

## ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

DOI 10.17223/20710410/21/7

УДК 519.17

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ОРГРАФОВ С ТРЕМЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ  
ДУГАМИ В МИНИМАЛЬНОМ ВЕРШИННОМ 1-РАСШИРЕНИИ

М. Б. Абросимов, О. В. Моденова

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия***E-mail:** mic@rambler.ru

Описаны все оргграфы, минимальное вершинное 1-расширение которых имеет в точности три дополнительных ребра.

**Ключевые слова:** *граф, минимальное вершинное 1-расширение, точное вершинное 1-расширение, оптимальная отказоустойчивая реализация.*

## Введение

*Ориентированным графом* (далее — *орграфом*) называется пара  $\vec{G} = (V, \alpha)$ , где  $V$  — конечное непустое множество, называемое множеством вершин, а  $\alpha$  — отношение на множестве вершин  $V$ , называемое отношением смежности. Граф с симметричным и антирефлексивным отношением смежности называется *неориентированным графом*. Далее используются основные понятия преимущественно в соответствии с работой [1].

*Симметризацией* орграфа  $\vec{G} = (V, \alpha)$  называется неорграф  $G = (V, (\alpha \cup \alpha^{-1}) \setminus \Delta)$ , то есть симметризация орграфа получается заменой дуг рёбрами и удалением петель.

Граф  $G^* = (V^*, \alpha^*)$  называется *минимальным вершинным  $k$ -расширением* (МВ- $k$ Р)  $n$ -вершинного графа  $G = (V, \alpha)$ , если выполняются следующие условия:

- 1) граф  $G^*$  является вершинным  $k$ -расширением  $G$ , то есть граф  $G$  вложим в каждый подграф графа  $G^*$ , получающийся удалением любых его  $k$  вершин;
- 2) граф  $G^*$  содержит  $n + k$  вершин, то есть  $|V^*| = |V| + k$ ;
- 3)  $\alpha^*$  имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Построение МВ- $k$ Р можно представить как добавление к исходному графу  $k$  дополнительных вершин и некоторого числа дополнительных рёбер. Это число дополнительных рёбер иногда называют *рёберной стоимостью* (edge cost) и обозначают  $ec(G, k)$ .

Граф  $G^*$  называется *точным вершинным  $k$ -расширением* (ТВ- $k$ Р) графа  $G$ , если граф  $G$  изоморфен каждому подграфу графа  $G^*$ , получающемуся из него удалением любых его  $k$  вершин и всех связанных с ними дуг (рёбер).

В данной работе рассматривается случай  $k = 1$ .

Понятие МВ- $k$ Р введено на основе понятия оптимальной  $k$ -отказоустойчивой реализации, которое предложено Хейзом в работе [2]. Оказалось, что задача является вычислительно сложной [3]. Исследования данной проблемы развивались в двух направлениях. Основное направление — поиск минимальных расширений для интересных классов графов: цепей, циклов, деревьев. Второе — описание графов, минимальные расширения которых имеют заданное число дополнительных дуг или рёбер. В работе [4] исследована задача описания неориентированных графов с  $ec(G, 1) \leq 3$ . Получены следующие результаты (теоремы 1–5).

**Теорема 1.** МВ- $k$ Р, причём единственное с точностью до изоморфизма, вполне несвязного  $n$ -вершинного графа  $O_n$  есть вполне несвязный  $(n + k)$ -вершинный граф  $O_{n+k}$ . Никакие другие графы не могут иметь МВ- $k$ Р с нулевым числом дополнительных рёбер.

**Теорема 2.** Графы со степенным множеством  $\{1, 0\}$ , и только они, имеют МВ-1Р с одним дополнительным ребром, причём это расширение единственно с точностью до изоморфизма.

**Теорема 3.** Среди связных графов только цепи имеют МВ-1Р с двумя дополнительными рёбрами, причём это расширение единственно с точностью до изоморфизма.

