DOI 10.17223/20710410/22/5

УДК 519.17

Т-НЕПРИВОДИМЫЕ РАСШИРЕНИЯ ОБЪЕДИНЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ОРГРАФОВ

А. В. Гавриков

Саратовский государственный университет, г. Саратов, Россия

E-mail: alexandergavrikov1989@gmail.com

Приведены алгоритмы построения Т-неприводимых расширений (ТНР) для объединения некоторых типов орграфов, а именно для объединения ориентированных цепей, объединения орграфа с его ТНР, а также ТНР для направленных звезд. Каждый из предложенных алгоритмов имеет полиномиальную асимптотическую сложность. Доказана корректность этих алгоритмов.

Ключевые слова: *Т-неприводимые расширения, минимальные Т-неприводимые расширения, ТНР, объединения некоторых типов орграфов, объединения ориентированных цепей, направленные звёзды.*

Введение

Под *ориентированным графом* (или *орграфом*) понимается пара $G = (V, \alpha)$, где V — конечное непустое множество (вершины орграфа), а α — отношение на множестве V (дуги орграфа) [1]. Дуга в орграфе $G = (V, \alpha)$ называется *инцидентной* вершине v, если вершина v — конец или начало этой дуги. *Вложение* орграфа $G = (V, \alpha)$ в орграф $H = (W, \beta)$ — взаимно однозначное отображение $\varphi : V \to W$, такое, что для всех $u, v \in V$ из $(u, v) \in \alpha$ следует $(\varphi(u), \varphi(v)) \in \beta$. При этом говорят, что орграф G вкладывается в орграф H. *Часть* орграфа $G = (V, \alpha)$ — орграф $H = (W, \beta)$, такой, что $W \subseteq V$ и $\beta \subseteq (W \times W) \cap \alpha$. Часть орграфа $G = (V, \alpha)$ является *подграфом* орграфа $H = (W, \beta)$, если $\beta = (W \times W) \cap \alpha$. Подграф H *максимален*, если он получается из исходного орграфа G удалением одной вершины и всех инцидентных ей дуг. *Расширение* орграфа $G = (V, \alpha)$ — орграф $H = (W, \beta)$, такой, что $|W| = |V| + 1$ и орграф G вкладывается в каждый максимальный подграф орграфа H. *Соединение* орграфов $G = (V, \alpha)$ и $H = (W, \beta)$, таких, что $V \cap W = \varnothing$, — орграф $G + H = (V \cup W, \alpha \cup \beta \cup V \times W \cup W \times V)$. *Изоморфизм* орграфа $G = (V, \alpha)$ на орграф $H = (W, \beta)$ — взаимно однозначное соответствие $\varphi : V \to W$, сохраняющее отношение смежности. Изоморфность орграфов G и H обозначается через $G \cong H$. Орграфы G и H в этом случае называются *изоморфными*.

Тривиальное расширение (ТР) орграфа $G = (V, \alpha)$ — соединение $G + w$ исходного орграфа G с вершиной $w \notin V$ [2]. В силу того, что тривиальное расширение орграфа G единственно с точностью до изоморфизма, возможно ввести функцию $TP(G)$. *Т-неприводимое расширение* (ТНР) орграфа G — расширение исходного орграфа G, полученное удалением максимального множества дуг из $TP(G)$. *Минимальное Т-неприводимое расширение* орграфа G — расширение орграфа G, полученное удалением максимального количества дуг из $TP(G)$. Другими словами, минимальное ТНР орграфа G — это ТНР с минимальным количеством дуг среди всех остальных ТНР орграфа G.

Т-неприводимые расширения являются одним из видов оптимальных расширений для орграфов. Конструкции оптимальных расширений применяются в диагностике дискретных систем и криптографии [3]. В общем случае задача поиска ТНР по заданному орграфу является вычислительно сложной [4].

Путь в орграфе — последовательность дуг вида $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \cdots, (v_{n-1}, v_n)$, где $(v_i, v_{i+1}) \in \alpha$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, и никакая дуга не встречается более одного раза. Путь в орграфе является *простым*, если каждая его вершина принадлежит не более чем двум его дугам. *Длина пути* — количество входящих в него дуг. Простой путь в орграфе из n вершин, у которого начальная и конечная вершины не совпадают, является *ориентированной цепью* и обозначается через P_n.

