

О ПОСТРОЕНИИ ЦИРКУЛЯНТНЫХ СЕТЕЙ РАЗМЕРНОСТИ ЧЕТЫРЕ С МАКСИМАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ВЕРШИН ПРИ ЛЮБОМ ДИАМЕТРЕ

Э. А. Монахова

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

E-mail: emilia@rav.sccc.ru

Рассматривается задача оптимизации неориентированных циркулянтных сетей, состоящая в максимизации числа вершин при заданных степени и диаметре графа. Получена новая нижняя оценка достижимого числа вершин циркулянтных сетей размерности четыре при любых диаметрах. Построены новые бесконечные семейства циркулянтов, достигающих найденной оценки. Для графов найденных семейств получены различные аналитические описания.

Ключевые слова: неориентированные циркулянтные сети, диаметр, максимальный порядок графа.

Введение

Циркулянтные сети (графы) являются графами Кэли абелевых групп и широко изучаются в теории графов и дискретной математике, а также играют важную роль в разнообразных приложениях, в том числе в теории кодирования, распределённых вычислениях, моделировании химических реакций, при построении и анализе топологий сетей (оптических, клеточных, нейронных) и высокопроизводительных мультипроцессорных систем [1–11].

Пусть $s_1, s_2, \dots, s_k, n$ — целые числа, такие, что $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k < n$, и $S = (s_1, s_2, \dots, s_k)$. Неориентированный граф $C(n; S)$ с множествами вершин $V = \{0, 1, \dots, n-1\}$ и рёбер $E = \{(i, j) : |i - j| \equiv s_l \pmod{n}, l = 1, \dots, k\}$ называется *циркулянтным*, числа из множества S — *образующими*, k — *размерностью*, n — *порядком* графа.

Диаметром графа G называется $d(G) = \max_{i, j \in V} d(i, j)$, где $d(i, j)$ — длина кратчайшего пути из вершины i в вершину j графа G .

Пусть $M(d, k)$ для любых натуральных d и k — максимально возможное (достижимое) натуральное n , такое, что существует множество образующих $S = (s_1, s_2, \dots, s_k)$, при котором $d(C(n; S)) \leq d$. Известно [11, 12], что

$$M(d, k) \leq P(d, k) = \sum_{i=0}^k C_k^i C_d^{k-i} 2^{k-i},$$

где верхняя граница $P(d, k)$ может рассматриваться как граница Мура для циркулянтных графов размерности k . Получение точных значений функции $M(d, k)$ для $k \geq 3$ достаточно трудоёмко и сводится к полному перебору параметрических описаний графа. Нижние оценки для $M(d, k)$ в каждом отдельном случае могут зависеть от рассматриваемого диаметра и, как правило, получаются посредством поиска бесконечных семейств графов, достигающих этих оценок [1, 13, 14].

Наиболее полный обзор результатов по оценкам диаметра и достижимого порядка k -мерных, $k \geq 2$, неориентированных циркулянтных графов можно найти в [3]. Более ранние обзоры представлены в работах [1, 2]. Для размерности 2 задача построения циркулянтов с единичной образующей и максимальным порядком $M(d, 2)$, совпадающим с $P(d, 2) = 2d(d + 1) + 1$ при любом диаметре d , решена (для ссылок см. [3]). Для размерности 3 нижняя оценка достижимого порядка циркулянтов последовательно улучшалась в [1, 11, 15]. В [16] найдена экстремальная функция $M(d, 3)$ для любого диаметра d и построены бесконечные семейства трёхмерных циркулянтов с порядком, совпадающим с $M(d, 3)$, вид которой, как оказалось, зависит от класса вычетов d по модулю 3. В [17] доказано, что существует граф Кэли абелевой группы с тремя образующими, который имеет диаметр d и размер, совпадающий с $M(d, 3)$. Следует отметить, что открытые семейства двумерных и трёхмерных циркулянтных сетей успешно применяются в теории кодирования при построении совершенных кодов, исправляющих ошибки. В последнее время для построения таких кодов начали рассматривать четырёхмерные циркулянтные графы и циркулянты более высоких размерностей [5]. Наряду с двух- и трёхмерными циркулянтами, циркулянтные сети размерности 4 также используют как базовые элементы топологии при построении мультипроцессорных кластерных систем [8]. Важно подчеркнуть, что, взятые в качестве сетей связи мультипроцессорных систем, графы с максимальным (или близким к нему) порядком при заданных размерности и диаметре имеют высокие отказоустойчивость и скорость коммуникаций, минимальную задержку и максимальные связность и надёжность.

В данной работе будем исследовать максимально возможные циркулянтные сети размерности четыре с единичной образующей.