**Теорема 4.** Среди несвязных графов без изолированных вершин только графы вида  $P_n \cup C_{n+1} \cup \dots \cup C_{n+1}$  при  $n > 1$  имеют МВ-1Р с двумя дополнительными рёбрами, причём это расширение имеет вид  $C_{n+1} \cup C_{n+1} \cup \dots \cup C_{n+1}$ , и оно единственно с точностью до изоморфизма.

**Теорема 5.** Связные графы, имеющие МВ-1Р с тремя дополнительными рёбрами, могут иметь только следующий вид:

- 1) полный граф  $K_3$ ;
- 2) графы с вектором степеней вида  $(3, \dots, 3, 2, 2, 2)$ , имеющие ТВ-1Р;
- 3) графы с вектором степеней  $(3, 3, 3, \dots, 3, 2, \dots, 2, 1)$  особого вида.

В данной работе изучается аналогичный вопрос для ориентированных графов. В [5] показана связь между МВ-1Р неориентированных и ориентированных графов.

**Лемма 1.** Пусть оргграф  $G^*$  есть МВ- $k$ Р оргграфа  $G$ . Тогда симметризация оргграфа  $G^*$  является вершинным  $k$ -расширением симметризации оргграфа  $G$ .

**Следствие.** Число дополнительных дуг МВ- $k$ Р оргграфа  $G$  не меньше числа дополнительных рёбер МВ- $k$ Р симметризации оргграфа  $G$ .

В работе [6] удалось полностью описать оргграфы с  $es(G, 1) \leq 2$ . Далее рассмотрим случай  $es(G, 1) = 3$ .

### Основные результаты

Рассмотрим только связные оргграфы без петель.

**Лемма 2.** В симметризации МВ-1Р ориентаций цепей вершины степени 3 не могут быть смежны с тремя вершинами степени 2.

**Доказательство.** Допустим, от противного, что есть МВ-1Р некоторой ориентации цепи и его симметризация имеет вершину степени 3, смежную с тремя вершинами степени 2. Тогда, удалив эту вершину степени 3, получим три вершины степени 1. Очевидно, что цепь сюда вложить нельзя. ■

**Теорема 6.** Не существует ориентаций цепей с числом вершин  $n > 4$ , таких, что их МВ-1Р имеет три дополнительных дуги.

**Доказательство.** Рассматривать гамильтоновы цепи здесь не будем, потому что выше доказано, что такие цепи имеют МВ-1Р с двумя дополнительными дугами.

В симметризации МВ-1Р цепи не может быть вершин со степенью меньше 2. По условию теоремы, МВ-1Р должно иметь три дополнительные дуги. Построить МВ-1Р с тремя дополнительными дугами можно по одной из схем на рис. 1 (на иллюстрации ориентации дуг не указаны).

По лемме 2 схемы  $d$  и  $e$  не являются МВ-1Р цепи.

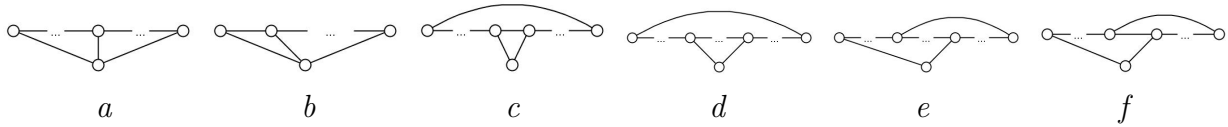
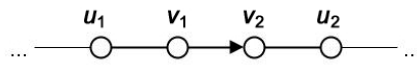


Рис. 1. Схемы построения МВ-1Р для цепи

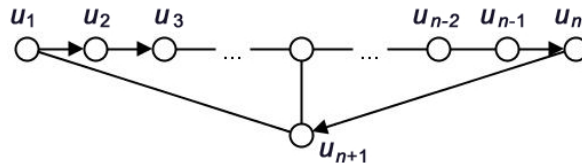
Будем считать, что в цепи 7 или более вершин. Для 5- и 6-вершинных цепей непосредственной проверкой можно убедиться, что для них МВ-1Р с тремя дополнительными дугами не существует.

