v_y, справедливо $a = (L(S))(a)$.

Докажем далее основное свойство формул, которое позволит нам редуцировать множество $[R_{KS}]$, тем самым сделав прозрачной надструктуру класса KS_k.

Лемма 5. Пусть предикат p реализуется над R_{KS} формулой F с множеством свободных переменных $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и со связным графом $G(F)$. Пусть между любыми двумя вершинами v_{x_i}, v_{x_j} в G_F существует путь S_{ij}, такой, что $L(S_{ij}) = f_{ij}$, $i, j \in \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда $p(\tilde{a}) = \mathtt{true}$ тогда и только тогда, когда для некоторого $i \in \{1, \ldots n\}$ справедливо:

1) $a_i \in T_{x_i}$;
2) $a_j = f_{ij}(a_i)$ для любых $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Доказательство. Пусть набор $\tilde{a}$ таков, что $p(\tilde{a}) = \mathtt{true}$. Предположим, что для некоторого i справедливо $a_i \notin T_{x_i}$. Если нарушено первое требование из определения величины T_y, то в графе G_F найдётся вершина v_z, такая, что для переменной z на наборе $\tilde{a}$ не найдётся подходящего значения, откуда $p(\tilde{a}) = \mathtt{false}$. Если же нарушено второе требование, то существует замкнутый путь S, проходящий через вершину v_{x_i}, такой, что $L(S) = f$ и $f(a_i) \neq a_i$. Получаем противоречие с леммой 4. Справедливость соотношения $a_j = f_{ij}(a_i)$ вытекает непосредственно из леммы 4.

Пусть теперь набор $\tilde{a}$ таков, что перечисленные в лемме два условия выполнены. Покажем, что $p(\tilde{a}) = \mathtt{true}$.

Пусть i — число из $\{1, \ldots, n\}$, для которого выполняются условия леммы. Рассмотрим произвольную вершину v_y графа $G(F)$. Поскольку указанный граф связный, то существует путь S_1 от вершины v_{x_i} до v_y. Пусть $L(S_1) = f_1$. Присвоим переменной y значение $b = f_1(a_i)$ (согласно первому пункту определения T_y, это значение существует). Пусть S_2 — некоторый путь из v_{x_i} в v_y, отличный от S_1, и $L(S_2) = f_2$. Покажем, что $b = f_2(a_i)$, т. е. найденное значение b не зависит от выбора пути. Соединением путей S_1 и S_2 можно получить замкнутый путь S_3, проходящий через вершину v_{x_i}. При этом $L(S_3) = f_2 f_1^{-1}$. Поскольку $a_i \in T_{x_i}$, то $f_2 f_1^{-1}(a_i) = a_i$, откуда $f_1(a) = f_2(a)$. В силу доказанного и второго условия леммы все переменные x_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, при данном присвоении примут значения a_j.

Покажем, что на присвоенных значениях каждый сомножитель $R_f(y_l, y_j)$ формулы F истинен, т. е. $p(\tilde{a}) = \mathtt{true}$. Предположим, что при проведённом выше присвоении переменные y_l, y_j приняли соответственно значения b_l и b_j. Это означает, что из вершины v_{x_i} существуют пути S', S'' до вершин v_{y_l}, v_{y_j} соответственно, при этом $L(S') = f'$, $L(S'') = f''$ и $b_l = f'(a_i)$, $b_j = f''(a_i)$. Сомножитель $R_f(y_l, y_j)$ формулы F соответствует ребру (v_{y_l}, v_{y_j}) графа $G(F)$, $L(\{(v_{y_l}, v_{y_j})\}) = f$. Соединением указанного ребра с путями S' и S'' получим замкнутый путь S, проходящий через вершину v_{x_i}, такой, что $L(S) = f''^{-1} f f'$. Из $a_i \in T_{x_i}$ следует $f''^{-1} f f'(a_i) = a_i$, откуда $f f'(a_i) = f''(a_i)$, или $f(b_l) = b_j$. Получаем, что $R_f(b_l, b_j) = \mathtt{true}$. ■

4. Надструктура класса KS_k

Докажем основной результат данной работы.

Теорема 1. Надструктура класса квазиоднородных функций KS_k состоит только из классов квазисамодвойственных функций и их пересечений.

Доказательство. То, что указанные в формулировке теоремы классы входят в надструктуру класса KS_k, следует непосредственно из определения класса квазиоднородных функций. Покажем далее, что никакие другие классы не содержатся в этой надструктуре.

Рассмотрим некоторый класс A, содержащий KS_k. Возьмём произвольный предикат p из множества $\mathrm{Inv}(A)$. По лемме 3 выполняется $p \in [R_{KS}]$. Обозначим через F формулу, реализующую p над множеством R_{KS}, $G(F)$ — её граф. Рассмотрим сначала случай, когда $G(F)$ связен.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — все свободные переменные формулы F. Поскольку граф $G(F)$ связен, то существуют пути $S_2, \ldots, S_n$ от вершины v_{x_1} до вершин $v_{x_2}, \ldots, v_{x_n}$ соответственно. Обозначим $f_j = L(S_j)$, $H = T_{x_1}$.