Путь является *циклическим*, если $v_1 = v_n$. *Контур* в орграфе — простой циклический путь. Контур из n вершин обозначается через C_n.

Для ТНР орграфов известен следующий критерий [5], на который опирается доказательство процедуры их построения.

Теорема 1 (критерий ТНР для орграфов). Орграф $H = (W, \beta)$ является ТНР для орграфа $G = (V, \alpha)$ тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия:

1) $|W| = |V| + 1$;

2) в орграфе H существует вершина w, такая, что $H - w \cong G$;

3) орграф G вкладывает в каждый максимальный подграф $H - u$ орграфа H, где $u \neq w$;

4) (свойство неприводимости). При удалении из орграфа H любой дуги, инцидентной вершине w, то есть (u, w) или (w, u), получается орграф, не являющийся расширением для G.

1. ТНР для объединения ориентированных цепей

Перед тем как рассмотреть задачу поиска ТНР для объединения ориентированных цепей, покажем, как устроены Т-неприводимые расширения некоторой ориентированной цепи. *Степень исхода вершины* v — количество дуг в орграфе $G = (V, \alpha)$, имеющих своим началом вершину v. Степень исхода вершины v обозначают через $d^+(v)$, $d^+(v) = |\alpha(v)|$. *Степень захода вершины* v — количество дуг в орграфе $G = (V, \alpha)$, имеющих своим концом вершину v. Степень захода вершины v обозначают через $d^-(v)$, $d^-(v) = |\alpha^{-1}(v)|$. Вершина v называется *источником*, если её степень захода равна 0, т. е. $d^-(v) = 0$. Вершина v называется *стоком*, если её степень исхода равна 0, т. е. $d^+(v) = 0$. Введём следующие обозначения для вершин, из которых состоит ориентированная цепь P_n. Вершину v ориентированной цепи P_n, являющуюся источником, обозначим через v_0. Остальные вершины пометим номерами от 1 до $n-1$ в порядке их прохождения по дугам цепи из вершины v_0. Очевидным ТНР для ориентированной цепи P_n является контур C_{n+1} (рис. 1).

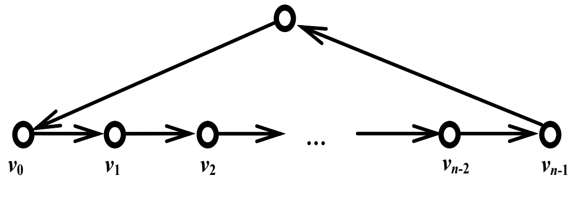

Рис. 1. ТНР ориентированной цепи

Ясно, что контур C_{n+1} является минимальным ТНР для ориентированной цепи P_n. Однако контур C_{n+1} не является единственным ТНР для P_n. Покажем это. Для ориентированной цепи P_2 ещё одним ТНР является транзитивный турнир, состоящий из трёх вершин; для ориентированной цепи P_3 — орграф, изображенный на рис. 2, *б*.

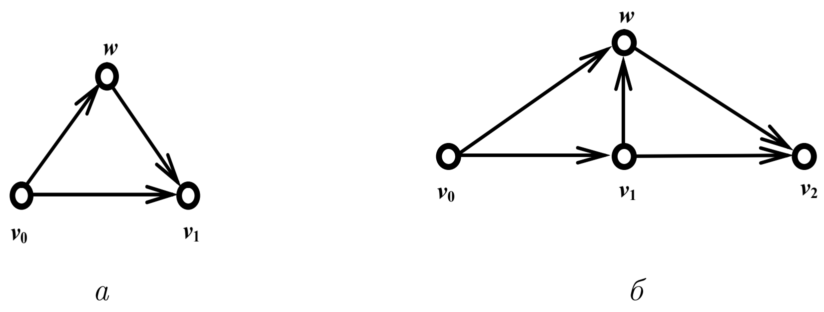

Рис. 2. ТНР ориентированных цепей P_2 (*а*) и P_3 (*б*)

Следующий алгоритм позволяет построить ТНР, не изоморфное контуру C_{n+1}, для ориентированной цепи P_n.

