ПРИКЛАДНАЯ ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

2013 Теоретические основы прикладной дискретной математики №3(21)

DOI 10.17223/20710410/21/4

УДК 512.572

ОБ ЭКСПОНЕНТАХ НЕКОТОРЫХ МНОГООБРАЗИЙ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБР

С. М. Рацеев

Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск, Россия

E-mail: RatseevSM@mail.ru

Пусть UT_s — алгебра верхнетреугольных матриц порядка s. Приводятся эквивалентные условия для оценок роста подмногообразий многообразия $var(UT_s)$, многообразий алгебр Лейбница с нильпотентным коммутантом и многообразий алгебр Лейбница — Пуассона, идеалы тождеств которых содержат тождества вида $\{\{x_1, y_1\}, \ldots, \{x_n, y_n\}\} = 0$, $\{x_1, y_1\} \cdot \ldots \cdot \{x_n, y_n\} = 0$.

Ключевые слова: *многообразие линейных алгебр, рост многообразия, экспонента многообразия.*

Алгебра Лейбница над полем K — векторное пространство с K-билинейной операцией умножения $\{,\}$, относительно которого выполнено тождество Лейбница

$$\{\{x, y\}, z\} = \{\{x, z\}, y\} + \{x, \{y, z\}\},$$

превращающее правое умножение в дифференцирование этой алгебры. При этом заметим, что если в алгебре Лейбница выполняется тождество $\{x, x\} = 0$, то она является алгеброй Ли.

Векторное пространство A над полем K с двумя K-билинейными операциями умножения $\cdot$ и $\{,\}$ называется алгеброй Лейбница — Пуассона, если относительно операции $\cdot$ пространство A является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей, относительно операции $\{,\}$ — алгеброй Лейбница и для любых $a, b, c \in A$ данные операции связаны правилами

$$\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b, \quad \{c, a \cdot b\} = a \cdot \{c, b\} + \{c, a\} \cdot b.$$

Алгебры Лейбница — Пуассона возникают в различных разделах алгебры, дифференциальной геометрии, топологии, современной теоретической физики и являются обобщениями алгебр Пуассона.

Пусть V — некоторое многообразие линейных алгебр над полем K (необходимые сведения о многообразиях PI-алгебр можно найти, например, в [1, 2]), $K(X, V)$ — свободная алгебра многообразия V, где $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — счётное множество свободных образующих; $P_n(V)$ — подпространство в $K(X, V)$, состоящее из всех полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Обозначим

$$c_n(V) = \dim P_n(V), \quad \exp(V) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{c_n(V)}.$$

Хорошо известно, что в ассоциативном случае при $\operatorname{char} K = 0$ экспонента произвольного нетривиального многообразия существует и является целым числом (М. В. Зайцев и А. Джамбруно [3]). В случае многообразий алгебр Ли при $\operatorname{char} K = 0$ построен пример разрешимого многообразия [4], экспонента которого находится в интервале (3,4).

Напомним, что в случае основного поля нулевой характеристики S_n-модуль $P_n(V)$ является вполне приводимым и разложение его характера в целочисленную комбинацию неприводимых характеров имеет следующий вид:

$$\chi_n(V) = \chi(P_n(V)) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(V)\chi_\lambda. \qquad (1)$$

Обозначим через V_s^A многообразие ассоциативных алгебр, определённое тождеством

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] \dots [x_{2s-1}, x_{2s}] = 0,$$

где $[,]$ — операция коммутирования. В работах [5, 6], в частности, показано, что для любого многообразия ассоциативных алгебр V над произвольным полем $\exp(V \cap V_s^A)$ существует и является целым числом. Пусть $UT_s = UT_s(K)$ — алгебра верхнетреугольных матриц порядка s. Хорошо известно [7], что при $\operatorname{char} K = 0$ алгебра UT_s порождает многообразие V_s^A.

Пусть V_s^L — многообразие алгебр Лейбница, определённое тождеством

$$\{x_1, x_2\}\{x_3, x_4\} \dots \{x_{2s+1}, x_{2s+2}\} = 0.$$

В работе [8] показано, что для любого многообразия алгебр Лейбница V над произвольным полем $\exp(V \cap V_s^L)$ существует и является целым числом.