Для графов размерности $k \geq 4$ известны следующие результаты. В [11] доказано, что при $n = t^k$, t — нечётное число, графы $C(n; 1, t, \dots, t^{k-1})$ имеют диаметр

$$d = \frac{k}{2}(t - 1) = \frac{k}{2}n^{1/k} - \frac{k}{2}.$$

В частности, $n = d^4/16 + O(d^3)$ для $k = 4$ и диаметра $d \equiv 0 \pmod{4}$. В [9] изучены топологические свойства мультипликативных циркулянтов вида $C(n; 1, t, \dots, t^{k-1})$ с чётным $t \geq 2$ и $n = t^k$ и получен их диаметр

$$d = k\frac{t}{2} - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor.$$

Для $k = 4$ и диаметра $d \equiv 2 \pmod{4}$ снова $n = d^4/16 + O(d^3)$. Эти результаты улучшены в [15]: пусть d и k — любые положительные целые, такие, что $d \geq k \geq 3$, и пусть $t = \lfloor (d - k + 3)/k \rfloor$, тогда

$$M(d, k) \geq 2t \sum_{i=0}^{k-1} (4t)^i = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{k} \right)^k d^k + O(d^{k-1}).$$

Отсюда для размерности четыре $M(d, 4) \geq n = d^4/2 - (3/2)d^3 + O(d^2)$. В [18] оценка функции $M(d, 4)$ из [15] улучшена на $O(3d^3/2)$ для любого нечётного диаметра. В [17] авторы, используя плотное покрытие решётками пространства $\mathbb{Z}^k$, при $k = 4$ нашли следующую оценку:

$$M(d, 4) \geq n = \begin{cases} d^4/2 + d^3 & \text{при чётном } d, \\ 8\lfloor d/2 \rfloor \lceil d/2 \rceil^3 & \text{при нечётном } d. \end{cases}$$

В [19] оценка функции $M(d, 4)$ из [17] улучшена для диаметров $d \equiv 0 \pmod{4}$.

В данной работе в п. 1 получена новая нижняя оценка экстремальной функции $M(d, 4)$ для любых диаметров $d > 1$ и построены бесконечные семейства циркулянтных сетей, достигающих найденной оценки, в п. 2 получены различные аналитические описания для графов найденных семейств, в п. 3 обсуждается проблема получения функции $M(d, 4)$.

1. Новые семейства циркулянтных графов размерности четыре

Теоремы 1 и 2 позволяют улучшить нижнюю оценку функции $M(d, 4)$ соответственно для чётных и нечётных диаметров $d > 1$. Это достигается путём построения бесконечных семейств циркулянтов $\{C(n(d); 1, s_2(d), s_3(d), s_4(d)) : d \geq 2\}$, достигающих найденной оценки.

Теорема 1. Пусть $d \geq 2$ — чётное число, $S = (1, s_2, s_3, s_4)$, где

$$s_2 = d + 1, \quad s_3 = d^3/2 + d^2/2 + d, \quad s_4 = d^3/2 + 3d^2/2 + 3d + 2; \quad (1)$$

$$n = d^4/2 + d^3 + 5d^2/2 + 2d + 1. \quad (2)$$

Тогда $d(C(n; S)) = d$.

Теорема 2. Пусть $d > 1$ — нечётное число, $S = (1, s_2, s_3, s_4)$, где

$$s_2 = d, \quad s_3 = d^3/2 + 3d/2, \quad s_4 = d^3/2 + d^2 + 3d/2 + 1, \quad (3)$$

$$n = d^4/2 + d^3 + 5d^2/2 + 2d + 1.$$

Тогда $d(C(n; S)) = d$.

Пронумеруем вершины циркулянтного графа от 0 до $n-1$. Длину кратчайшего пути из вершины 0 в вершину x обозначим через $D(x) = d(0, x)$, $0 \leq x < n$. Определим $+s_4$ - и $-s_4$ -связи из x , если идти по ним в вершину $x + s_4 \pmod{n}$ (в прямом направлении) или в $x - s_4 \pmod{n}$ (в обратном направлении) соответственно. Аналогично определим $+s_3$ - и $-s_3$ -связи, $+s_2$ - и $-s_2$ -связи и $+1$ - и -1 -связи. Пусть $\Delta = s_4 - s_3$. Кроме шагов длины 1 будем также использовать $\pm\Delta$ -связи длины 2.

Предварительно докажем следующее утверждение.

Лемма 1. В циркулянтном графе $C(n; 1, s_2, s_3, s_4)$ с порядком, заданным (2), и образующими (1) для чётного $d \geq 2$ или (3) для нечётного $d > 1$ любой интервал вершин с номерами $[a, b]$ длины $b - a = \Delta/2$ с суммой $D(a) + D(b) = d$ для чётного d или $D(a) + D(b) = d + 1$ для нечётного d имеет свойство

$$\max_{a \leq x \leq b} D(x) = d. \quad (4)$$

Доказательство. Пусть $D(a) = l$,

$$D(b) = \begin{cases} d - l, & l = 0, \dots, d, \text{ при чётном } d, \\ d + 1 - l, & l = 1, \dots, d, \text{ при нечётном } d. \end{cases}$$

Все вершины с номерами из $[a, b]$ можно достичь либо $+s_2$ - и ± 1 -связями из a , либо $-s_2$ - и ± 1 -связями из b . Номер первой вершины от a , для которой $D(x) = d + 1$ (без учёта $-s_2$ -связей из b), есть

$$x = \begin{cases} a + (d/2 - l)s_2 + d/2 + 1 & \text{при чётном } d, \\ a + (\lceil d/2 \rceil - l)s_2 + \lceil d/2 \rceil & \text{при нечётном } d. \end{cases}$$

С другой стороны, учитывая $-s_2$ -связи из b , имеем

$$x = \begin{cases} b - ls_2 & \text{при чётном } d, \\ b - (l-1)s_2 & \text{при нечётном } d, \end{cases}$$

то есть существует путь длины d в данную вершину. Для остальных вершин с расстоянием до 0, превышающим d , использование $-s_2$ - и ± 1 -связей из b также уменьшает до значения d функцию расстояний до вершины 0. В частности, свойство (4) выполняется, когда $D(a) = D(b) = \lceil d/2 \rceil$. ■

Теперь можем написать общее доказательство к теоремам 1 и 2.

