

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

DOI 10.17223/20710410/22/4

УДК 519.171.1+514.17

V-ГРАФЫ И ИХ СВЯЗЬ С ЗАДАЧАМИ
РАЗМЕЩЕНИЯ ФИГУР НА ПЛОСКОСТИ

И. Г. Величко*, А. И. Зинченко**

* Запорожский национальный технический университет, г. Запорожье, Украина

** Запорожский национальный университет, г. Запорожье, Украина

E-mail: wig64@mail.ru, andriver@znu.edu.ua

Изучаются такие расположения двух конгруэнтных фигур на плоскости, при которых они не имеют общих внутренних точек. Прямая, параллельная вектору сдвига, пересекает эти фигуры по двум одинаковым системам интервалов, смещённым на вектор сдвига. Строится ориентированный V_n -граф, вершины которого соответствуют топологически различным вариантам взаимного расположения двух систем из n интервалов, а рёбра — допустимым переходам между вершинами. Вводится понятие W_n -графа как минимального транзитивного графа, содержащего V_n -граф, пополненный истоком. Исследованы свойства V_n - и W_n -графов.

Ключевые слова: размещение фигур на плоскости, ориентированный V_n -граф, W_n -граф, числа Каталана, пути Дика, системы интервалов, конгруэнтные фигуры.

Введение

В задачах, связанных с размещением фигур на плоскости, необходимо уметь определять такие взаимные положения двух фигур из заданного множества, при которых они не имеют внутренних общих точек. Для фигур сложной геометрии наиболее популярными являются методы Ф-функций [1] и No-Fit-полигонов [2]. Для выпуклых многоугольников эффективным является метод опорных прямых [3]. Для однотипных невыпуклых фигур авторами предложен точный метод решения таких задач для многоугольников, не являющихся выпуклыми [4]. В данной работе для исследования вариантов взаимного расположения систем интервалов, полученных в результате сечения двух одинаковых фигур прямой, параллельной вектору трансляции, переводящему одну фигуру в другую, строится так называемый V_n -граф. Его исследование позволяет уточнить трудоёмкость предложенного в [4] алгоритма. Другой аспект связи теории графов и задач взаимного расположения однотипных фигур в полосе освещен в [5].

1. V_n -графы

Пусть n — натуральное число. *Допустимыми* будем называть кортежи (a_1, a_2, \dots, a_n) длины n , состоящие из чисел $1, 2, \dots, n$ и удовлетворяющие двум условиям:

- 1) $a_i \geq i, i = 1, \dots, n$;
- 2) $a_i \leq a_{i+1}, i = 1, \dots, n - 1$.

Например, для $n = 3$ получим следующие допустимые последовательности: $(1, 2, 3)$, $(2, 2, 3)$, $(1, 3, 3)$, $(2, 3, 3)$, $(3, 3, 3)$. Для фиксированного n построим ориентированный граф V_n , вершины которого соответствуют допустимым кортежам. Две

вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда они отличаются только одной компонентой, причём разница между значениями этой компоненты равна 1. Начало ребра соответствует последовательности с меньшей суммой. На рис. 1 приведены графы V_3 и V_4 .

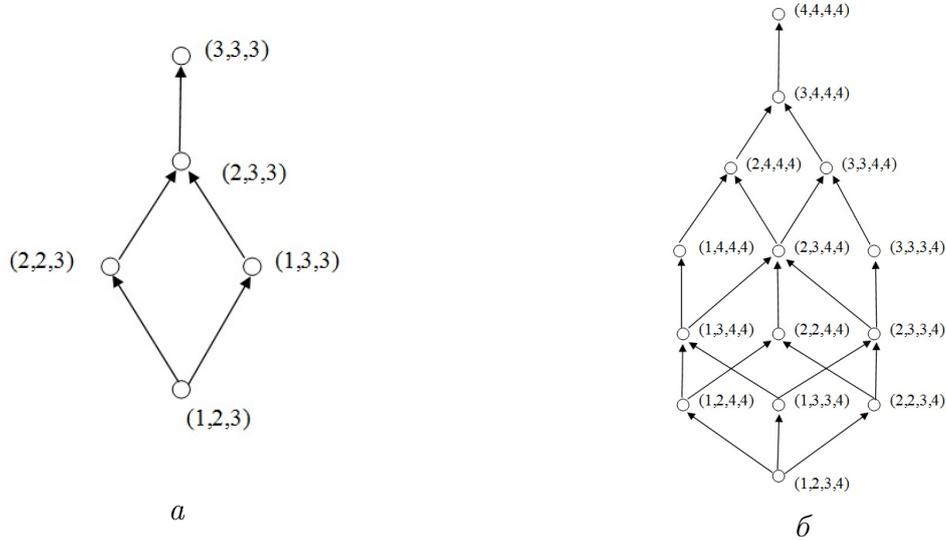


Рис. 1. Графы V_3 (а) и V_4 (б)

Приведём утверждения относительно структуры графа V_n .

