ПРИКЛАДНАЯ ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

2014 Теоретические основы прикладной дискретной математики №2(24)

DOI 10.17223/20710410/24/2

УДК 519.716

ОБ ОДНОМ КОНТИНУАЛЬНОМ СЕМЕЙСТВЕ β-ЗАМКНУТЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ[1]

Д. К. Подолько

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия

E-mail: podolko_dk@mail.ru

Приводится пример континуального семейства β-замкнутых классов функций многозначной логики, содержащих только функции, принимающие не более трёх значений, где оператор β-замыкания определён на основе кодирования функций многозначной логики в двоичной системе счисления. Доказываются некоторые свойства данного семейства классов.

Ключевые слова: *функции многозначной логики, суперпозиция, замкнутые классы, β-замыкание.*

Введение

Широко известно, что семейство классов функций k-значной логики, замкнутых относительно операции суперпозиции, является континуальным при $k \geqslant 3$ [1, 2]. В связи с этим возникают значительные сложности при описании данных классов, и поэтому для их изучения часто рассматривают различные усиления операции суперпозиции, которые позволяют получить семейства замкнутых классов с более обозримой структурой [3–5].

В работе [6] использован аналогичный подход. В ней определен оператор β-замыкания на основе кодирования функций многозначной логики в двоичной системе счисления и построено отображение семейства β-замкнутых классов функций k-значной логики в семейство замкнутых классов булевых функций. При этом установлено, что в каждый класс булевых функций отображается конечное (и непустое) множество β-замкнутых классов функций k-значной логики, содержащих только функции, принимающие не более двух значений. Таким образом, доказана счётность семейства различных β-замкнутых классов, содержащих только функции, принимающие не более двух значений, в то время как аналогичное семейство классов, замкнутых относительно операции суперпозиции, является континуальным [1, 2].

В настоящей работе приводится континуальное семейство β-замкнутых классов функций k-значной логики, содержащих только функции, принимающие не более трёх значений, а также доказываются некоторые свойства данного семейства классов.

1. Основные определения и обозначения

Сформулируем основные определения (подробнее см. [6]). Пусть $k \geqslant 2$. Через E_k обозначим множество $\{0, 1, \ldots, k-1\}$, а через E_k^n, где $n \geqslant 1$, — множество всех наборов длины n, компоненты которых принадлежат E_k. Через P_k обозначим множество всех функций k-значной логики.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №11-01-00508 и 14-01-00598) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

Будем рассматривать только случаи, когда значность k логики задаётся соотношением $k = 2^m$, где $m \geqslant 2$. Тогда каждое число α из E_k можно записать в двоичной системе счисления. Это означает, что ему взаимно однозначно сопоставляется двоичный вектор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ из E_2^m, который будем обозначать через $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle$ или $\widehat{\alpha}$. Переменной x, принимающей значения из E_k, можно поставить в соответствие вектор-переменную $\langle x_1, \ldots, x_m \rangle$, где $x_1, \ldots, x_m$ принимают значения из множества E_2, таким образом, что каждому значению α переменной x ставится в соответствие значение $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle$ вектор-переменной $\langle x_1, \ldots, x_m \rangle$. Данную вектор-переменную будем обозначать также через $\widehat{x}$, а каждую из переменных $x_1, \ldots, x_m$ называть *компонентой вектор-переменной* $\widehat{x}$ или просто *компонентой переменной* x.

Произвольной n-местной функции $F(x^1, \ldots, x^n)$ из P_k можно сопоставить вектор-функцию $\langle f_1, \ldots, f_m \rangle$, где функции $f_1, \ldots, f_m$ являются булевыми и каждая из них зависит от всех булевых переменных $x_1^j, \ldots, x_m^j$, $j = 1, \ldots, n$ (здесь $\widehat{x}^j = \langle x_1^j, \ldots, x_m^j \rangle$). Данную вектор-функцию будем также обозначать через $\widehat{F}(\langle x_1^1, \ldots, x_m^1 \rangle, \ldots, \langle x_1^n, \ldots, x_m^n \rangle)$ или $\widehat{F}$.

Описанные представления будем называть *двоичным представлением числа α, переменной x* и *функции F* соответственно.

Пусть $F \in P_k$ и $\widehat{F} = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$. Каждую из булевых функций $f_1, \ldots, f_m$ будем называть *компонентой вектор-функции* $\widehat{F}$, а также *компонентой функции* F. Множество всех компонент функции F обозначим через $b(F)$.

Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_k$. Класс булевых функций, совпадающий с замыканием множества $\bigcup\limits_{F \in \mathcal{A}} b(F)$ относительно операций суперпозиции и введения несущественной переменной, будем называть *булевым замыканием множества* $\mathcal{A}$ и обозначать через $B(\mathcal{A})$.