Доказательство теорем 1 и 2. Пусть $d \geq 2$ — целое число. Рассмотрим циркулянтные графы $C(n; 1, s_2, s_3, s_4)$ с порядками n , заданными (2), и образующими s_i , $i = 2, 3, 4$, заданными (1) при чётном d или (3) при нечётном d .

В силу (2) и (1) имеем при чётном d

$$n = (d/2) \sum_{i=1}^4 s_i + 1, \quad n = (d-1)s_4 + \Delta + s_2, \quad s_4 = (d+1)\Delta/2 + s_2,$$

где $s_2 = d+1$; $\Delta = (d+1)^2 + 1 = s_2^2 + 1$.

В силу (2) и (3) имеем при нечётном d

$$n = \lceil d/2 \rceil \sum_{i=1}^4 s_i - s_2, \quad n = ds_4 + \Delta + s_2, \quad s_4 = (d+2)\Delta/2 + s_2,$$

где $s_2 = d$; $\Delta = d^2 + 1 = s_2^2 + 1$.

Заметим, что числовые значения s_2 (а также Δ) равны для двух взятых последовательно чётных и нечётных значений d .

Требуется доказать, что $D(x) \leq d$ для любой вершины $0 \leq x < n$. Поскольку циркулянтные графы являются вершинно-транзитивными, достаточно рассмотреть вершины с номерами $0 \leq x \leq (n-1)/2$. Удобнее рассмотреть вершины с номерами $0 \leq x \leq \lceil d/2 \rceil s_4 > (n-1)/2$.

В графе $C(n; 1, s_2, s_3, s_4)$ справедливо соотношение

$$[0, \lceil d/2 \rceil s_4] = \bigcup_{i=1}^{\lceil d/2 \rceil} (A_i \cup B_i \cup C_i),$$

где $A_i = [(i-1)s_4, (i-1)s_4 + s_2]$; $B_i = [(i-1)s_4 + s_2, is_3]$; $C_i = [is_3, is_4]$.

1. Пусть $x \in \bigcup_{i=1}^{\lceil d/2 \rceil} C_i$ и $x_{ik} = is_3 + ks_4$, $y_{ik} = x_{ik} + \Delta/2$. Тогда

$$\bigcup_{i=1}^{\lceil d/2 \rceil} C_i = \bigcup_{i=1}^{\lceil d/2 \rceil} \bigcup_{k=0}^{\lceil d/2 \rceil - i} ([x_{ik}, y_{ik}] \cup [y_{ik}, x_{i-1, k+1}]).$$

Отсюда следует, что $D(x_{ik}) = D(x_{i-1, k+1}) = i + k \leq \lceil d/2 \rceil$ (равенство имеет место при $k = \lceil d/2 \rceil - i$). Так как $y_{ik} = n - (\lceil d/2 \rceil - i)s_3 - (\lceil d/2 \rceil - k)s_4$, имеем

$$D(y_{ik}) = \begin{cases} d - (i + k) & \text{при чётном } d, \\ d + 1 - (i + k) & \text{при нечётном } d. \end{cases}$$

Тем самым

$$D(x_{ik}) + D(y_{ik}) = D(y_{ik}) + D(x_{i-1, k+1}) = \begin{cases} d & \text{при чётном } d, \\ d + 1 & \text{при нечётном } d \end{cases}$$

для всех $i = 1, 2, \dots, \lceil d/2 \rceil$ и $k = 0, 1, \dots, \lceil d/2 \rceil - i$. Таким образом, интервалы $[x_{ik}, y_{ik}]$ и $[y_{ik}, x_{i-1, k+1}]$ обладают свойством (4), а значит, $D(x) \leq d$ для любой вершины $x \in \bigcup_{i=1}^{\lceil d/2 \rceil} C_i$.

2. Пусть $x_{ik} = (i-1)s_4 + s_2 + k\Delta$, $y_{ik} = x_{ik} + \Delta/2$ при $k = 0, 1, \dots, \lceil d/2 \rceil - 1 - i$, $x_{i, \lceil d/2 \rceil - i} = is_3 - \Delta/2 = (\lceil d/2 \rceil - 1)s_4 - (\lceil d/2 \rceil - i)s_3 + s_2$, $y_{i, \lceil d/2 \rceil - i} = is_3$.

