

ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ РЕАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

DOI 10.17223/20710410/23/13

УДК 519.17

ПРИМЕНЕНИЕ КА-МОДЕЛИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ
ЗАГРЯЗНЕНИЙ НА ДИНАМИКУ ПОПУЛЯЦИЙ ГОЛОМЯНОК
И МАКРОГЕКТОПУСА В ОЗЕРЕ БАЙКАЛ¹

И. В. Афанасьев

*Институт вычислительной математики и математической геофизики, г. Новосибирск,
Россия***E-mail:** ivafanas@gmail.com

Предложенная ранее клеточно-автоматная модель динамики численности организмов озера Байкал скорректирована и дополнена учётом пространственной специфики моделируемой области, сезонности рождаемости и перемещения организмов под действием водных течений. Модель верифицирована по критериям отношения продукции к среднегодовой биомассе и относительной частоте встречаемости организмов. Приведены результаты применения модели для исследования влияния загрязнений. Получены оценки минимального загрязнения, достаточного для полного вымирания организмов, и максимального, влияние которого не заметно на фоне естественных процессов.

Ключевые слова: *самоорганизация, дискретное моделирование, клеточный автомат, композиционные модели, хищник — жертва.*

Введение

Длительное время исследования динамики популяций проводились с помощью систем дифференциальных уравнений [1, 2]. В используемых моделях исследовалось не более трёх групп организмов, а параметры особей были усреднены по пространству моделирования. В работе [3], где предложена модель восьми групп организмов, базирующаяся на системе обыкновенных дифференциальных уравнений, с помощью методов численного моделирования было снято первое ограничение.

В [4] предложена клеточно-автоматная модель (КА-модель) динамики численности восьми групп организмов озера Байкал, позволяющая учитывать пространственное распределение особей и возможные локальные загрязнения. В этой модели область моделирования является квадратной, и не учитываются влияние водных течений и сезонные изменения.

В данной работе КА-модель [4] модифицирована. Добавлено соответствие области моделирования пространственной структуре озера Байкал, учтено влияние сезонных изменений на динамику численности и перемещений организмов под действием водных течений. Скорректирован метод учёта влияния локальных загрязнений. Представлены результаты верификации модели. Приведены оценки минимальной интенсивности

¹Исследование выполнено по Программе фундаментальных исследований Президиума РАН, проект № 15.9 (2012 г.), а также при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 11-01-00567а.

загрязнения, достаточной для полного вымирания организмов, и максимальной, при которой влияние загрязнения не заметно на фоне естественных процессов. Данные о популяции взяты из работы [3].

1. Композиционная КА-модель

Рассмотрим три вида организмов: макрогектопус (*macrohectopus*), малую (*comerphorus dybovski*) и большую (*comerphorus baikalensis*) голомянок.

Каждый из видов разделён на возрастные группы (вид будем обозначать буквой из $\{m, d, b\}$, возрастную группу — цифрой из $\{1, 2, 3\}$):

- макрогектопус — неполовозрелые m_1 , половозрелые m_2 ;
- малая голомянка — однолетки d_1 , неполовозрелые d_2 , половозрелые d_3 ;
- большая голомянка — однолетки b_1 , неполовозрелые b_2 , половозрелые b_3 .

Между группами определены взаимоотношения хищник — жертва и демографические взаимоотношения.

КА-модель динамики популяций организмов озера Байкал определяется четвёркой понятий

$$\aleph = \langle \Sigma, M, F, \rho \rangle,$$

где Σ — алфавит состояний клеток; M — множество имён клеток; F — глобальный оператор перехода; ρ — режим функционирования.

Модель — параллельная композиция [5] восьми КА, каждый из которых предназначен для моделирования численности конкретной группы организмов.