Алгоритм 1

Дана ориентированная цепь P_n, $n \geqslant 4$. Построим одно из её ТНР $H = (W, \beta)$, такое, что $H \ncong C_{n+1}$, следующим образом:

1) добавим к P_n вершину w;
2) добавим дуги (v_0, w) и (v_1, w);
3) добавим дуги (w, v_{n-2}) и (w, v_{n-1});
4) для каждой вершины $v_i \in V$, $2 \leqslant i \leqslant n-3$, добавим дуги (v_i, w) и (w, v_i).

Количество дуг $|\beta|$ в $H = (W, \beta)$ равно $n + 3 + 2(n-4) = 3n - 5$.

Асимптотическая сложность алгоритма 1

Для реализации алгоритма 1 достаточно для каждой вершины $v_i \in V$ исходной ориентированной цепи P_n добавить одну или две (в зависимости от её номера) инцидентные ей и вершине w дуги. Таким образом, асимптотическая сложность алгоритма не превосходит количества вершин и равна $\mathrm{O}(n)$.

Общий вид орграфа, построенного по алгоритму 1, показан на рис. 3.

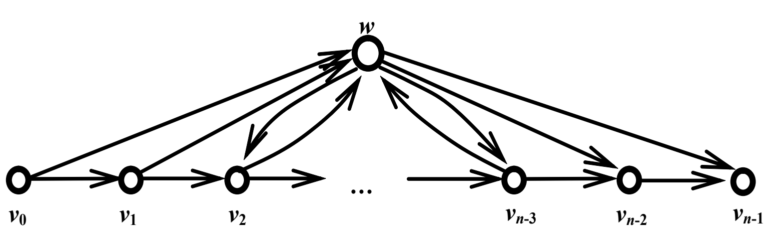

Рис. 3. ТНР ориентированной цепи P_n

Теорема 2. Алгоритм 1 корректен.

Доказательство. Необходимо и достаточно показать выполнение всех пунктов теоремы 1 (критерия ТНР для ориентированных графов).

1. Очевидно, $|W| = |V| + 1$, так как $W = V \cup \{w\}$.

2. Очевидно, что $P_n \cong H - w$ в силу построения в алгоритме.

3. Докажем, что для любой вершины $v_i \in W$, не совпадающей с вершиной w, исходная ориентированная цепь P_n вкладывается в орграф $H - v_i$. При удалении источника v_0 в орграфе $H - v_0$ существует ориентированная цепь $v_1, w, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}$ длины n. При удалении стока v_{n-1} в орграфе $H - v_{n-1}$ существует ориентированная цепь $v_0, w, v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}$ длины n. При удалении вершины v_i, которая не является ни источником, ни стоком, в орграфе $H - v_i$ существует ориентированная цепь $v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_{n-2}, v_{n-1}$ длины n. Таким образом, ориентированная цепь P_n вкладывается в каждый максимальный подграф орграфа H.

4. Свойство неприводимости. Докажем, что при удалении из орграфа $H = (W, \beta)$ любой дуги, инцидентной вершине w, получится орграф, не являющийся расширением для исходной ориентированной цепи P_n.

В случае удаления дуги (v_0, w) максимальный подграф $H - v_1$ будет содержать изолированную вершину v_0, т. е. вложение ориентированной цепи P_n в один из максимальных подграфов орграфа H невозможно. В случае удаления дуги (v_1, w) максимальный подграф $H - v_2$ будет содержать два стока v_1 и v_{n-1}, в то время как цепь P_n — только один. Таким образом, при удалении дуг, добавленных в п. 2 алгоритма 1, получится орграф, который не является расширением для ориентированной цепи P_n.

В случае удаления дуги (w, v_{n-1}) максимальный подграф $H - v_{n-2}$ будет содержать изолированную вершину v_{n-1}, т. е. вложение ориентированной цепи P_n в один из максимальных подграфов орграфа H невозможно. В случае удаления дуги (w, v_{n-2}) максимальный подграф $H - v_{n-3}$ будет содержать два источника v_0 и v_{n-2}, в то время как цепь P_n — только один. Таким образом, при удалении дуг, добавленных в п. 3 алгоритма 1, получим орграф, не являющийся расширением для P_n.