Утверждение 1. Граф V_n содержит число вершин, равное n -му числу Каталана $\frac{1}{n+1}C_{2n}^n$.

Доказательство. Каждому допустимому кортежу длины n поставим в соответствие правильную скобочную последовательность из n открывающих и n закрывающих скобок. Равенство $a_i = j$ означает, что i -я закрывающая скобка находится после j -й открывающей скобки. Например, кортежу $(2, 3, 3)$ соответствует скобочная последовательность $((() ()))$.

Построенное отображение есть биекция между допустимыми кортежами длины n и правильными $2n$ -скобочными последовательностями, количество которых равно n -му числу Каталана. ■

Утверждение 2. Длина любого пути от начальной вершины $(1, 2, 3, \dots, n)$ до вершины (n, n, n, \dots, n) в графе v_n равна C_n^2 .

Доказательство. Поскольку при движении по ребру сумма элементов кортежа увеличивается на 1, то утверждение следует из тождества $n \cdot n - (1 + 2 + \dots + n) = n(n-1)/2 = C_n^2$. ■

Утверждение 3. Число рёбер в графе V_n равно C_{2n-1}^{m-2} .

Доказательство. Из вершины графа N_n , соответствующей последовательности (a_1, a_2, \dots, a_n) , выходят рёбра, количество которых равно количеству пар a_k, a_{k+1} в этой последовательности, таких, что $a_k < a_{k+1}$. Будем называть такие пары правильными. Каждой правильной паре соответствует единственное ребро, ведущее в вершину, соответствующую последовательности $(a_1, a_2, \dots, a_k + 1, a_{k+1}, \dots, a_n)$. Таким образом, общее количество рёбер в графе V_n равно количеству правильных пар во всех допустимых последовательностях длины n .

Зафиксируем число n и каждой допустимой последовательности $(1, 2, 3, \dots, n)$ поставим в соответствие путь Дика (Dyck path) [6] следующим образом. Построим квадрат размером $n \times n$ клеток и в первом столбце выделим горизонтальный отрезок на высоте a_1 клеток, во втором столбце — на высоте a_2 клеток и так далее. Соединим полученные горизонтальные отрезки вертикальными так, чтобы получилась замкнутая ломаная, выходящая из левого нижнего угла. Поскольку, согласно свойствам допустимых последовательностей, полученная ломаная лежит выше диагонали квадрата, выходящей из нижнего угла, то полученная ломаная будет путем Дика. Очевидно, что предлагаемая конструкция устанавливает биекцию между допустимыми последовательностями и путями Дика.

Полученную ломаную можно однозначно описать набором $2n$ символов U и D . Символ $U(D)$ соответствует вертикальному (горизонтальному) звену единичной ломаной при движении из левого нижнего угла. Полученный набор будем называть (U, D) -набором. Каждой правильной паре в допустимой последовательности однозначно соответствует пара DU в соответствующем (U, D) -наборе.

Значит, общее количество рёбер в графе V_n равно количеству пар DU во всех (U, D) -наборах длины $2n$. Согласно результатам Emeric Deutsch [7], количество таких пар равно C_{2n-1}^{n-2} . ■

На рис. 2 изображён путь Дика для последовательности $(1, 3, 3, 4)$, которой соответствует (U, D) -набор вида $U\underline{DUU}D\underline{DU}D$. В этот набор входят две пары DU (они подчеркнуты).

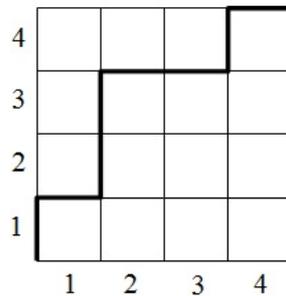


Рис. 2. Путь Дика для $(1, 3, 3, 4)$

2. W_n -графы

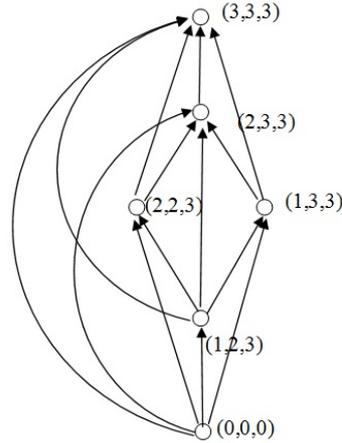
Добавим к графу V_n дополнительную вершину, из которой выходит единственное ребро в вершину $(1, 2, 3, \dots, n)$. Такую операцию будем называть пополнением графа истоком. Введём понятие W_n -графа.