Пусть Q — квадратная сетка, покрывающая озеро Байкал. Множество имён клеток M — объединение восьми попарно непересекающихся множеств M_i^α :

$$M = M_1^m \cup M_2^m \cup M_1^d \cup M_2^d \cup M_3^d \cup M_1^b \cup M_2^b \cup M_3^b.$$

Предполагается, что каждой ячейке из Q соответствует восемь имён клеток — по одной из каждого из множеств M_i^α , т. е. для всех i и α существует биекция ψ_i^α между множеством M_i^α и множеством ячеек сетки Q :

$$\psi_i^\alpha : Q \rightarrow M_i^\alpha.$$

Клеткой называется элемент множества $M \times \Sigma$. *Состояния клетки* — элементы множества Σ (целые числа) — обозначают модельную плотность организмов в клетке.

Конечный набор

$$S(c) = \langle (\varphi_1(c), n_1), \dots, (\varphi_k(c), n_k) \rangle$$

называется *локальной конфигурацией*, где $n_i \in \Sigma$ — состояния клеток; $\varphi_i : M \rightarrow M$ — *именующие функции*, т. е. функции, определяющие для клетки с именем c имена клеток, с ней взаимодействующих.

В общем случае локальный оператор перехода $f : \{S(c)\} \rightarrow \{S(c)\}$ принимает на вход локальную конфигурацию $S(c)$. Его результат — локальная конфигурация $f(S(c))$, в которой изменены состояния клеток (возможно, не всех) из $S(c)$. *Итерация*, или *применение глобального оператора* F — применение локального оператора f ко всем клеткам. В модели глобальный оператор F является последовательной композицией двух операторов [5]

$$F = F_1 \circ F_2,$$

где F_1 предназначен для моделирования перемещения организмов, F_2 — для моделирования процессов поедания, вымирания и роста. Оператор перемещения F_1 , в свою

очередь, является последовательной композицией оператора собственного перемещения F_d и оператора перемещения под действием течений F_s :

$$F_1 = F_d \circ F_s.$$

Известны два основных режима применения глобального оператора: *синхронный* и *асинхронный*. Синхронный режим предполагает, что сначала вычисляются новые состояния клеток согласно локальному оператору перехода, а затем все клетки одновременно изменяют свои старые состояния на новые. В асинхронном режиме случайно выбирается клетка, вычисляется ее новое состояние и старое состояние клетки сразу заменяется на новое [6].

В предложенной КА-модели используются оба режима. Сначала асинхронно применяется F_1 , затем синхронно применяется F_2 .

1.1. Собственное перемещение организмов

Пусть f_z и F_z — локальный и глобальный операторы целочисленной диффузии, предложенной в работе [7],

$$f_z : \{S_1(c)\} \rightarrow \{S_1(c)\},$$

где $S_1(c)$ — набор соседей клетки с именем c , включая саму эту клетку. *Соседями* назовем клетки с именами $c_i^\alpha, c_i^{\alpha'} \in M_i^\alpha$, соответствующими соседним ячейкам сетки Q . Клетки с именами из разных подмножеств M_i^α соседями не являются, т. е. если $c_i^\alpha \in M_i^\alpha$ и $c_j^\beta \in M_j^\beta$ — соседи, то $i = j$, $\alpha = \beta$.

Применение f_z к клетке (c, n) выполняется по следующему алгоритму:

- 1) Пусть $(c_1, n_1), \dots, (c_k, n_k)$ — соседи клетки (c, n) , $k \leq 4$.
Случайно равновероятно выбирается (c_i, n_i) .
- 2) Новые состояния n' и n'_i вычисляются по формулам

$$n' = n - [\sigma n] + [\sigma n_i], \quad n'_i = n_i + [\sigma n] - [\sigma n_i],$$

где σ — коэффициент целочисленной диффузии, $0 \leq \sigma \leq 1$.

Оператор F_z применяется в асинхронном режиме.