Рассмотрим ситуацию, возникающую при удалении дуг, добавленных в п. 4 алгоритма 1. Пусть удалена дуга (v_i, w), где $2 \leqslant i \leqslant n-3$. Тогда максимальный подграф $H - v_{i+1}$ будет содержать два стока v_i и v_{n-1}, в то время как цепь P_n — только один. Если удалена дуга (w, v_i), где $2 \leqslant i \leqslant n-3$, то максимальный подграф $H - v_{i-1}$ будет содержать два источника v_0 и v_i, в то время как цепь P_n — только один. Свойство неприводимости доказано.

Очевидно, что $H \ncong C_{n+1}$, так как H имеет $n + 3 + 2(n-4) = 3n - 5$ дуг, а контур C_{n+1} — $n+1$ дуг. ■

Далее рассмотрим задачу нахождения ТНР для объединения ориентированных цепей. Аналогичная задача, но для случая неориентированных графов, рассматривалась в [2].

Дан орграф $G = (V, \alpha)$, являющийся объединением ориентированных цепей: $G = P_{n_1} \cup P_{n_2} \cup \ldots \cup P_{n_k}$. В орграфе G существует $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i$ вершин и $\sum\limits_{i=1}^{k}(n_i - 1) = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i - k$ дуг. Обозначим $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i$ через n. При этом k вершин являются источниками (начальные вершины каждой из k ориентированных цепей) и k вершин — стоками (конечные вершины каждой из k ориентированных цепей). Остальные $n - 2k$ вершин имеют степени исхода и захода равные 1.

Следующий алгоритм позволяет построить ТНР для объединения ориентированных цепей.

Алгоритм 2

Дан орграф $G = P_{n_1} \cup P_{n_2} \cup \ldots \cup P_{n_k}$. Построим одно из его ТНР $H = (W, \beta)$ следующим образом:

1) добавим в орграф $G = (V, \alpha)$ вершину w;

2) для каждого источника $v \in V$ добавим дугу (w, v);

3) для каждого стока $v \in V$ добавим дугу (v, w).

Количество дуг $|\beta|$ в $H = (W, \beta)$ равно $n + k$.

Асимптотическая сложность алгоритма 2

Для реализации алгоритма 2 достаточно знать степени исхода и захода каждой вершины исходного орграфа G. Для данного типа орграфов эту информацию можно вычислить за линейное от количества вершин время. Таким образом, асимптотическая сложность алгоритма оценивается как $\mathrm{O}(n)$.

Теорема 3. Алгоритм 2 корректен.

Доказательство. Необходимо и достаточно показать выполнение всех пунктов теоремы 1 (критерия ТНР для ориентированных графов).

1. Очевидно, $|W| = |V| + 1$, так как $W = V \cup \{w\}$.

2. Очевидно, что $G \cong H - w$ в силу построения в алгоритме.

3. Докажем, что для любой вершины $v_i \in W$, не совпадающей с вершиной w, исходный орграф $G = P_{n_1} \cup P_{n_2} \cup \ldots \cup P_{n_k}$ вкладывается в орграф $H - v_i$. Удалим вершину v_i из орграфа H. Вершина v_i входит в одну из ориентированных цепей P_{n_j}, $1 \leqslant j \leqslant k$, исходного орграфа G. Вложение орграфа G в орграф $H - v_i$ построим следующим образом. Ориентированную цепь P_{n_j}, состоящую из вершин $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{n_j}$, вложим в ориентированную цепь, образованную вершинами $v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_{n_j}, w, v_1, \ldots, v_{i-1}$. Это возможно сделать, так как $(v_{n_j}, w) \in \beta$ и $(w, v_1) \in \beta$ по построению. Остальные вершины при вложении переведём сами в себя.

4. Свойство неприводимости. Докажем, что орграф, полученный при удалении из орграфа $H = (W, \beta)$ любой дуги, инцидентной вершине w, не будет расширением для исходного орграфа $G = (V, \alpha)$.