Определение 1. W_n -графом называется минимальный транзитивный граф, содержащий V_n -граф, пополненный истоком.

На рис. 3 изображён W_3 -граф.

Очевидно, что число вершин W_n -графа на единицу превосходит число вершин V_n -графа и равно $\frac{1}{n+1}C_{2n}^n + 1$.

Утверждение 4. W_n -граф содержит $\frac{6(2n)!(2n+2)!}{n!(n+1)!(n+2)!(n+3)}$ рёбер.

Рис. 3. W_3 -граф

Доказательство. В терминах путей Дика число ребер в W_n -графе равно сумме числа пар путей Дика длины $2n$, в которых один из путей лежит не выше другого пути, и числу самих путей Дика.

Как известно [7], элементы последовательности A005700 в OEIS, которые задаются формулой в утверждении, равны количеству замкнутых ломаных длины $2n$, состоящих из единичных отрезков, параллельных осям, начинающихся в начале координат и полностью лежащих внутри угла, образованного прямыми $y = 0$ и $y = x$. Если обозначить через N движение вверх, E — вправо, S — вниз, W — влево, то все допустимые маршруты длины $4 = 2 \cdot 2$ имеют следующий вид: $EW EW$, $EE WW$, $EN SW$.

Установим биекцию между ребрами W_n -графа и указанными маршрутами. Пусть ребро W_n -графа выходит из истока. Тогда рассмотрим (U, D) -набор, соответствующий вершине, в которую это ребро входит. Заменим в этой последовательности U на E и D на W . В результате получим допустимый маршрут, не содержащий N и S . Это означает, что вся ломаная лежит на оси Ox . Пусть теперь ребро W_n -графа выходит не из истока. Тогда рассмотрим (U, D) -наборы $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2n}$ и $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{2n}$, соответствующие началу и концу этого ребра. По ним построим допустимый маршрут $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{2n}$ по следующему правилу:

$$\begin{aligned} \text{если } \alpha_k = U, \beta_k = U, \text{ то } \gamma_k = E; \\ \text{если } \alpha_k = U, \beta_k = D, \text{ то } \gamma_k = S; \\ \text{если } \alpha_k = D, \beta_k = U, \text{ то } \gamma_k = N; \\ \text{если } \alpha_k = D, \beta_k = D, \text{ то } \gamma_k = W. \end{aligned}$$

В результате получим допустимый маршрут, содержащий точки выше оси Ox . Используя свойства путей Дика, легко убедиться, что построенное отображение есть требуемая биекция. ■

Например, маршруту $ENEESWWW$ (рис. 4) соответствует начальный (U, D) -набор $UDUUUDDD$ и конечный (U, D) -набор $UUUUDDDD$ (рис. 5). Первый из этих наборов отвечает допустимой последовательности $(1, 4, 4, 4)$, а второй — $(4, 4, 4, 4)$; то есть ребро, соответствующее маршруту $ENEESWWW$, в W_4 -графе соединяет вершины, соответствующие последовательностям $(1, 4, 4, 4)$ и $(4, 4, 4, 4)$.

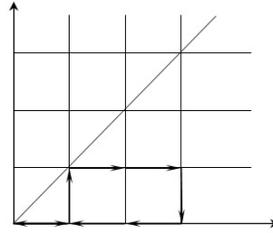


Рис. 4. Маршрут длины 8, лежащий в первом октанте

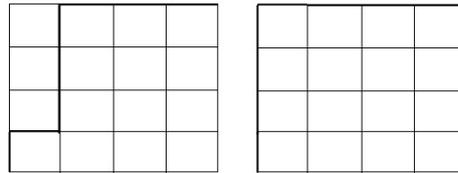


Рис. 5. Пути Дика, соответствующие (U, D) -наборам $UDUUUUDD$ и $UUUUUUDDDD$

3. Связь V_n - и W_n -графов с задачами размещения

Покажем связь между графами V_n и задачами размещения однотипных фигур на плоскости. Пусть есть фигура F , гомеоморфная открытому кругу, экземпляры которой нужно расположить в один ряд в некоторой полосе. Рассмотрим две соседние фигуры F и F_1 . Фигура F_1 получается из F сдвигом на некоторый вектор $\vec{m} = m \cdot \vec{i}$, где \vec{i} — орт. По условию задачи фигуры F и F_1 не должны пересекаться. Все такие сдвиги (при $m > 0$) называются допустимыми трансляциями.