Оператор F_d определяется следующим образом. Пусть l — физический размер квадратной ячейки, v_{cr} — крейсерская скорость организмов вида α возраста i , Δt — физическое время, соответствующее одной глобальной итерации КА. Тогда максимальное число ячеек, пройденное организмом за время Δt , может быть вычислено как

$$K_i^\alpha = \frac{v_{cr} \Delta t}{l}.$$

Так как применение f_z перемещает организм только на одну клетку, то перемещение с крейсерской скоростью достигается K_i^α -кратным применением оператора F_z на множестве M_i^α :

$$F_d|_{M_i^\alpha} = (F_z)^{K_i^\alpha}.$$

1.2. Перемещение под действием течений

Пусть $stream(c) : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ — карта течений — отображение множества имён клеток M в пространство двумерных вещественных векторов.

Вектор $stream(c) = (v_x, v_y)$ — физическая скорость течения в клетке с именем c ; x соответствует направлению запад — восток, направление y — юг — север.

Локальный оператор f_s моделирует перемещение организмов вдоль траектории течения. Алгоритм применения f_s к клетке с именем c рекурсивен. Сначала просматривается клетка с именем c , затем её соседи, в которые течение переносит организмы, затем соседи соседей и так далее. Рекурсия обрывается на расстоянии, дальше которого течение не может перенести организмы за время, соответствующее одной итерации.

Пусть l — физический размер ячейки, Δt — физическое время, соответствующее одной итерации.

Алгоритм применения f_s к клетке с именем c :

- 1) Найти c_x^k и c_y^k — имена соседей клетки с именем c^k в направлении v_x^k и v_y^k , где k — уровень вложенности рекурсии; c^k — имя просматриваемой клетки. На первом уровне рекурсии просматривается клетка с именем c ($c^1 = c$). На втором уровне просматриваются две клетки — соседи клетки с именем c^1 , в которые попадает течение ($c^2 \in \{c_x^1, c_y^1\}$). На k -м уровне просматривается не более 2^k клеток, $(v_x^k, v_y^k) = stream(c^k)$ — вектор течения в клетке с именем c^k .
- 2) Вычислить n_x^k, n_y^k — число организмов клетки с именем c^k , перемещаемых течением в клетки с именами c_x^k и c_y^k соответственно:

$$n_x^k = \begin{cases} n^k \frac{v_x^k}{|v_x^k| + |v_y^k|}, & \text{если } s_x^k > 1, \\ n^k \frac{v_x^k}{|v_x^k| + |v_y^k|} s_x^k, & \text{если } s_x^k \leq 1, \end{cases} \quad n_y^k = \begin{cases} n^k \frac{v_y^k}{|v_x^k| + |v_y^k|}, & \text{если } s_y^k > 1, \\ n^k \frac{v_y^k}{|v_x^k| + |v_y^k|} s_y^k, & \text{если } s_y^k \leq 1, \end{cases}$$

где n^k — модельное число перемещаемых организмов клетки с именем c^k . Число n^k при $k > 1$ вычисляется на $(k - 1)$ -м уровне рекурсии на шаге 3; n^1 — состояние клетки с именем c , т. е. на первом уровне вложенности под действием течения перемещаются все особи, находящиеся в клетке с именем c ; s_x^k, s_y^k — модельные расстояния, преодолеваемые течением за время τ^k , в количестве клеток:

$$s_x^k = \frac{\tau^k v_x^k}{l}, \quad s_y^k = \frac{\tau^k v_y^k}{l};$$

τ^k — физическое время, оставшееся для перемещения организмов под действием водных течений в течение одной итерации с учётом времени, затраченного на предыдущих уровнях рекурсии:

$$\tau^1 = \Delta t, \quad \tau^k = \tau^{k-1} - \Delta \tau^{k-1};$$

$\Delta \tau^{k-1}$ — физическое время, затраченное течением на преодоление клетки на $(k - 1)$ -м уровне вложенности рекурсии:

$$\Delta \tau^{k-1} = \frac{l}{v_x^{k-1}} \quad \text{или} \quad \Delta \tau^{k-1} = \frac{l}{v_y^{k-1}}.$$

- 3) Если $s_x^k > 1$ (т. е. течение за время τ^k может пересечь более одной клетки в направлении x), то алгоритм рекурсивно выполняется для клетки $c^{k+1} = c_x^k$ с числом перемещаемых организмов $n^{k+1} = n_x^k$ и временем, затраченным на перемещение, $\Delta \tau^k = \frac{l}{v_x^k}$. Аналогичная проверка выполняется в направлении y .