Если местность n предиката p равна единице, то по лемме 5 получаем $p(a) = \mathtt{true}$ тогда и только тогда, когда $a \in H$. В этом случае $\mathrm{Pol}(p)$ либо совпадает с P_k (если $H = E_k$), либо является предполным центральным классом. При этом $\mathrm{Pol}(p) = \mathrm{Pol}(R_f)$, где f — тождественное отображение множества H в себя. Таким образом, $\mathrm{Pol}(p)$ является классом квазисамодвойственных функций.

Пусть теперь $n = 2$. По лемме 5 $p(a, b) = \mathtt{true}$ тогда и только тогда, когда $a \in A$ и $b = f_2(a)$. Получаем, что $p = R_f$, где f — взаимно однозначное отображение, определённое на множестве H и совпадающее на нём с отображением f_2, т. е. $\mathrm{Pol}(p)$ — класс квазисамодвойственных функций.

Остаётся случай $n > 2$. Обозначим предикаты

$$p_i(x_1, x_i) = \exists y_1 \ldots, y_{n-2} p(x_1, y_1, \ldots, y_{i-2}, x_i, y_{i-1}, \ldots, y_{n-2}),$$

где $i \in \{2, \ldots, n\}$. Получаем, что $p_i \in [p]$, откуда $p_i \in [R_{KS}]$. Предикаты p_i попадают в уже рассмотренный случай (граф формулы, реализующей p_i, можно получить из графа G_F перепомечиванием вершин, поэтому он связный), т. е. классы $\mathrm{Pol}(p_i)$ являются классами квазисамодвойственных функций. Рассмотрим предикат $p'(x_1, \ldots, x_n) = p_2(x_1, x_2) \& p_3(x_1, x_3) \& \ldots \& p_n(x_1, x_n)$. Пусть набор $\tilde{a}$ таков, что $p(\tilde{a}) = \mathtt{true}$. Получаем, что $p_i(a_1, a_i) = \mathtt{true}$ для всех i, откуда $p'(\tilde{a}) = \mathtt{true}$. Обратно, пусть $p'(\tilde{a}) = \mathtt{true}$, следовательно, все $p_i(a_1, a_i) = \mathtt{true}$. Отсюда имеем, что $a_1 \in H$, $a_i = f_i(a_1)$ для всех $i \in \{2, \ldots, n\}$. По лемме 5 получаем, что $p(\tilde{a}) = \mathtt{true}$. Окончательно имеем $p' = p$.

Итак, получили представление

$$p(x_1, \ldots, x_n) = p_2(x_1, x_2) \& p_3(x_1, x_3) \& \ldots \& p_n(x_1, x_n).$$

Обозначим через t предикат, равный конъюнкции предикатов $p_2, \ldots, p_n$ без отождествления переменных. Из последнего соотношения следует, что $p \in [t]$ (p получается из t отождествлением переменных). С другой стороны, из $p_i \in [p]$ следует, что $t \in [p]$. По лемме 1 получаем, что $\mathrm{Pol}(p) = \mathrm{Pol}(t)$. По лемме 2 класс $\mathrm{Pol}(t)$, а значит и $\mathrm{Pol}(p)$, является пересечением классов $\mathrm{Pol}(p_i)$, т. е. классов квазисамодвойственных функций.

Пусть теперь G_F — несвязный граф. Каждая компонента связности G_F очевидным образом задаёт свой предикат, для которого справедливы приведённые выше рассуждения. Предикат p является конъюнкцией (без отождествления переменных) указанных предикатов. Опять получаем [6], что $\mathrm{Pol}(p)$ — некоторое пересечение классов квазисамодвойственных функций. ■

Заключение

Итак, никаких классов, содержащих класс квазиоднородных функций, кроме классов квазисамодвойственных функций и их пересечений, не существует. Можно сказать, что класс KS_k находится в решётке замкнутых классов достаточно неглубоко.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Янов Ю. И., Мучник А. А.* О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // ДАН СССР. 1959. Т. 127. № 1. С. 44–46.
2. *Ларионов В. Б.* Замкнутые классы k-значной логики, содержащие классы монотонных или самодвойственных функций: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2009. 157 с.
3. *Марченков С. С.* Замкнутые классы булевых функций. М.: Физматлит, 2000.
4. *Яблонский С. В.* Функциональные построения в k-значной логике // Тр. МИАН им. В. А. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5–142.
5. *Боднарчук В. Г., Калужнин В. А., Котов В. Н., Ромов Б. А.* Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика. 1969. № 3. С. 1–10; № 5. С. 1–9.
6. *Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Набебин А. А.* Предполные классы в многозначных логиках. М.: Изд. дом МЭИ, 1997.
7. *Ларионов В. Б., Федорова В. С.* Замкнутые классы, содержащие класс однородных функций // Вестник МГУ. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2012. № 1. С. 34–38.