Тогда

$$\bigcup_{i=1}^{\lceil d/2 \rceil} B_i = \bigcup_{i=1}^{\lceil d/2 \rceil} \left\{ \bigcup_{k=0}^{\lceil d/2 \rceil - 1 - i} ([x_{ik}, y_{ik}] \cup [y_{ik}, x_{i, k+1}]) \cup [x_{i, \lceil d/2 \rceil - i}, y_{i, \lceil d/2 \rceil - i}] \right\}.$$

Так как для всех $x \in [x_{i, \lceil d/2 \rceil - i}, y_{i, \lceil d/2 \rceil - i}]$, $i = 1, \dots, \lceil d/2 \rceil$, имеет место равенство

$$D(x_{i, \lceil d/2 \rceil - i}) + D(y_{i, \lceil d/2 \rceil - i}) = \begin{cases} d & \text{при чётном } d, \\ d+1 & \text{при нечётном } d, \end{cases}$$

данные интервалы вершин обладают свойством (4), а значит, $D(x) \leq d$ для любой вершины $x \in \bigcup_{i=1}^{\lceil d/2 \rceil} [x_{i, \lceil d/2 \rceil - i}, y_{i, \lceil d/2 \rceil - i}]$.

Остаётся рассмотреть случай, когда $x \in \bigcup_{i=1}^{\lceil d/2 \rceil - 1} B_i$ (при $d > 2$). Из определения x_{ik} следует, что $D(x_{ik}) = i + 2k$. Учитывая, что

$$s_2 + \Delta/2 = \lceil d/2 \rceil s_3 - (\lceil d/2 \rceil - 1)s_4,$$

получим $y_{ik} = (\lceil d/2 \rceil - k)s_3 - (\lceil d/2 \rceil - i - k)s_4$ и

$$D(y_{ik}) = \begin{cases} d - i - 2k & \text{при чётном } d, \\ d + 1 - i - 2k & \text{при нечётном } d. \end{cases}$$

Таким образом,

$$D(x_{ik}) + D(y_{ik}) = \begin{cases} d & \text{при чётном } d, \\ d+1 & \text{при нечётном } d \end{cases}$$

для интервалов $[x_{ik}, y_{ik}]$ длины $\Delta/2$. По свойству (4) $D(x) \leq d$ для всех $x_{ik} \leq x \leq y_{ik}$, $i = 1, 2, \dots, \lceil d/2 \rceil - 1$, $k = 0, 1, \dots, \lceil d/2 \rceil - 1 - i$.

Рассмотрим интервалы вершин $[y_{ik}, x_{i, k+1}]$. Имеем

$$x_{i, k+1} = (i-1)s_4 + (k+1)\Delta + s_2, \quad D(x_{i, k+1}) = i + 2k + 2.$$

Отсюда следует, что

$$D(y_{ik}) + D(x_{i, k+1}) = \begin{cases} d+2 & \text{при чётном } d, \\ d+3 & \text{при нечётном } d \end{cases}$$

для всех $i = 1, 2, \dots, \lceil d/2 \rceil - 1$, $k = 0, 1, \dots, \lceil d/2 \rceil - 1 - i$. Разобьём каждый интервал $[y_{ik}, x_{i, k+1}]$ на две части: $[y_{ik}, z_{ik}]$ и $[z_{ik}, x_{i, k+1}]$, где $z_{ik} = x_{i, k+1} - s_2 = (i-1)s_4 + (k+1)\Delta$. Из определения z_{ik} следует, что $D(z_{ik}) = i + 2k + 1$.

Интервал $[y_{ik}, z_{ik}]$ имеет длину, равную $\Delta/2 - s_2$, и

$$D(y_{ik}) + D(z_{ik}) = \begin{cases} d+1 & \text{при чётном } d, \\ d+2 & \text{при нечётном } d. \end{cases}$$

По этой причине для обеспечения условия $D(x) \leq d$ на интервале $[y_{ik}, z_{ik}]$ достаточно использовать $+s_2$ - и ± 1 -связи из y_{ik} и $-s_2$ - и ± 1 -связи из z_{ik} .

На интервале $[z_{ik}, x_{i,k+1}]$ длины s_2 максимум $D(x)$ при использовании ± 1 -связей достигается в вершине $x_0 = x_{i,k+1} - \lfloor d/2 \rfloor$. Но существует путь в данном графе в вершину x_0 из $y_{i,k+1}$, содержащий следующее количество образующих s_2 :

$$\begin{cases} d/2 + 1 & \text{при чётном } d, \\ \lceil d/2 \rceil & \text{при нечётном } d. \end{cases}$$

Поскольку

$$D(y_{i,k+1}) = \begin{cases} d - 1 - D(z_{ik}) & \text{при чётном } d, \\ d - D(z_{ik}) & \text{при нечётном } d, \end{cases}$$

имеем $D(x_0) = \lceil 3d/2 \rceil - D(z_{ik})$. Отсюда $D(x_0) \leq d$ при $D(z_{ik}) \geq \lceil d/2 \rceil$. Нетрудно определить, что $D(x_0) \leq d$ и при $D(z_{ik}) < \lceil d/2 \rceil$. Таким образом, $D(x) \leq d$ для всех $z_{ik} \leq x \leq x_{i,k+1}$.

3. Пусть $x \in A_i$, $i = 1, 2, \dots, \lceil d/2 \rceil$, $A_i = [(i-1)s_4, (i-1)s_4 + s_2] = [x_i, z_i]$.