Чтобы учесть влияние замерзания озера на скорость течений, физическая скорость водных течений в период замерзания считается равной половине от физической скорости в период, когда озеро свободно ото льда.

1.3. Оператор изменения численности

Пусть f_2 — локальный оператор изменения численности:

$$f_2 : \{S_2(c)\} \rightarrow \{S_2(c)\},$$

где $S_2(c)$ — набор клеток-близнецов (рис. 1). Клетки с именами $c_i^\alpha \in M_i^\alpha$ и $c_j^\beta \in M_j^\beta$ называются *близнецами*, если они соответствуют одной и той же ячейке из Q , т. е. $(\psi_i^\alpha)^{-1}(c_i^\alpha) = (\psi_j^\beta)^{-1}(c_j^\beta)$. Таким образом, для $c \in M_i^\alpha$ и $q = (\psi_i^\alpha)^{-1}(c) \in Q$

$$S_2(c) = \langle \psi_1^m(q), \psi_2^m(q), \psi_1^d(q), \psi_2^d(q), \psi_3^d(q), \psi_1^b(q), \psi_2^b(q), \psi_3^b(q) \rangle.$$

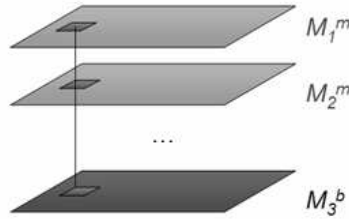


Рис. 1. Клетки-близнецы $S_2(c)$

Локальный оператор f_2 применяется синхронно. Новое состояние клетки с именем $c_i^\alpha \in M_i^\alpha$ вычисляется по формуле

$$(n_i^\alpha)' = n_i^\alpha + (\rho_i^\alpha n_j^\alpha - \lambda_i^\alpha n_i^\alpha - \theta_i^\alpha n_i^\alpha) \Delta t,$$

где j — возрастная группа особей, порождающих особей возраста i ; Δt — физическое время, соответствующее одной итерации КА; $\rho_i^\alpha n_j^\alpha$ — приток в группу за счёт рождаемости или старения предыдущей группы; $\lambda_i^\alpha n_i^\alpha$ — отток из группы за счёт смертности; $\theta_i^\alpha n_i^\alpha$ — отток из группы за счёт старения.

Коэффициенты рождаемости ρ_i^α , смертности λ_i^α и старения θ_i^α взяты из работы [3]:

- 1) коэффициенты старения θ_i^α постоянны;
- 2) коэффициенты смертности $\lambda_2^d, \lambda_3^d, \lambda_2^b, \lambda_3^b$ постоянны;
- 3) коэффициенты смертности $\lambda_1^m, \lambda_2^m, \lambda_1^d, \lambda_1^b$ имеют вид

$$\lambda_i^\alpha = a_i^\alpha + b_i^\alpha(n_2^d + n_3^d) + d_i^\alpha(n_2^b + n_3^b), \quad (1)$$

где $a_i^\alpha, b_i^\alpha, d_i^\alpha$ — постоянные величины; b_i^α и d_i^α характеризуют смертность от выедания хищниками (малыми и большими голомянками) и зависят от вкусовых предпочтений хищников; a_i^α характеризует смертность от остальных причин;

- 4) коэффициент рождаемости ρ_1^m постоянен;
- 5) коэффициенты рождаемости ρ_1^d, ρ_1^b имеют вид

$$\rho_1^\alpha = \mu^\alpha(n_1^m + n_2^m) + \nu^\alpha(n_1^d + n_1^b),$$

где постоянные коэффициенты μ^α и ν^α зависят от рациона хищников.

Чтобы учесть зависимость рождаемости от сезонов, в КА-модели коэффициенты рождаемости ρ_1^d и ρ_1^b умножаются на периодические функции $season_d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $season_b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, графики которых приведены на рис. 2. Период функций $season_d(t)$ и $season_b(t)$ равен одному году: $season_b(t+1) = season_b(t)$, $season_d(t+1) = season_d(t)$.