Будем говорить, что функция H из P_k получена из функций множества $\mathcal{A}$ при помощи *операции двоичной суперпозиции*, если найдутся функция F из множества $\mathcal{A}$ и функции $g_1, \ldots, g_{mn}$ из множества $B(\mathcal{A})$ (где n — число переменных функции F), такие, что выполняется следующее равенство:

$$\widehat{H} = \widehat{F}\big(\langle g_1, \ldots, g_m \rangle, \ldots, \langle g_{m(n-1)+1}, \ldots, g_{mn} \rangle\big).$$

Множество всех функций, которые могут быть получены из функции системы $\mathcal{A}$ при помощи операций двоичной суперпозиции и введения несущественной переменной, будем называть *β-замыканием множества* $\mathcal{A}$ и обозначать через $[\mathcal{A}]_\beta$. В работе [6] установлено, что введённый оператор β-замыкания удовлетворяет всем необходимым свойствам оператора замыкания, алгебраическое описание которых можно найти, например, в [7].

Пусть $F \in P_k$. Через $D(F)$ будем обозначать множество значений функции F, а через $P_{k|r}$, где $1 \leqslant r \leqslant k$, — множество всех функций k-значной логики, принимающих не более r значений.

2. Континуальное семейство β-замкнутых классов

Приведём пример континуального семейства β-замкнутых классов функций из $P_{k|3}$. Для каждого $n \geqslant 2$ определим функцию F_n из P_k, зависящую от переменных x^1, …, x^n, y^1, …, y^n, через её двоичное представление $\langle f_{n,1}, \ldots, f_{n,m} \rangle$:

$$f_{n,1} = x_1^1 \vee x_1^2 \vee \cdots \vee x_1^n \vee y_1^1 \& y_1^2 \& \ldots \& y_1^n;$$

$$f_{n,i} = y_1^1 \vee y_1^2 \vee \cdots \vee y_1^n \vee d_n(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n) \vee \overline{x_1^1} \& \overline{x_1^2} \& \ldots \& \overline{x_1^n}, \quad 2 \leqslant i \leqslant m,$$

где $x \vee y$, $x \& y$, $\overline{x}$ — соответственно дизъюнкция, конъюнкция и отрицание в двузначной логике, а $d_n(x_1^1, \ldots, x_1^n) = \bigvee\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_1^i \& x_1^j$.

Так как каждая из компонент функции F_n зависит только от первых компонент переменных $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n$, в дальнейшем будем обозначать булевы переменные x_1^i, y_1^i через x_i и y_i соответственно, $i = 1, \ldots, n$. Тогда

$$f_{n,1} = x_1 \vee \cdots \vee x_n \vee y_1 \& \ldots \& y_n;$$
$$f_{n,i} = y_1 \vee \cdots \vee y_n \vee d_n(x_1, \ldots, x_n) \vee \overline{x_1} \& \ldots \& \overline{x_n}, \quad 2 \leqslant i \leqslant m.$$

Для функций F_n, $n \geqslant 2$, выполняются следующие свойства.

1) Компоненты функции F_n существенно зависят только от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$.
2) $B(\{F_n\}) = O^\infty$, где через O^∞ обозначается замкнутый класс всех булевых функций f, для которых найдётся переменная x, от которой зависит функция f, и такая, что $f \geqslant x$ (подробнее см., например, [8]).
Данное свойство следует из того, что все компоненты функции F_n принадлежат классу O^∞, а функция $f_{n,2}$ не содержится в классах MO^∞ и O_0^∞ — обоих предполных классах в классе O^∞ [8] — и тем самым порождает все функции из этого класса.
3) $D(F_n) = \{\alpha_{01}, \alpha_{10}, \alpha_{11}\}$, где двоичные представления чисел α_{01}, α_{10}, α_{11} равны $\langle 0, 1, 1, \ldots, 1\rangle$, $\langle 1, 0, 0, \ldots, 0\rangle$ и $\langle 1, 1, 1, \ldots, 1\rangle$ соответственно.
Так как функции $f_{n,2}, \ldots, f_{n,m}$ равны между собой, то двоичное представление функции F_n может принимать значения только из множества
$$\{\langle 0, 0, 0, \ldots, 0\rangle,\ \langle 0, 1, 1, \ldots, 1\rangle,\ \langle 1, 0, 0, \ldots, 0\rangle,\ \langle 1, 1, 1, \ldots, 1\rangle\}.$$
Функция $f_{n,1}$ равна нулю тогда и только тогда, когда $x_1 = \cdots = x_n = 0$ и хотя бы одна из переменных $y_1, \ldots, y_n$ равна 0. Но если $x_1 = \cdots = x_n = 0$, то функция $f_{n,2}$ равна единице, поэтому двоичное представление функции F_n не принимает значение $\langle 0, 0, 0 \ldots, 0\rangle$, а значения $\langle 0, 1, 1, \ldots, 1\rangle$, $\langle 1, 0, 0, \ldots, 0\rangle$, $\langle 1, 1, 1, \ldots, 1\rangle$ принимает соответственно при следующих значениях переменных:
   - $x_1 = \cdots = x_n = y_1 = \cdots = y_n = 0$;
   - $x_1 = 1,\ x_2 = \cdots = x_n = y_1 = \cdots = y_n = 0$;
   - $x_1 = \cdots = x_n = y_1 = \cdots = y_n = 1$.