Так как $D(x_i) = i - 1$, $D(z_i) = i$, возьмём самое большое значение $i = \lceil d/2 \rceil$, для него $\max_{x_i \leq x \leq z_i} D(x) = d$. Тогда $\max_{x_i \leq x \leq z_i} D(x) \leq d$ для всех $i = 1, \dots, \lceil d/2 \rceil$.

4. Строго говоря, там, где получено $D(x) = d$, может быть $D(x) \leq d$. Поэтому остаётся показать, что в данных графах существует хотя бы одна такая вершина x , что $D(x) = d$.

Пусть $d \equiv 0 \pmod{4}$. В качестве искомой вершины возьмем $x = (n-1)/2 = \frac{d}{4}(s_1 + s_2 + s_3 + s_4)$. Видно, что в данную вершину существует путь из 0 длины d . Он же является минимально возможным, так как $x - n = -\frac{d}{4}(s_1 + s_2 + s_3 + s_4) - 1$ даёт путь длины $d+1$ и длины всех других возможных путей из 0 в x не менее d . Следовательно, $D(x) = d$.

В остальных случаях в качестве искомым вершин берем $x = (n+1)/2 = \frac{d+3}{4}s_4 + \frac{d-1}{4}s_3 - \frac{d-1}{4}s_2 - \frac{d-1}{4}$ при $d \equiv 1 \pmod{4}$, $x = (n-1)/2 = \frac{d+2}{4}s_4 + \frac{d-2}{4}s_3 - \frac{d+2}{4}s_2 + \frac{d-2}{4}$ при $d \equiv 2 \pmod{4}$, $x = (n+1)/2 = \frac{d+1}{4}s_4 + \frac{d+1}{4}s_3 + \frac{d+1}{4}s_2 - \frac{d-3}{4}$ при $d \equiv 3 \pmod{4}$. Доказательства аналогичны случаю, когда $d \equiv 0 \pmod{4}$. Теоремы 1 и 2 доказаны.

2. Другие аналитические описания для графов найденных семейств

Для полученного семейства графов с чётными диаметрами из теоремы 1 найдены аналитически другие виды образующих.

Утверждение 1. Пусть d — чётное число, $S^{(2)} = (1, s_2^{(2)}, s_3^{(2)}, s_4^{(2)})$, где

$$s_2^{(2)} = d^2/2 + d + 2, \quad s_3^{(2)} = d^3/2 + d^2/2 + 2d, \quad s_4^{(2)} = d^3/2 + d^2 + 2d + 1, \quad (5)$$

и $n = d^4/2 + d^3 + 5d^2/2 + 2d + 1$. Тогда $d(C(n; S^{(2)})) = d$.

Доказательство. Достаточно показать, что образующие $S^{(2)}$ получаются из образующих S с помощью эквивалентного преобразования [3]. Для этого умножим каждую образующую из $S = (1, s_2, s_3, s_4)$ на $s_3^{(2)}$, поскольку применение алгоритма

Евклида к n и $s_3^{(2)}$ даёт $(n, s_3^{(2)}) = 1$. Образующая $s_1 = 1$ переходит в $s_3^{(2)}$. Образующая s_2 переходит в $s_1^{(2)} = 1$, поскольку $s_2 \cdot s_3^{(2)} = n - 1$. Образующая s_3 переходит в $s_4^{(2)}$, поскольку $s_3 \cdot s_3^{(2)} = (d^2/2 + 1)n - s_4^{(2)}$. Образующая s_4 переходит в $s_2^{(2)}$, поскольку $s_4 \cdot s_3^{(2)} = (d^2/2 + d + 2)n - s_2^{(2)}$. Таким образом, получили изоморфное отображение образующих $(1, s_2, s_3, s_4)$ соответственно в образующие $(s_3^{(2)}, 1, s_4^{(2)}, s_2^{(2)})$. ■

Утверждение 2. Пусть d — чётное число, $S^{(3)} = (1, s_2^{(3)}, s_3^{(3)}, s_4^{(3)})$, где

$$s_2^{(3)} = d^3 + d^2 + 3d + 1, \quad s_3^{(3)} = d^3 + d^2 + 4d + 1, \quad s_4^{(3)} = d^3 + 2d^2 + 4d + 3, \quad (6)$$

и $n = d^4/2 + d^3 + 5d^2/2 + 2d + 1$. Тогда $d(C(n; S^{(3)})) = d$.

Доказательство. Покажем, что образующие $S^{(3)}$ получаются из образующих S с помощью эквивалентного преобразования. Для этого умножим каждую образующую из $S = (1, s_2, s_3, s_4)$ на $s_4^{(3)}$ (применение алгоритма Евклида к n и $s_4^{(3)}$ даёт $(n, s_4^{(3)}) = 1$). Образующая $s_1 = 1$ переходит в $s_4^{(3)}$. Образующая s_2 переходит в $s_2^{(3)}$, так как $s_2 \cdot s_4^{(3)} = 2n + s_2^{(3)}$. Образующая s_3 переходит в 1, так как $s_3 \cdot s_4^{(3)} = (d^2 + d + 1)n - 1$. Образующая s_4 переходит в $s_3^{(3)}$, так как $s_4 \cdot s_4^{(3)} = (d^2 + 3d + 5)n + s_3^{(3)}$. Таким образом, получили изоморфное отображение $(1, s_2, s_3, s_4)$ соответственно в $(s_4^{(3)}, s_2^{(3)}, 1, s_3^{(3)})$. ■

В табл. 1 даны примеры описаний циркулянтов размерности 4 порядка n из теоремы 1 с тремя видами образующих (1), (5), (6).