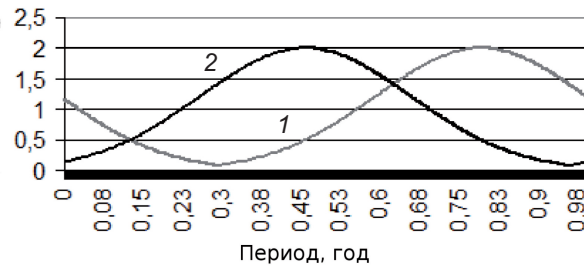


Рис. 2. Графики функций $season_b(t)$ (кр. 1) и $season_d(t)$ (кр. 2). По оси абсцисс отложен один год. Ноль соответствует 1 января

2. Верификация модели

Верификация проводится по трём видам организмов (суммарно по возрастным группам) и следующим критериям:

- P_α/B_α — отношение годовой продукции к среднегодовой биомассе организма α . Годовая продукция P_α — положительный прирост биомассы организма вида $\alpha \in \{m, d, b\}$ за год. В это значение входят массы родившихся организмов и прирост массы организмом во время взросления;
- N_α/N_β — отношение числа организмов вида α к числу организмов вида β ; N_α — усредненная по пространству среднегодовая численность;

$$\begin{aligned} P_m &= P_m^1 + P_m^2, & B_m &= B_m^1 + B_m^2, & N_m &= N_m^1 + N_m^2, \\ P_d &= P_d^1 + P_d^2 + P_d^3, & B_d &= B_d^1 + B_d^2 + B_d^3, & N_d &= N_d^1 + N_d^2 + N_d^3, \\ P_b &= P_b^1 + P_b^2 + P_b^3, & B_b &= B_b^1 + B_b^2 + B_b^3, & N_b &= N_b^1 + N_b^2 + N_b^3. \end{aligned}$$

В [8] дана оценка биомассы макрогектопуса B_m в 110000 тонн. Оценка продукции макрогектопуса P_m варьируется от 330000 до 900000 тонн [8], т. е. коэффициент P_m/B_m должен находиться в пределах 3–8.

Оценка коэффициента $\frac{P_d + P_b}{B_d + B_b}$ взята из [9] и равна 1,24. Оценки коэффициентов $\frac{N_m}{N_d}$ и $\frac{N_m}{N_b}$ взяты из [3]. Результаты верификации представлены в таблице. Модельные оценки отличаются от оценок, приведённых в [3, 8, 9], не более чем на 20 %.

Результаты верификации модели

Оценки	$\frac{P_m}{B_m}$	$\frac{P_d + P_b}{B_d + B_b}$	$\frac{N_m}{N_d}$	$\frac{N_m}{N_b}$
В [3, 8, 9]	3–8	1,24	6,05	21,52
Модель	5,77	1,49	6,00	20,45

3. Влияние загрязнений

Модель позволяет исследовать влияние вероятного загрязнения.

Пусть $poll(c) : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ — карта загрязнений — функционал, ставящий в соответствие имени клетки положительное число, характеризующее интенсивность загрязнения. Предполагается, что загрязнение влияет на смертность организмов.

Новые коэффициенты смертности для хищников $\lambda_2^d, \lambda_3^d, \lambda_2^b, \lambda_3^b$ вычисляются по формуле

$$(\lambda_i^\alpha(c))' = \lambda_i^\alpha + \lambda_i^\alpha poll(c).$$

Новые коэффициенты смертности для жертв $\lambda_1^m, \lambda_2^m, \lambda_1^d, \lambda_1^b$ вычисляются по формуле

$$(\lambda_i^\alpha(c))' = \lambda_i^\alpha + a_i^\alpha poll(c),$$

где a_i^α — постоянный коэффициент смертности из (1).