Рассмотрим прямую l , параллельную \vec{i} и имеющую общие точки с F . Она пересекается с фигурой F по некоторой системе интервалов, которая при допустимой трансляции переходит в другую систему интервалов, сдвинутую относительно исходной на вектор \vec{m} . Фигуры F и F_1 не имеют общих точек тогда и только тогда, когда для любой прямой из указанного класса исходная и сдвинутая системы интервалов не имеют общих точек. На рис. 6 изображены системы интервалов исходной и сдвинутой непесекающихся фигур.

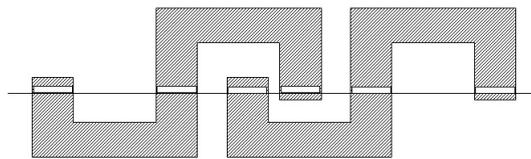


Рис. 6. Пересечение двух конгруэнтных фигур с горизонтальной прямой

Предположим, что фигура $P = l \cap F$ состоит из n интервалов. Поскольку после сдвига исходная система интервалов P и сдвинутая система $P_1 = l \cap F_1$ не пересекаются, то такой сдвиг можно описать кортежем (a_1, a_2, \dots, a_n) длины n , где a_i есть количество интервалов системы P , которые находятся левее i -го интервала системы P_1 . На рис. 7 приведён соответствующий пример.



Рис. 7. Системы интервалов P и P_1 , которые соответствуют кортежу $(2, 2, 3, 4)$

Поскольку каждый интервал после сдвига вправо оказывается правее своего исходного положения, то $a_i \geq i$. Так как при сдвиге порядок интервалов сохраняется, то $a_{i+1} \geq a_i$. Таким образом, допустимым сдвигам систем интервалов на прямой соответствуют допустимые кортежи.

При движении вправо системы P осуществляется переход от одной допустимой трансляции к другой, при этом как минимум один из элементов кортежа увеличивается. Этим объясняется правило построения рёбер в графе V_n .

При переходе от одной допустимой трансляции системы интервалов к соседней может так случиться, что один из элементов кортежа увеличится более чем на единицу или увеличатся сразу несколько элементов этого кортежа. Этим объясняется правило построения рёбер в графе W_n . Нулевой трансляции соответствует исток графа W_n .

Заключение

Введено понятие V_n -графа, где n — натуральное число. Его вершины соответствуют допустимым кортежам длины n , рёбра соединяют вершины, соответствующие кортежам, отличающимся на 1 в одной компоненте. Доказано, что V_n -граф содержит количество вершин, равное n -му числу Каталана, и число рёбер, равное C_{2n-1}^{n-2} . При доказательстве использована биекция между допустимыми кортежами и путями Дика. Введено понятие W_n -графа как минимального транзитивного графа, содержащего V_n -граф, пополненный истоком. Сформулированы и доказаны утверждения о свойствах W_n -графов. Показано, как такие графы возникают в задачах размещения однотипных фигур на плоскости. Вершины W_n -графа соответствуют топологически различным вариантам расположения двух конгруэнтных систем интервалов на прямой, при которых они не имеют общих точек. Ребра W_n -графа соответствуют переходам между двумя вариантами расположения систем интервалов. Подобные конструкции возникают при сечении двух однотипных фигур на плоскости прямой, параллельной вектору трансляции. Изученные свойства V_n - и W_n -графов позволяют оценивать трудоёмкость алгоритмов определения всех возможных перемещений фигуры, при которых она не имеет общих точек со своим исходным положением.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stoyan Yu. G.* Ф-function and its basic properties // Доповіді НАН України. 2001. Т. 1. № 1. С. 112–117.
2. *Burke E. K.* Complete and robust no-fit polygon generation for the irregular stock cutting problem // Eur. J. Operat. Res. 2007. V. 179. No. 1. P. 27–49.
3. *Аввакумов В. Д.* Оптимальное размещение плоских объектов произвольной геометрической формы // Информационные технологии. 2009. № 5. С. 31–35.
4. *Величко І. Г., Зинченко А. І.* Теорема про потяг та її застосування для задач регулярного розкрою // Вісник Харківського національного університету. 2011. Т. 1. № 960. С. 47–54.
5. *Пятницкая Г. Н., Синицын И. Г.* Бесконечные маршруты в графе и оптимальное размещение однотипных фигур в бесконечной узкой полосе // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1979. Т. 19. № 5. С. 1304–1312.
6. <http://oeis.org/A002054> — Онлайн-энциклопедия целочисленных последовательностей. 2013.
7. <http://oeis.org/A005700> — Онлайн-энциклопедия целочисленных последовательностей. 2013.