Т а б л и ц а 1

Описания циркулянтов размерности 4 для чётных диаметров d

d	n	s_1	s_2	s_3	s_4	$s_1^{(2)}$	$s_2^{(2)}$	$s_3^{(2)}$	$s_4^{(2)}$	$s_1^{(3)}$	$s_2^{(3)}$	$s_3^{(3)}$	$s_4^{(3)}$
2	31	1,	3,	8,	18	1,	6,	10,	13	1,	19,	21,	27
4	241	1,	5,	44,	70	1,	14,	48,	57	1,	93,	97,	115
6	967	1,	7,	132,	182	1,	26,	138,	157	1,	271,	277,	315
8	2737	1,	9,	296,	378	1,	42,	304,	337	1,	601,	609,	675
10	6271	1,	11,	560,	682	1,	62,	570,	621	1,	1131,	1141,	1243
12	12481	1,	13,	948,	1118	1,	86,	960,	1033	1,	1909,	1921,	2067
14	22471	1,	15,	1484,	1710	1,	114,	1438,	1597	1,	2983,	2997,	3195
16	37537	1,	17,	2192,	2482	1,	146,	2208,	2337	1,	4401,	4417,	4675
18	59167	1,	19,	3096,	3458	1,	182,	3114,	3277	1,	6211,	6229,	6555

Отметим, что значения Δ , $\Delta^{(2)} = s_4^{(2)} - s_3^{(2)}$ и $\Delta^{(3)} = s_4^{(3)} - s_3^{(3)}$ могут быть получены из формулы

$$n = 2(d^2/2 + 1)M(d/2, 2) + d^2/2 - 1,$$

из которой следует, что $\Delta = 2M(d/2, 2)$; $\lfloor n/\Delta \rfloor = d^2/2 + 1$; $\Delta^{(2)} = d^2/2 + 1$; $\lfloor n/\Delta^{(2)} \rfloor = 2M(d/2, 2)$; $\Delta^{(3)} = d^2 + 2$; $\lfloor n/\Delta^{(3)} \rfloor = M(d/2, 2)$.

Найденные образующие (1), (5), (6) представляют собой полиномы относительно d . Вторые образующие во всех трёх видах — полиномы первой, второй и третьей степеней для образующих (1), (5), (6) соответственно, а третьи и четвертые образующие — полиномы третьей степени. В следующем утверждении все четыре образующие графов рассматриваемого семейства — полиномы третьей степени.

Утверждение 3. Пусть $d > 2$ — чётное число, $S^{(4)} = (s_1^{(4)}, s_2^{(4)}, s_3^{(4)}, s_4^{(4)})$, где $s_1^{(4)} = d^3/2 - 3d^2/2 - d - 3$, $s_2^{(4)} = d^3 + 2d^2 + 6d + 6$, $s_3^{(4)} = d^3 + 3d^2 + 8d + 4$, $s_4^{(4)} = 7d^3/2 + 13d^2/2 + 13d + 5$, и $n = d^4/2 + d^3 + 5d^2/2 + 2d + 1$. Тогда $d(C(n; S^{(4)})) = d$.

Доказательство. Покажем, что образующие $S^{(4)}$ получаются из образующих S с помощью эквивалентного преобразования. Для этого умножим каждую образующую из $S = (1, s_2, s_3, s_4)$ на $s_2^{(4)}$. Образующая $s_1 = 1$ переходит в $s_2^{(4)}$. Образующая s_2 переходит в $s_3^{(4)}$, так как $s_2 \cdot s_2^{(4)} = 2n + s_3^{(4)}$. Образующая s_3 переходит в $s_1^{(4)}$, так как $s_3 \cdot s_2^{(4)} = (d^2 + d + 3)n + s_1^{(4)}$. Образующая s_4 переходит в $s_4^{(4)}$, так как $s_4 \cdot s_2^{(4)} = (d^2 + 3d + 7)n + s_4^{(4)}$. Таким образом, получили изоморфное отображение $(1, s_2, s_3, s_4)$ соответственно в $(s_2^{(4)}, s_3^{(4)}, s_1^{(4)}, s_4^{(4)})$. ■

Отметим, что только при $d = 4$ образующая $s_1^{(4)}$ равна 1.

Для семейства графов с нечётными диаметрами из теоремы 2 также существуют другие аналитические описания образующих.

Утверждение 4. Пусть $d > 1$ — нечётное число, $S^{(2)} = (1, s_2^{(2)}, s_3^{(2)}, s_4^{(2)})$, где

$$s_2^{(2)} = (d^2 + 3)/2, \quad s_3^{(2)} = (d^3 + d^2 + 3d + 1)/2, \quad s_4^{(2)} = d^3/2 + d^2 + 5d/2 + 2, \quad (7)$$

и $n = d^4/2 + d^3 + 5d^2/2 + 2d + 1$. Тогда $d(C(n; S^{(2)})) = d$.