Разделение для коэффициентов на хищников $\lambda_2^d, \lambda_3^d, \lambda_2^b, \lambda_3^b$ и жертв $\lambda_1^m, \lambda_2^m, \lambda_1^d, \lambda_1^b$ при учёте загрязнений сделано для того, чтобы в множитель смертности от загрязнения не попала смертность от выедания хищниками из (1).

Карта загрязнений $poll(c)$, используемая в вычислительных экспериментах, имеет вид рис. 3. Функционал $poll(c)$ представляет собой плотность стандартного нормального распределения с центром в клетке с именем c_0 в южной части озера Байкал, умноженную на константу.

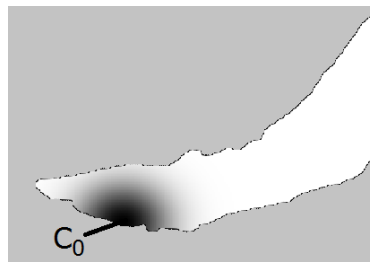


Рис. 3. Карта загрязнений: серый цвет — земля; белый — вода; более тёмный цвет означает большую интенсивность загрязнения

4. Применение модели для исследования влияния загрязнений

Для исследования влияния локальных загрязнений проведён вычислительный эксперимент. Начальное состояние — равномерное распределение особей по области моделирования, совпадающее по значению с устойчивым состоянием численностей, взятому из [3]. Значение $poll(c_0)$ в эксперименте равно 14.

Несколько итераций алгоритма для половозрелого макрогектопуса представлены на рис. 4. Вне области загрязнения наблюдается устойчивый образ из пятен. Неравномерное распределение обусловлено влиянием водных течений.

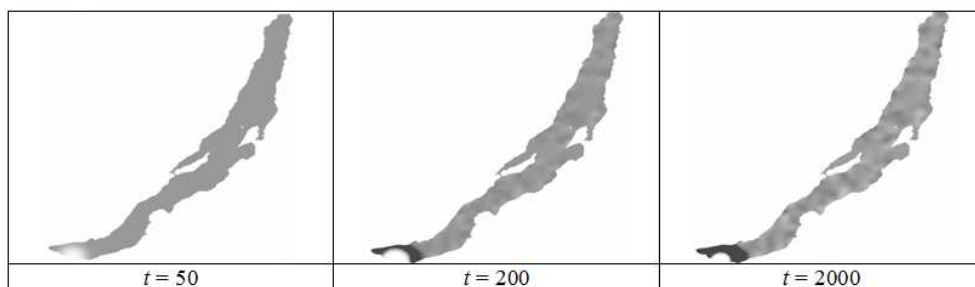


Рис. 4. Несколько итераций для половозрелого макрогектопуса. Более тёмный цвет означает большую плотность организмов

Динамика популяций в клетке на севере озера (рис. 5) стремится к устойчивому колебательному процессу с периодом колебаний 1 год. Годовые колебания — следствие сезонной зависимости коэффициентов рождаемости больших и малых голомянок.

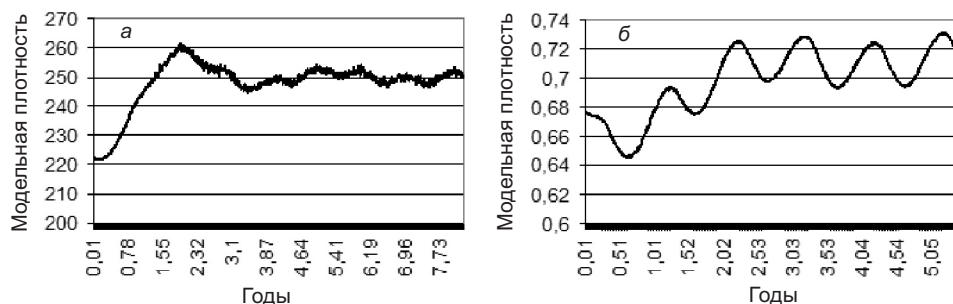


Рис. 5. Динамика модельной плотности в клетке на севере озера (без загрязнения) для неполовозрелого макрогектопуса (а) и неполовозрелой малой голомянки (б)

Динамика популяций в эпицентре загрязнения представлена на рис. 6. Значение $poll(c_0)$ загрязнения в эпицентре равно 14. Этого достаточно для того, чтобы все организмы погибли.