Рассмотрим первую схему. Выберем две вершины в этой схеме ( $v_1$  и  $v_2$ , рис. 2), суммы полустепеней исхода и захода у которых равны 2.

Рис. 2. Схема а, дуга из  $v_1$  в  $v_2$ 

Пусть дуга между  $v_1$  и  $v_2$  направлена так, как изображено на рис. 2. Ориентации остальных дуг не имеют значения. Тогда при удалении вершины  $u_1$  получим, что один конец цепи имеет полустепени  $(1,0)$ . А если удалим  $u_2$ , то получим, что второй конец цепи имеет полустепень  $(0,1)$ . Аналогично и для других схем.

Р а с с м о т р и м с х е м у а. Пусть концы этой цепи имеют следующие полустепени:  $u_1 — (1,0)$ ,  $u_n — (0,1)$ . Рассмотрим дугу между  $u_2$  и  $u_3$ . Предположим, что она идёт из  $u_2$  в  $u_3$ . Удалим вершину  $u_{n-2}$ . Тогда  $u_{n-1}$  становится концом  $(1,0)$  и, следовательно, дуга из  $u_n$  направлена в  $u_{n+1}$  (рис. 3).

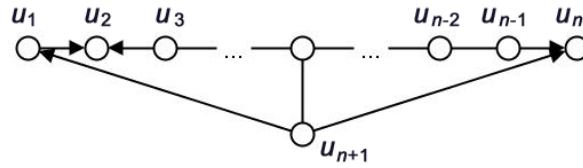
Рис. 3. Схема а, дуга из  $u_n$  в  $u_{n+1}$ 

И так далее — с помощью удаления вершин определяем, как должны быть ориентированы дуги цепи. В итоге получим, что цепь гамильтонова. Гамильтоновы цепи имеют МВ-1Р с двумя дополнительными дугами, поэтому данная схема не подходит.

Теперь предположим, что дуга идет из  $u_3$  в  $u_2$  (рис. 4). Тогда в цепи вторая вершина — сток. Удалим  $u_{n-3}$ ; вершина  $u_{n-2}$  теперь не может быть концом  $(1,0)$ , потому что с ней должна быть смежна вершина-сток, а из  $u_{n-1}$  уже выходит одна дуга. Значит, вершина  $u_{n-2}$  после удаления  $u_{n-3}$  имеет полустепени  $(0,1)$ .

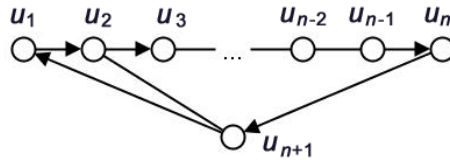
Удалим вершину  $u_{n-2}$ . Тогда  $u_{n-1}$  станет концом  $(1,0)$ , а  $u_n$  должна быть стоком, то есть дуга направлена из  $u_{n+1}$  в  $u_n$ . И так далее, удаляя вершины, будем определять направления дуг. В результате получим, что все вершины цепи — источники или стоки. Отсюда следует, что в цепи чётное число вершин, потому что концы цепи разные.

Определим направление дуги между  $u_{n+1}$  и  $u_1$ . Для этого удалим, например,  $u_{n-1}$ . Тогда получаем, что дуга направлена из  $u_{n+1}$  в  $u_1$ .

Рис. 4. Схема *a*, дуга из  $u_{n+1}$  в  $u_1$ 

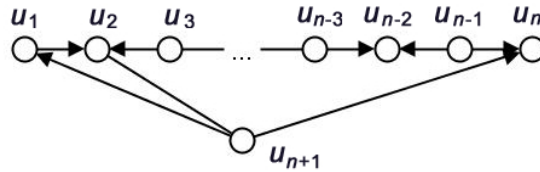
В данном случае цепь будет строиться как  $u_n - u_{n+1} - u_1 - u_2 -$  и т. д., но в такой цепи вершина  $u_1$  не сток и не источник. Получили противоречие. Следовательно, данная схема не подходит.