Доказательство. Достаточно показать, что образующие $S^{(2)}$ получаются из образующих S с помощью эквивалентного преобразования. Для этого умножим каждую образующую из $S = (1, s_2, s_3, s_4)$ на $s_4^{(2)}$, поскольку применение алгоритма Евклида к n и $s_4^{(2)} = (n - 1)/d$ даёт $(n, s_4^{(2)}) = 1$. Образующая s_1 переходит в $s_4^{(2)}$. Образующая s_2 переходит в $s_1^{(2)} = 1$, поскольку $s_2 \cdot s_4^{(2)} = n - 1$. Образующая s_3 переходит в $s_2^{(2)}$, поскольку $s_3 \cdot s_4^{(2)} = (d^2 + 3)/2 \cdot n - s_2^{(2)}$. Образующая s_4 переходит в $s_3^{(2)}$, поскольку $s_4 \cdot s_4^{(2)} = (d^2 + 2d + 3)/2 \cdot n + s_3^{(2)}$. Таким образом, получили изоморфное отображение образующих $(1, s_2, s_3, s_4)$ соответственно в образующие $(s_4^{(2)}, 1, s_2^{(2)}, s_3^{(2)})$. ■

Утверждение 5. Пусть $d > 1$ — нечётное число, $S^{(3)} = (1, s_2^{(3)}, s_3^{(3)}, s_4^{(3)})$, где

$$s_2^{(3)} = d^3 + d^2 + 3d, \quad s_3^{(3)} = d^3 + 2d^2 + 4d + 2, \quad s_4^{(3)} = d^3 + 2d^2 + 5d + 3, \quad (8)$$

и $n = d^4/2 + d^3 + 5d^2/2 + 2d + 1$. Тогда $d(C(n; S^{(3)})) = d$.

Доказательство. Покажем, что образующие $S^{(3)}$ получаются из образующих S с помощью эквивалентного преобразования. Умножим каждую образующую из $S = (1, s_2, s_3, s_4)$ на $s_2^{(3)}$ (применение алгоритма Евклида к n и $s_2^{(3)}$ даёт $(n, s_2^{(3)}) = 1$). Образующая $s_1 = 1$ переходит в $s_2^{(3)}$. Образующая s_2 переходит в $s_3^{(3)}$, так как $s_2 \cdot s_2^{(3)} = 2n - s_3^{(3)}$. Образующая s_3 переходит в $s_4^{(3)}$, так как $s_3 \cdot s_2^{(3)} = (d^2 - d + 3)n - s_4^{(3)}$. Образующая s_4 переходит в 1, так как $s_4 \cdot s_2^{(3)} = (d^2 + d + 1)n - 1$. Таким образом, получили изоморфное отображение $(1, s_2, s_3, s_4)$ соответственно в $(s_2^{(3)}, s_3^{(3)}, s_4^{(3)}, 1)$. ■

В табл. 2 приведены примеры описаний циркулянтов размерности 4 порядка n из теоремы 2 с тремя видами образующих (3), (7), (8).

Таблица 2

Описания циркулянтов размерности 4 для нечётных диаметров d

d	n	s_1	s_2	s_3	s_4	$s_1^{(2)}$	$s_2^{(2)}$	$s_3^{(2)}$	$s_4^{(2)}$	$s_1^{(3)}$	$s_2^{(3)}$	$s_3^{(3)}$	$s_4^{(3)}$
3	97	1,	3,	18,	28	1,	6,	23,	32	1,	45,	59,	63
5	511	1,	5,	70,	96	1,	14,	83,	102	1,	165,	197,	203
7	1681	1,	7,	182,	232	1,	26,	207,	240	1,	413,	471,	479
9	4231	1,	9,	378,	460	1,	42,	419,	470	1,	837,	929,	939
11	8977	1,	11,	682,	804	1,	62,	743,	816	1,	1485,	1619,	1631
13	16927	1,	13,	1118,	1288	1,	86,	1203,	1302	1,	2405,	2589,	2603
15	29281	1,	15,	1710,	1936	1,	114,	1823,	1952	1,	3645,	3887,	3903
17	47431	1,	17,	2482,	2772	1,	146,	2627,	2790	1,	5253,	5561,	5579

3. К вопросу об экстремальной функции $M(d, 4)$

Из теорем 1 и 2 следует, что найденная нижняя оценка (2) достижимого числа вершин циркулянтных сетей размерности 4 и любого диаметра $d > 1$ лучше на $O(5d^3/2)$ оценки из [15] и на $O(5d^2/2)$ — оценки из [17]. В табл. 3 приведены результаты сравнения порядков графов найденных семейств и графов из [15, 17] для диаметров $2 \leq d \leq 17$.