Покажем, что при удалении любой дуги (w, v), которая была добавлена в п. 2 алгоритма 2, орграф $H - (w, v)$ не будет расширением для $G = P_{n_1} \cup P_{n_2} \cup \ldots \cup P_{n_k}$. В этом случае вершина v является источником и началом одной из k ориентированных цепей исходного орграфа G. Из вершины v исходит дуга $(v, u) \in \alpha$. Тогда в максимальном подграфе $H - u$ вершина v будет изолированной вершиной в силу того, что дуги (w, v) нет в орграфе H. Ясно, что в таком случае орграф G не вкладывается в орграф $H - u$, в котором существует изолированная вершина.

Покажем, что при удалении любой дуги (v, w), которая была добавлена в п. 3 алгоритма 2, орграф $H - (v, w)$ не будет расширением для $G = P_{n_1} \cup P_{n_2} \cup \ldots \cup P_{n_k}$. В этом случае вершина v является стоком и концом одной из k ориентированных цепей исходного орграфа G. В вершину v входит дуга $(u, v) \in \alpha$. Тогда в максимальном подграфе $H - u$ вершина v будет изолированной вершиной в силу того, что дуги (v, w) нет в орграфе H. Ясно, что в таком случае орграф G не вкладывается в орграф $H - u$, в котором существует изолированная вершина.

Свойство неприводимости выполнено. ■

На рис. 4 изображены орграф, являющийся объединением ориентированных цепей, и его ТНР, построенное по алгоритму 2.

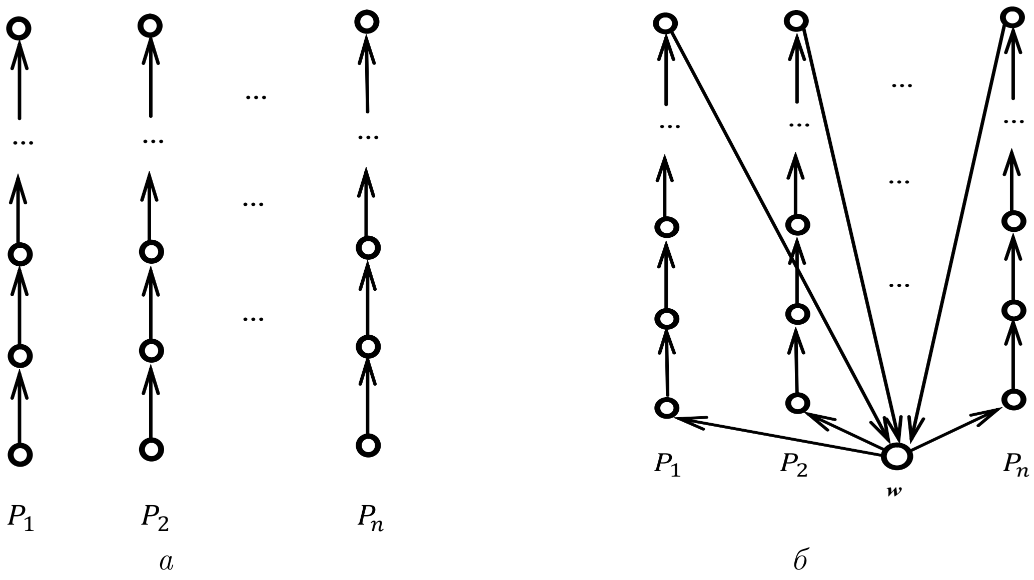

Рис. 4. Орграф $G = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n$ (a) и его ТНР ($б$)

Теорема 4. Для орграфов $G = P_{n_1} \cup P_{n_2} \cup \ldots \cup P_{n_k}$, где $n_i > 2$, $1 \leqslant i \leqslant k$, являющихся объединением ориентированных цепей, состоящих более чем из двух вершин, существует с точностью до изоморфизма только одно минимальное ТНР.

Доказательство. Покажем, что любое минимальное ТНР для орграфа G изоморфно ТНР, построенному по алгоритму 2.

Сначала докажем, что в произвольном минимальном ТНР для рассматриваемого класса орграфов должно быть $n + k$ дуг, где k — количество ориентированных цепей. Ровно столько дуг содержится в минимальном ТНР, построенном по алгоритму 2.