Р а с с м о т р и м с х е м у *b*. Пусть концы этой цепи имеют следующие полустепени:  $u_1 - (1,0)$ ,  $u_n - (0,1)$ . Рассмотрим дугу между  $u_2$  и  $u_3$ . Предположим, что она идёт из  $u_2$  в  $u_3$ . Удалим вершину  $u_{n-2}$ . Тогда  $u_{n-1}$  становится концом  $(1,0)$  и, следовательно, дуга из  $u_n$  направлена в  $u_{n+1}$  (рис. 5).

Рис. 5. Схема *b*, дуга из  $u_n$  в  $u_{n+1}$ 

И так далее — с помощью удаления вершин определяем, как должны быть ориентированы дуги цепи. И в итоге получим, что цепь гамильтонова. Гамильтоновы цепи имеют МВ-1Р с двумя дополнительными дугами, поэтому данная схема не подходит.

Теперь предположим, что дуга идет из  $u_3$  в  $u_2$  (рис. 6). Тогда в цепи вторая вершина — сток. Удалим  $u_{n-3}$ . Вершина  $u_{n-2}$  теперь не может быть концом  $(1,0)$ , потому что с ней должна быть смежна вершина-сток, а из  $u_{n-1}$  уже выходит одна дуга. Значит, вершина  $u_{n-2}$  после удаления  $u_{n-3}$  имеет полустепени  $(0,1)$ .

Рис. 6. Схема *b*, дуга из  $u_{n+1}$  в  $u_1$ 

Теперь удалим вершину  $u_n$ , и так далее. В результате получим, что цепь должна состоять только из стоков и источников. У цепи концы разные, поэтому вершин в ней должно быть чётное количество.

Удалим вершину  $u_{n-2}$ . Тогда  $u_{n-1}$  станет концом  $(1,0)$ , а  $u_n$  должна быть стоком, т.е. дуга направлена из  $u_{n+1}$  в  $u_n$ . Удалим  $u_{n-1}$  и получим направление ещё одной дуги — дуга из  $u_{n+1}$  направлена в  $u_1$ .

В данном случае цепь будет строиться как  $u_n - u_{n+1} - u_1 - u_2 -$  и т. д., но в такой цепи вершина  $u_1$  не сток и не источник. Получили противоречие. Следовательно, данная схема не подходит.

Р а с с м о т р и м с х е м у с. Пусть концы этой цепи имеют следующие полустепени:  $u_1 - (1,0)$ ,  $u_n - (0,1)$ . Удалим первую вершину  $u_1$ . Второй конец цепи останется прежним, значит, ребро  $\{u_2, u_3\}$  направляем из  $u_2$  в  $u_3$ :  $(u_2, u_3)$ . И так далее. Получим в итоге, что цепь должна быть гамильтоновой, а гамильтоновы цепи имеют МВ-1Р с двумя дополнительными дугами. Значит, данная схема не подходит.

Р а с с м о т р и м с х е м у f. Пусть концы этой цепи имеют следующие полустепени:  $u_1 - (1,0)$ ,  $u_n - (0,1)$ . Рассмотрим дугу между  $u_2$  и  $u_3$ . Предположим, что она идёт из  $u_2$  в  $u_3$  (рис. 7). Если удалить вершину  $u_{n-2}$ , то получим направление дуги между  $u_n$  и  $u_i$ : из  $u_n$  в  $u_i$ .

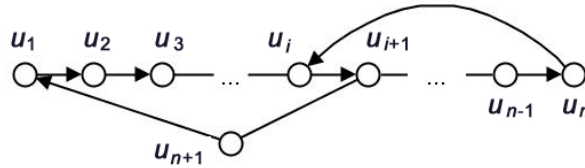


Рис. 7. Схема f, дуга из  $u_n$  в  $u_i$

Если удалить вершину  $u_1$ , то  $u_2$  станет концом  $(1,0)$  и дуга между  $u_3$  и  $u_4$  будет направлена из  $u_3$  в  $u_4$ . И так продолжаем до тех пор, пока не дойдём до  $u_i$ . Имеем, что первые  $i - 1$  дуги направлены «в одну сторону». При удалении вершины  $u_{i-2}$  цепь будет строиться как  $u_{i-1} - u_i - u_n -$  и т. д. Получаем противоречие, потому что дуга направлена из  $u_n$  в  $u_i$ , а по нашему предположению, она должна быть направлена в обратную сторону.