Таблица 3

Порядки известных графов и графов новых семейств при равных диаметрах

d	n [15]	n [17]	n	d	n [15]	n [17]	n
2		16	31	3		64	97
4	170	192	241	5	170	432	511
6	170	864	967	7	170	1536	1681
8	170	2560	2737	9	2340	4000	4231
10	2340	6000	6271	11	2340	8640	8977
12	2340	12096	12481	13	11310	16464	16927
14	11310	21952	22471	15	11310	28672	29281
16	11310	36864	37537	17	34952	46656	47431

С помощью программы перебора параметрических описаний циркулянтных графов показано при $k = 4$, что граф порядка $n = 241$ — максимально возможный циркулянтный граф диаметра $d = 4$. Представленные в табл. 4 (табл. 2 из [19]) наборы образующих для данного экстремального графа соответствуют образующим из теоремы 1, утверждений 1, 2 и 3, кроме образующих $(1, 31, 82, 86)$, для которых не удалось найти обобщающего аналитического описания.

В табл. 4 также даны максимально возможные циркулянты для других диаметров, полученные с помощью программы перебора.

Таблица 4

Описания максимальных циркулянтов диаметра d и размерности 4

d	$P(d, 4)$	$n = M(d, 4)$	$S = (s_1, s_2, s_3, s_4)$
1	9	9	(1, 2, 3, 4)
2	41	35	(1, 6, 7, 10), (1, 7, 11, 16)
3	129	99	(1, 24, 39, 44)
4	321	241	(1, 5, 44, 70), (1, 14, 48, 57), (1, 31, 82, 86), (1, 93, 97, 115)
5	681	511	(1, 5, 70, 96), (1, 14, 83, 102), (1, 165, 197, 203)

Формула (2) для порядков циркулянтных графов при $d \equiv 0 \pmod{4}$, как отмечалось в выдвинутой в [19] гипотезе, задаёт значения экстремальной функции $M(d, 4)$ при $d \equiv 0 \pmod{4}$. Вопрос, насколько близко подошли найденные семейства к значениям функции $M(d, 4)$ при других диаметрах, остаётся открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bermond J.-C., Comellas F., and Hsu D. F.* Distributed loop computer networks: a survey // J. Parallel Distributed Comput. 1995. V. 24. P. 2–10.
2. *Hwang F. K.* A survey on multi-loop networks // Theor. Comp. Sci. 2003. No. 299. P. 107–121.
3. *Монахова Э. А.* Структурные и коммуникативные свойства циркулянтных сетей // Прикладная дискретная математика. 2011. № 3(13). С. 92–115.
4. *Нестеренко Б. Б., Новотарский М. А.* Клеточные нейронные сети на циркулянтных графах // Искусственный интеллект. 2009. № 3. С. 132–138.
5. *Martinez C., Beivide R., and Gabidulin E. M.* Perfect codes from Cayley graphs over Lipschitz integers // IEEE Trans. Inform. Theory. 2009. V. 55. No. 8. P. 3552–3562.
6. *Comellas F., Mitjana M., and Peters J. G.* Broadcasting in small-world communication networks // 9th Inter. Coll. on Structural Information and Communication Complexity (SIROCCO 9), 2002. Proc. Informatics. 2002. No. 13. P. 73–85.
7. *Narayanan L., Opatrny J., and Sotteau D.* All-to-all optical routing in chordal rings of degree four // Algorithmica. 2001. V. 31. No. 2. P. 155–178.
8. *Muga F. P., Saldana R. P., and Yu W. E. S.* Building graph-based symmetric cluster // NECTEC Techn. J. 2001. V. 11. No. 9. P. 195–199.
9. *Stojmenovic I.* Multiplicative circulant networks. Topological properties and communication algorithms // Discrete Appl. Math. 1997. No. 77. P. 281–305.
10. *Воробьев В. А.* Простейшие структуры однородных вычислительных систем // Вычислительные системы. Вопросы теории и построения ВС. Новосибирск, 1974. № 60. С. 35–49.
11. *Wong C. K. and Coppersmith D.* A combinatorial problem related to multimodule memory organizations // J. Assoc. Comp. Mach. 1974. No. 21. P. 392–402.
12. *Корнеев В. В.* О макроструктуре однородных вычислительных систем // Вычислительные системы. Вопросы теории и построения ВС. Новосибирск, 1974. № 60. С. 17–34.
13. *Macbeth H., Siagiova J., and Siran J.* Cayley graphs of given degree and diameter for cyclic, Abelian, and metacyclic groups // Discrete Math. 2012. V. 312. No. 1. P. 94–99.
14. *Jia X.-D. and Su W.* Triple loop networks with minimal transmission delay // Int. J. Found. Comp. Sci. 1997. V. 8. No. 3. P. 305–328.
15. *Chen S. and Jia X.-D.* Undirected loop networks // Networks. 1993. No. 23. P. 257–260.
16. *Monakhova E. A.* Optimal triple loop networks with given transmission delay: topological design and routing // Inter. Network Optimization Conf. (INOC'2003), Evry/Paris, France. 2003. P. 410–415.
17. *Dougherty R. and Faber V.* The degree-diameter problem for several varieties of Cayley graphs, 1: the Abelian case // SIAM J. Discrete Math. 2004. V. 17. No. 3. P. 478–519.
18. *Монахова Э. А.* Оптимизация циркулянтных сетей связи размерности четыре // Дискретный анализ и исследование операций. 2008. Т. 15. № 3. С. 58–64.
19. *Монахова Э. А.* Новая достижимая нижняя оценка числа вершин в циркулянтных сетях размерности четыре // Дискретный анализ и исследование операций. 2013. Т. 20. № 1. С. 37–44.