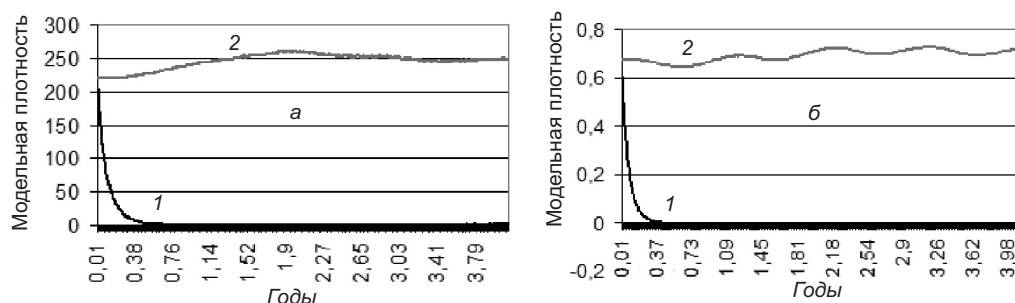


Рис. 6. Динамика модельной плотности в клетке в эпицентре загрязнения (кр. 1) для неполовозрелого макрогектопуса (а) и неполовозрелой малой голомянки (б); кр. 2 — аналогичная динамика в клетке без загрязнения

Динамика популяций в области загрязнения в клетке со значением интенсивности $poll = 2,3$ представлена на рис. 7. Численность жертв увеличилась, а численность хищников уменьшилась по сравнению со среднегодовым значением в области, где загрязнение не оказывает влияния.

Чтобы изучить зависимость среднегодовой плотности организмов от интенсивности загрязнения, были исследованы точки вдоль отрезка, показанного на рис. 8. Юго-восточный конец отрезка находится близ эпицентра загрязнения, северо-западный — в области, не подверженной загрязнению.

Распределение интенсивности загрязнения и изменение численности макрогектопуса на 2000-й итерации алгоритма вдоль отрезка с юго-востока на северо-запад представлены на рис. 9.

По результатам экспериментов можно сделать следующие выводы:

- при $poll(c) > 10$ плотность макрогектопуса на 2000-й итерации падает ниже 3 % от средней плотности в незагрязненной области, что позволяет говорить о практически полном вымирании организмов в загрязненной области;
- если $poll(c) \in (0,15, 5)$, то в этой области увеличено число жертв и уменьшено число хищников; степень различий зависит от значения $poll(m)$;

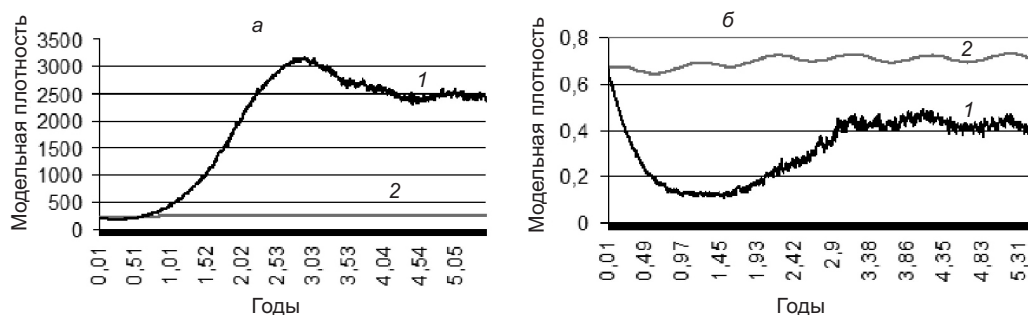


Рис. 7. Динамика модельной плотности в клетке со значением загрязнения $poll = 2,3$ (кр. 1) для неполовозрелого макрогектопуса (а) и неполовозрелой малой голомянки (б); кр. 2 — аналогичная динамика в клетке без загрязнения



Рис. 8. Отрезок, вдоль которого исследовалась динамика модельной плотности

- если $poll(c) < 0,03$, то влияние загрязнения незаметно на фоне среднегодовых колебаний численности организмов.