Теперь предположим, что дуга идет из  $u_3$  в  $u_2$  (рис. 8). Тогда в цепи вторая вершина — сток. Удалим вершину  $u_{n-2}$ . Тогда дуга между  $u_n$  и  $u_i$  должна быть направлена из  $u_i$  в  $u_n$ .

Удалим  $u_{n-3}$ . Тогда вершина  $u_{n-2}$  теперь не может быть концом  $(1,0)$ , потому что с ней должна быть смежна вершина-сток, а из  $u_{n-1}$  уже выходит одна дуга. Значит, вершина  $u_{n-2}$  после удаления  $u_{n-3}$  имеет полустепени  $(0,1)$ .

И так далее. В результате получаем, что все вершины цепи должны быть стоками или источниками. Вершин в цепи должно быть чётное число, так как концы цепи разные.

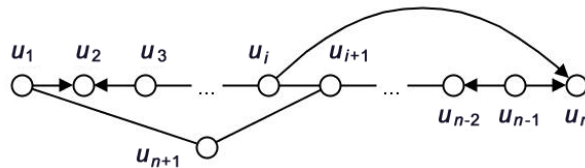


Рис. 8. Схема f, все вершины должны быть стоками или источниками

Рассмотрим дугу из  $u_i$  в  $u_n$ . При удалении вершины  $u_{i+1}$  эта дуга входит в цепь. Вершина  $u_n$  — сток, а вершина  $u_i$  должна быть источником, т. е. рассматриваемая дуга выходит из нее. Если  $u_i$  — сток, то построенный по схеме орграф не является МВ-1Р. Предположим, что  $u_i$  — источник. Тогда  $u_{i+1}$  — сток. Получается противоречие, если удалить  $u_i$  и рассмотреть дугу между  $u_{i+1}$  и  $u_n$ : обе вершины должны быть стоками, так как в них входят дуги. Но рассматриваемая дуга может иметь только одну ориентацию, поэтому можно сделать вывод, что такая схема тоже не подходит для построения МВ-1Р с тремя дополнительными дугами. ■

В работе [7] доказывается следующее утверждение:

**Теорема 7.** Если в точном вершинном 1-расширении связного графа есть сток или источник, то этот граф является транзитивным турниром.

Напомним, что граф называется *кубическим*, если все его вершины имеют степень 3. В п. 2 теоремы 5 упоминаются графы с вектором степеней вида  $(3, \dots, 3, 2, 2, 2)$ , имеющие точное вершинное 1-расширение. Эти точные вершинные 1-расширения имеют вектор степеней  $(3, \dots, 3)$ , то есть являются кубическими графами.

**Теорема 8.** Среди всех ориентаций кубических графов только транзитивный 4-вершинный турнир является точным вершинным 1-расширением.

**Доказательство.** Пусть  $G$  — кубический граф,  $H$  — его ориентация, являющаяся точным вершинным 1-расширением. Рассмотрим, какие степени исхода и захода могут иметь вершины графа  $H$ :  $(0,3)$ ,  $(1,2)$ ,  $(2,1)$  и  $(3,0)$ . С учётом теоремы 7 получаем, что степени  $(0,3)$  и  $(3,0)$  могут быть только у ориентации полного графа в транзитивный турнир. Однако из кубических графов только  $K_4$  является полным.

Пусть  $G$  не изоморфен  $K_4$ . Тогда в  $H$  могут быть только вершины со степенями исхода и захода  $(1,2)$  и  $(2,1)$ . Легко видеть, что их число должно быть одинаковым. В самом деле, если бы это было не так и число вершин вида  $(1,2)$  было  $k_1$ , а вершин вида  $(2,1)$  —  $k_2$ , то число исходящих дуг было бы  $k_1 + 2k_2$ , а входящих —  $2k_1 + k_2$ . Эти числа должны быть равны, то есть  $k_1 + 2k_2 = 2k_1 + k_2$ , откуда  $k_1 = k_2$ .