В орграфе $G = P_{n_1} \cup P_{n_2} \cup \ldots \cup P_{n_k}$ существует k вершин, являющихся стоками, и k вершин, являющихся источниками. Количество дуг в G равно $n - k$. Для каждого стока v необходимо добавить исходящую дугу (v, w), иначе в некоторых максимальных подграфах расширения орграфа G будут присутствовать изолированные вершины (для этого будет достаточно удалить вершину u, которая является началом дуги (u, v)). Для каждого источника v необходимо добавить входящую дугу (w, v), иначе в некоторых максимальных подграфах расширения орграфа G будут присутствовать изолированные вершины (для этого будет достаточно удалить вершину u, которая является концом дуги (v, u)). Количество добавленных дуг в этом случае равно $2k$, а общее количество дуг в минимальном ТНР — $n + k$. Итак, необходимо добавить k дуг, входящих в вершину w, и k дуг, исходящих из вершины w. Каждая из $2k$ добавленных дуг будет инцидентна либо одному из k источников, либо одному из k стоков исходного орграфа G. При этом так как $n_i > 2$, $1 \leqslant i \leqslant k$, для выполнения вложения, показанного в п. 3, единственным способом добавления $2k$ дуг, инцидентных вершине w, является алгоритм 2. ■

Примечание. Если одна из ориентированных цепей P_{n_i}, $1 \leqslant i \leqslant n$, орграфа G состоит из двух вершин, то добавление $2k$ дуг в исходный орграф можно выполнить четырьмя способами (рис. 5).

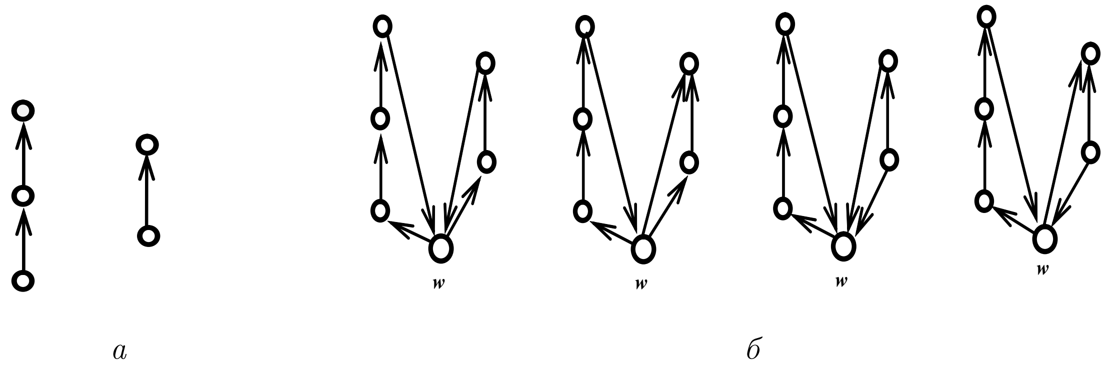

Рис. 5. Граф $G = P_3 \cup P_2$ (*а*) и четыре его ТНР (*б*)

2. ТНР для направленных звезд

Под направленной звездой с k дугами будем понимать орграф, полученный из полного двудольного графа $K_{1,k}$ некоторой ориентацией его рёбер. Понятия корня и листьев в направленных звёздах аналогичны случаю неориентированных звёзд. Направленная звезда S_3 с тремя листьями изображена на рис. 6, *а*.

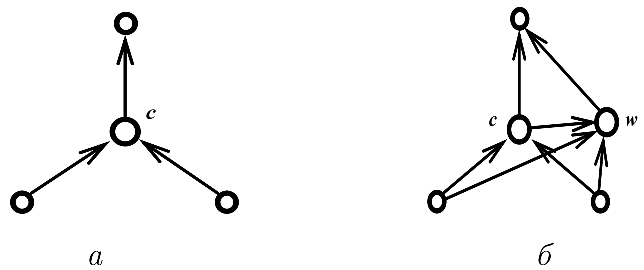

Рис. 6. Направленная звезда S_3 (*а*) и её ТНР (б)

Прежде чем дать алгоритм построения одного из ТНР для произвольной направленной звезды, докажем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть S_k — направленная звезда, а $H = (W, \beta)$ — одно из её ТНР. При любом вложении $\varphi : V \to W$ направленной звезды S_k в максимальный подграф $H - c$, полученный удалением корня c, имеет место $\varphi(c) = w$, т. е. корень c звезды S_k отображается в вершину w орграфа $H - c$.