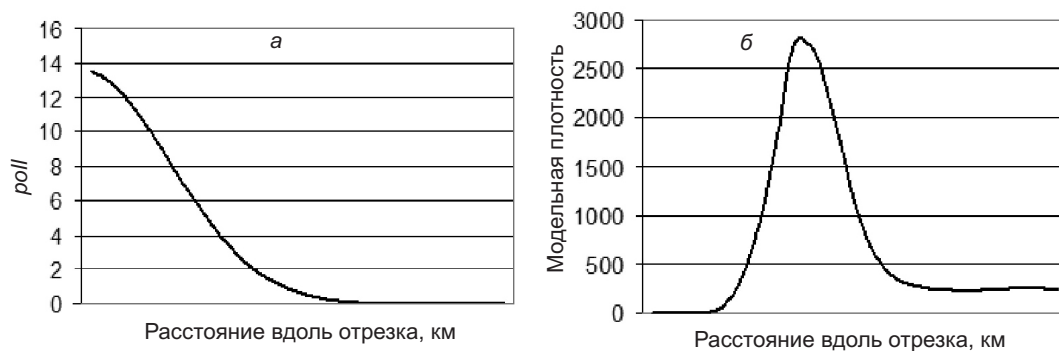


Рис. 9. Распределение интенсивности загрязнения вдоль исследуемого отрезка (а) и модельной плотности неполовозрелого макрогектопуса на 2000-й итерации (б). По оси абсцисс отложено расстояние на отрезке от эпицентра загрязнения, правая граница соответствует 11,5 км

Закключение

Предложенная ранее КА-модель динамики численности восьми групп организмов озера Байкал скорректирована и дополнена учётом пространственных особенностей области моделирования, зависимости взаимодействий между группами от времени года и перемещения особей под действием течений.

Модель верифицирована. Результаты верификации по критериям отношения продукции к биомассе и частот встречаемости отличаются от оценок, приведённых в работах [3, 8, 9], не более чем на 20 %.

Показано, что моделируемая динамика популяций — колебательный процесс с периодом в один год. Получена зависимость поведения модели от интенсивности загрязнения. Влияние загрязнения локально и не распространяется далеко за его пределы. Найдены предельные показатели интенсивности загрязнения: минимальное, при котором происходит вымирание организмов, и максимальное, влияние которого не заметно на фоне естественных годовых колебаний численности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Свирижев Ю. М., Логофет Д. О.* Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.
2. *Базыкин А. Д.* Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Ижевск: ИКИ, 2003. 368 с.
3. *Зоркальцев В. И., Казаева А. В., Мокрый И. В.* Модель взаимодействия трех пелагических видов организмов озера Байкал // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2008 № 1. С. 182–193.
4. *Афанасьев И. В.* Клеточно-автоматная модель динамики численности организмов озера Байкал // Прикладная дискретная математика. 2012. № 1. С. 121–132.
5. *Bandman O. L.* Cellular automata composition techniques for spatial dynamics simulation // Simulating Complex Systems by Cellular Automata. Understanding complex Systems / eds. A. G. Hoekstra et al. Berlin, 2010. P. 81–115.
6. *Бандман О. Л.* Клеточно-автоматные модели пространственной динамики // Системная информатика. 2006. № 10. С. 58–113.
7. *Medvedev Y. G.* Multi-particle cellular automata models for diffusion simulation // Meth. Tools Parall. Program. Multicomp. 2011. V. 6083/2011. P. 204–211.
8. *Мазепова Г. Ф., Тимошкин О. А., Мельник Н. Г. и др.* Атлас и определитель пелагиобиев Байкала. Новосибирск: Наука, 1995. 693 с.
9. *Стариков Г. В.* Голомянки Байкала. Новосибирск: Наука, 1977. 94 с.