Итак, в графе  $H$  одинаковое число вершин вида  $(1,2)$  и  $(2,1)$ . Так как  $H$  является точным вершинным 1-расширением, то все его максимальные подграфы изоморфны. Обозначим через  $u$  произвольную вершину вида  $(1,2)$ . Рассмотрим граф, получающийся из  $H$  удалением вершины, в которую идет дуга из вершины  $u$ . В этом графе вершина  $u$  имеет полустепени исхода и захода  $(0,2)$ . Таким образом, в любом максимальном подграфе графа  $H$  должна быть вершина вида  $(0,2)$ . Но такая вершина может получиться только при удалении вершины, в которую идёт дуга из вершины вида  $(1,2)$  графа  $H$ . Следовательно, в каждую вершину графа  $H$  должна идти дуга из подходящей вершины вида  $(1,2)$ . Но это невозможно, так как количество вершин графа  $H$  в 2 раза больше, чем количество исходящих дуг из вершин вида  $(1,2)$ . Таким образом, единственная возможная ориентация кубического графа, являющаяся точным вершинным 1-расширением, — транзитивный 4-вершинный турнир. ■

**Теорема 9.** Среди ориентаций графов из теоремы 5 только граф  $K_3$  имеет такую ориентацию (транзитивный турнир), МВ-1Р которой имеет три дополнительные дуги.

**Доказательство.** Граф из первого случая теоремы 5 — граф  $K_3$ . Известно, что у такого графа есть ориентация — транзитивный турнир, которая имеет МВ-1Р с тремя дополнительными дугами (4-вершинный транзитивный турнир) [8].

Выше доказано, что ориентации графов из второго случая теоремы 5 не имеют МВ-1Р с тремя дополнительными дугами.

Остаётся рассмотреть последний, третий, случай теоремы 5. Это графы с вектором степеней  $(3, 3, 3, \dots, 3, 2, \dots, 2, 1)$  особого вида. В работе [4] даётся описание графов такого вида и их МВ-1Р. Рассмотрим граф  $G$  такого вида и его МВ-1Р — граф  $G^*$ . Граф  $G^*$  должен обладать следующими свойствами:

- 1) степенное множество  $\{3, 2\}$ ;
- 2) количество вершин степени 3 чётно и больше 3;

- 3) вершины степени 2 смежны либо с двумя вершинами степени 3, либо с одной вершиной степени 3 и одной вершиной степени 2, то есть вершины степени 3 соединяются цепью, состоящей не более чем из трёх ребер;
- 4) вершины степени 3 смежны с двумя другими вершинами степени 3, причем граф, индуцированный всеми вершинами степени 3, представляет собой цикл.

То есть граф  $G^*$  можно представить как цикл, образованный вершинами степени 3, с которыми соединены цепи длины 1 или 2 (рис. 9).

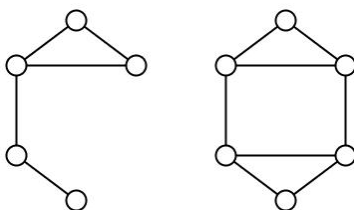


Рис. 9. Пример графа  $G$  и его МВ-1Р  $G^*$

При удалении вершины степени 3 из графа  $G^*$  получим в точности исходный граф  $G$ . Предположим, что существует ориентация графа  $G^*$ , такая, что она является МВ-1Р подходящего графа  $G$  с тремя дополнительными дугами.

Рассмотрим случай, когда граф  $G^*$  представляет собой цикл, в которому присоединены цепи длины 1 (рис. 10).