Доказательство. Корень c направленной звезды S_k имеет k инцидентных дуг, при этом вершина c соединена дугой с каждым листом v_i, $0 \leqslant i \leqslant k-1$. В любом максимальном подграфе любого ТНР для направленной звезды лист v_i может быть соединён дугой не более чем с двумя вершинами: с вершиной c и с вершиной w. Следовательно, так как корень c должен быть соединен дугами не менее чем с k вершинами, где $k > 2$, то единственной вершиной, в которую может отображаться центр c, в максимальном подграфе $H - c$ является вершина w. Это возможно, разумеется, при достаточном количестве добавленных дуг в ТНР, инцидентных вершине w. Таким образом, при любом вложении $\varphi : V \to W$ направленной звезды S_k в максимальный подграф $H - c$ имеет место $\varphi(c) = w$. ■

Следствие 1. В любом ТНР для направленной звезды S_k выполняется $d^+(c) \leqslant d^+(w)$, $d^-(c) \leqslant d^-(w)$, и вершина w соединена хотя бы одной дугой с каждым листом v_i, $0 \leqslant i \leqslant k-1$.

Следующий алгоритм позволяет построить ТНР для направленной звезды S_k.

Алгоритм 3
1) Добавим к направленной звезде S_k вершину w;
2) для каждого листа v_i, такого, что $d^+(v_i) = 1$, добавим дугу (v_i, w);
3) для каждого листа v_i, такого, что $d^-(v_i) = 1$, добавим дугу (w, v_i);
4) добавим дугу (c, w).

Асимптотическая сложность алгоритма 3 равна $\mathrm{O}(k)$, так как за $\mathrm{O}(1)$ можно проанализировать каждую из $k+1$ вершин.

ТНР, которое строит алгоритм 3, содержит $2k+1$ дуг, так как к направленной звезде S_k добавляется $k+1$ дуга.

ТНР для направленной звезды S_3, построенное по алгоритму 3, показано на рис. 6.

Теорема 5. Алгоритм 3 корректен.

Доказательство. Рассмотрим орграф $H = (W, \beta)$, полученный алгоритмом 3. Для доказательства корректности предложенного алгоритма необходимо и достаточно показать выполнение всех пунктов теоремы 1 (критерия ТНР для ориентированных графов).

1. $|W| = |V| + 1$, так как $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, W = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, w\}$.

2. Очевидно, что $S_k \cong H - w$ в силу построения в алгоритме 3.

3. Покажем, что направленная звезда S_k вкладывается в каждый максимальный подграф $H = (W, \beta)$.

Рассмотрим максимальный подграф $H - c$, полученный удалением корня c. Тогда существует вложение $\varphi : V \to W$, такое, что $\varphi(c) = w$ и $\varphi(v_i) = v_i$, $0 \leqslant i \leqslant k-1$. Действительно, в орграфе $H - c$ по построению $d^+(c) = d^+(w)$ и $d^-(c) = d^-(w)$, орграф $H - c$ является направленной звездой и $H - c \cong S_k$.

Рассмотрим максимальный подграф $H - l$, полученный удалением одного листа l. Если $d^-(l) = 1$, то существует вложение $\varphi : V \to W$, такое, что $\varphi(c) = c$, $\varphi(l) = w$ и $\varphi(v_i) = v_i$, $0 \leqslant i \leqslant k-1$, $v_i \neq l$; если же $d^+(l) = 1$, то существует вложение $\varphi : V \to W$, такое, что $\varphi(c) = w$, $\varphi(l) = c$ и $\varphi(v_i) = v_i$, $0 \leqslant i \leqslant k-1$, $v_i \neq l$.