Обозначим через V_s^{LP} многообразие алгебр Лейбница — Пуассона, определённое всеми полилинейными тождествами степени $2s$ вида

$$\{\{x_{11}, y_{11}\}, \{x_{12}, y_{12}\}, \dots, \{x_{1\lambda_1}, y_{1\lambda_1}\}\} \cdot \{\{x_{21}, y_{21}\}, \{x_{22}, y_{22}\}, \dots, \{x_{2\lambda_2}, y_{2\lambda_2}\}\} \cdot \dots$$
$$\dots \cdot \{\{x_{k1}, y_{k1}\}, \{x_{k2}, y_{k2}\}, \dots, \{x_{k\lambda_k}, y_{k\lambda_k}\}\} = 0, \quad \lambda \vdash s.$$

Например, многообразие V_4^{LP} определяется полилинейными тождествами

$$\begin{gathered}
\{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_3, y_3\}, \{x_4, y_4\}\} = 0,\\
\{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_3, y_3\}\} \cdot \{x_4, y_4\} = 0,\\
\{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}\} \cdot \{\{x_3, y_3\}, \{x_4, y_4\}\} = 0,\\
\{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}\} \cdot \{x_3, y_3\} \cdot \{x_4, y_4\} = 0,\\
\{x_1, y_1\} \cdot \{x_2, y_2\} \cdot \{x_3, y_3\} \cdot \{x_4, y_4\} = 0.
\end{gathered}$$

В работе [9] показано, что для любого многообразия алгебр Лейбница — Пуассона V над произвольным полем $\exp(V \cap V_s^{LP})$ существует и является целым числом. Заметим, что если в многообразии алгебр Лейбница — Пуассона выполнены полилинейные тождества вида

$$\{\{x_1, y_1\}, \dots, \{x_n, y_n\}\} = 0, \quad \{x_1, y_1\} \cdot \dots \cdot \{x_n, y_n\} = 0,$$

то для некоторого s данное многообразие является подмногообразием в V_s^{LP}.

Теорема 1. Пусть характеристика основного поля равна нулю, V^A — многообразие ассоциативных алгебр, V^L — многообразие алгебр Лейбница, V^{LP} — многообразие алгебр Лейбница — Пуассона и d — некоторое неотрицательное целое число. Тогда для любого значения $a = A, L, LP$ следующие условия эквивалентны:

1) $\exp(V^a \cap V_{d+1}^a) \leqslant d$;
2) для любого целого $s > d$ выполнено неравенство $\exp(V^a \cap V_s^a) \leqslant d$;

3) существует такая константа C, что в сумме (1) $m_\lambda(V^a \cap V^a_{d+1}) = 0$ в случае, если выполнено условие $n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_d) > C$;
4) для любого целого $s > d$ существует такая константа $C = C(s)$, что в сумме (1) $m_\lambda(V^a \cap V^a_s) = 0$ в случае, если выполнено условие $n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_d) > C$.

Доказательство. При $a = A$ утверждение теоремы следует из работы [6], при $a = L$ — из работ [8, 10], при $a = LP$ — из работ [9, 11]. ■

Теорема 2. Пусть для некоторого многообразия линейных алгебр V^a, $a \in \{A, L, LP\}$, над полем нулевой характеристики и некоторого целого неотрицательного d выполнено равенство $\exp(V^a \cap V^a_{d+1}) = d$. Тогда для любого целого $s > d$ выполнено равенство $\exp(V^a \cap V^a_s) = d$.

Доказательство. Так как для любого s выполнено неравенство $\exp(V^a \cap V^a_s) \leqslant \leqslant \exp(V^a \cap V^a_{s+1})$, то для любого целого $s > d$, с учётом теоремы 1, выполнено двойное неравенство $d \leqslant \exp(V^a \cap V^a_s) \leqslant d$. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бахтурин Ю. А.* Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985. 448 с.
2. *Drensky V.* Free algebras and PI-algebras. Graduate course in algebra. Singapore: Springer Verlag, 2000. 272 c.
3. *Giambruno A. and Zaicev M. V.* On codimention growth of finitely generated associative algebras // Adv. Math. 1998. V. 140. P. 145–155.
4. *Zaitcev M. V. and Mishchenko S. P.* Example of variety of Lie algebras with fractional exponent // J. Math. Sci. 1999. V. 93. No. 6. P. 977–982.
5. *Petrogradsky V. M.* Exponents of subvarieties of upper triangular matrices over arbitrary fields are integral // Serdika Math. 2000. V. 26. No. 2. P. 1001–1010.
6. *Рацеев С. М.* Тождества в многообразиях, порожденных алгебрами верхнетреугольных матриц // Сиб. матем. журн. 2011. Т. 54. №2. С. 416–429.
7. *Мальцев Ю. Н.* Базис тождеств алгебры верхнетреугольных матриц // Алгебра и логика. 1971. Т. 10. С. 393–400.
8. *Рацеев С. М.* Рост некоторых многообразий алгебр Лейбница // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2006. Т. 46. №6. С. 70–77.
9. *Ratseev S. M.* Growth of some varieties of Leibniz — Poisson algebras // Serdica Math. J. 2011. V. 37. No. 4. P. 331–340.
10. *Рацеев С. М.* Оценки роста многообразий алгебр Лейбница с нильпотентным коммутантом // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2010. Т. 78. №4. С. 65–72.
11. *Рацеев С. М., Череватенко О. И.* Экспоненты некоторых многообразий алгебр Лейбница — Пуассона // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2013. Т. 104. №3. С. 42–52.