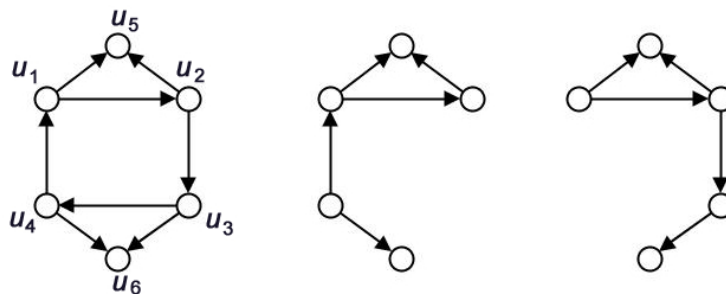


Рис. 10. Пример графа  $G^*$  и подграфы, получающиеся при удалении вершин степени 3

Дуги, инцидентные вершинам  $u_5$  и  $u_6$ , должны быть ориентированы одинаковым образом. Предположим, что вершины  $u_5$  и  $u_6$  — стоки. Цикл может быть ориентирован как гамильтонов либо как негамильтонов. Если цикл гамильтонов, то при удалении  $u_1$  и при удалении  $u_2$  получим неизоморфные графы, что показано на рис. 10.

Если цикл не гамильтонов, то логично предположить, что он должен быть ориентирован таким образом, чтобы удаление  $u_1$  и удаление  $u_2$  давали изоморфные графы. Но по схеме построения МВ-1Р цикл состоит из вершин степени 3, то есть можно найти две такие вершины степени 3, смежные друг с другом, но соединённые с двумя разными цепями. В данном примере это  $u_1$  и  $u_4$ . Если дуга направлена из  $u_4$  в  $u_1$ , то при удалении  $u_2$  и  $u_3$  опять получаем неизоморфные графы.

Аналогично рассматривается предположение, что вершины  $u_5$  и  $u_6$  — источники.

Если вершины  $u_5$  и  $u_6$  имеют полустепени  $(1,1)$ , то при удалении  $u_1$  и удалении  $u_2$  опять получим неизоморфные графы, так как в этих графах  $u_5$  будет иметь разные полустепени —  $(0,1)$  и  $(1,0)$ .

Аналогичным образом рассматривается случай, когда граф  $G^*$  выглядит как цикл, в котором присоединены цепи длины 2.

Таким образом, ориентации графов из третьего случая теоремы 5 также не имеют МВ-1Р с тремя дополнительными дугами. ■

**Теорема 10.** Среди связных оргграфов только четыре имеют МВ-1Р с тремя дополнительными дугами: 3-вершинный транзитивный турнир, две 3-вершинные цепи и одна 4-вершинная цепь.

**Доказательство.** Используя доказанные выше теоремы, получаем, во-первых, что 3-вершинный транзитивный турнир имеет МВ-1Р с тремя дополнительными дугами. Во-вторых, непосредственной проверкой можно убедиться, что среди цепей с числом вершин меньше 5 есть три цепи, имеющие МВ-1Р с тремя дополнительными дугами. Эти графы и их МВ-1Р приведены на рис. 11.



Рис. 11. Графы из теоремы 10 и их МВ-1Р

Теорема доказана. ■

## ЛИТЕРАТУРА

1. Абросимов М. Б. Графовые модели отказоустойчивости. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 192 с.
2. Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C.25. No. 9. P. 875–884.
3. Абросимов М. Б. О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. № 5(88). С. 643–650.
4. Абросимов М. Б. Характеризация графов с заданным числом дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения // Прикладная дискретная математика. 2012. № 1. С. 111–120.
5. Абросимов М. Б. Минимальные вершинные расширения направленных звезд // Дискретная математика. 2011. Т. 23. № 2. С. 93–102.
6. Абросимов М. Б., Моденова О. В. Характеризация оргграфов с малым числом дополнительных дуг минимального вершинного 1-расширения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13. Вып. 2. Ч. 2. С. 3–9.
7. Абросимов М. Б., Долгов А. А. О бесконтурных точных расширениях // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10. Вып. 1. С. 3–9.
8. Абросимов М. Б. Минимальные расширения транзитивных турниров // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2006. № 17. С. 187–190.