4. Свойство неприводимости. Докажем, что при удалении из орграфа $H = (W, \beta)$ любой дуги, инцидентной вершине w, получится орграф, не являющийся расширением для направленной звезды S_k.

Пусть из H удалена дуга между вершиной w и некоторым листом v_i, $0 \leqslant i \leqslant k-1$. Тогда в орграфе $H - c$ вершина v_i является изолированной. Вложение невозможно.

Пусть из H удалена дуга (c, w), добавленная в п. 4 алгоритма 3. Тогда в орграфе $H - v_i$, где v_i — некоторый лист, имеет место $d^+(w) + d^-(w) < k$ и $d^+(c) + d^-(c) < k$, то есть корень c направленной звезды S_k также не отображается в вершину w. ■

ТНР для направленной звезды S_k, построенное по алгоритму 3, не единственное. Например, для направленной звезды S_3 (см. рис. 6) существует другое ТНР (рис. 7).

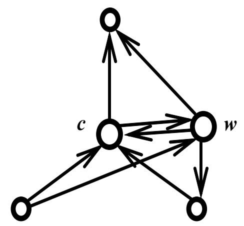

Рис. 7. ТНР для направленной звезды S_3

3. Т-неприводимое расширение для объединения орграфа и его Т-неприводимого расширения

Аналогичная задача, но для неориентированных графов, рассмотрена в [2].

Теорема 6 (ТНР для объединения орграфа и его ТНР). Пусть $G = (V, \alpha)$ — орграф и $H = (W, \beta)$ — одно из его ТНР. Тогда одним из ТНР для орграфа $G \cup H$ является орграф $H \cup H'$, где $H' = (W', \beta')$ — изоморфная копия орграфа $H = (W, \beta)$.

Доказательство. Необходимо показать выполнение всех пунктов критерия ТНР для орграфов.

1. $|W \cup W'| = |W| + |W'| = |W| + (|V| + 1)| = (|W| + |V|) + 1 = |W \cup V| + 1$.

2. Так как орграф $H' = (W', \beta')$ является изоморфной копией одного из ТНР для орграфа $G = (V, \alpha)$, то в нём по критерию ТНР существует вершина w, такая, что $H' - w \cong G$. Следовательно, $(H \cup H') - w \cong H \cup (H' - w) \cong H \cup G$.

3. Так как $H = (W, \beta)$ является одним из ТНР для орграфа $G = (V, \alpha)$, то $G = (V, \alpha)$ вкладывается в любой максимальный подграф $H - u$ орграфа $H = (W, \beta)$, где $u \neq w$. При удалении любой вершины u, такой, что $u \neq w$, получим орграф $H \cup (H' - u)$. Тогда исходный орграф $G \cup H$ вкладывается в орграф $H \cup (H' - u)$ следующим образом: орграф G вкладывается в орграф $H' - u$, а орграф H вкладывается сам в себя.

4. Удалим произвольную дугу (u, w) из орграфа $H \cup H'$. Получим орграф $H \cup H' - (u, w) \cong H \cup (H' - (u, w))$. Рассмотрим его максимальный подграф $(H - w) \cup (H' - (u, w)) \cong G \cup (H' - (u, w))$. Очевидно, что часть H исходного орграфа $G \cup H$ не вкладывается ни в орграф G, ни в орграф $H' - (u, w)$. Таким образом, существует максимальный подграф орграфа $H \cup H' - (u, w)$, в который не вкладывается исходный орграф $G \cup H$. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, Физматлит, 1997. 368 с.
2. *Курносова С. Г.* Т-неприводимые расширения для некоторых классов графов // Теоретические проблемы информатики и её приложений: сб. науч. тр. / под ред. проф. А. А. Сытника. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. С. 113–125.
3. *Салий В. Н.* Доказательства с нулевым разглашением в задачах о расширении графов // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2003. № 6. С. 63–65.
4. *Абросимов М. Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. Т. 88. № 5. С. 643–650.
5. *Курносова С. Г.* Т-неприводимое расширение для симметричных ориентаций цепей // Теоретические проблемы информатики и ее приложений: сб. науч. тр. / под ред. проф. А. А. Сытника. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. С. 76–81.