Отметим, что похожее множество функций использовалось в работе [9] для доказательства континуальности семейства самодвойственных классов функций k-значной логики.

Положим $\mathcal{W} = \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} \{F_n\}$.

Лемма 1. Для всех $n \geqslant 2$ справедливо соотношение $F_n \notin \big[\mathcal{W} \backslash \{F_n\}\big]_\beta$.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы 1 неверно. Это значит, что имеет место соотношение

$$\widehat{F_n} = \widehat{H}\big(\langle \omega_1, \ldots, \omega_m\rangle, \ldots, \langle \omega_{m(r-1)+1}, \ldots, \omega_{mr}\rangle\big), \tag{1}$$

где функция H принадлежит множеству $\mathcal{W} \backslash \{F_n\}$ либо получена из функций данного множества путём введения несущественных переменных; r — число переменных функции H; булевы функции $\omega_1, \ldots, \omega_{mr}$ принадлежат множеству $B(\mathcal{W} \backslash \{F_n\})$.

Поскольку функция F_n не содержит несущественных переменных, то без ограничения общности можно положить, что $H = F_p$ для некоторого числа p, $p \geqslant 2$, $p \neq n$, и $r = 2p$. Так как $B(\{F_i\}) = O^\infty$ для любого $i \geqslant 2$, то $B(\mathcal{W}\backslash\{F_n\}) = O^\infty$, и поэтому все функции $\omega_1, \ldots, \omega_{2mp}$ принадлежат классу O^∞, а так как все компоненты функции F_n существенно зависят только от переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, то без ограничения общности можно считать, что булевы функции $\omega_1, \ldots, \omega_{2mp}$ зависят только от тех же переменных.

Поскольку все компоненты функции F_p существенно зависят только от первых компонент вектор-переменных, то компоненты $\omega_2, \ldots, \omega_m, \ldots, \omega_{m(2p-1)+2}, \ldots, \omega_{2mp}$ можно заменить на константу 1, которая содержится в классе O^∞.

Для всех i, $1 \leqslant i \leqslant p$, обозначим функцию $\omega_{m(i-1)+1}$ через g_i, а функцию $\omega_{m(p+i-1)+1}$ — через h_i. В данных обозначениях соотношение (1) можно записать при помощи эквивалентной системы равенств:

$$\begin{cases} f_{n,1} = g_1 \vee \cdots \vee g_p \vee h_1 \& \ldots \& h_p; & (2)\\ f_{n,i} = h_1 \vee \cdots \vee h_p \vee d_p(g_1, \ldots, g_p) \vee \overline{g_1} \& \ldots \& \overline{g_p}, \quad 2 \leqslant i \leqslant m. & (3) \end{cases}$$

Так как $g_i \in O^\infty$, то g_i мажорирует некоторую переменную из множества $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}$, $i = 1, \ldots, p$. Предположим, что для некоторого числа i, $1 \leqslant i \leqslant p$, функция g_i мажорирует переменную y_j, $1 \leqslant j \leqslant n$. Рассмотрим набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n})$ из E_2^{2n}, у которого все компоненты равны нулю, кроме компоненты с номером $n+j$ (она соответствует переменной y_j). Тогда $g_i(\widetilde{\alpha}) = 1$. Но $f_{n,1}(\widetilde{\alpha}) = 0$, а значит, не выполняется соотношение (2). Следовательно, ни одна из функций $g_1, \ldots, g_p$ не мажорирует ни одну из переменных $y_1, \ldots, y_n$. Аналогичными рассуждениями получаем, что ни одна из функций $h_1, \ldots, h_p$ не мажорирует ни одну из переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Далее предположим, что выполняется неравенство $p > n$. Так как каждая из функций $g_1, \ldots, g_p$ мажорирует хотя бы одну переменную из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$, найдётся переменная x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, которая мажорируется как минимум двумя функциями g_{i_1} и g_{i_2}, $1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant p$. Рассмотрим набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n})$ из E_2^{2n}, у которого все компоненты равны нулю, кроме компоненты с номером i (она соответствует переменной x_i). Тогда $g_{i_1}(\widetilde{\alpha}) = g_{i_2}(\widetilde{\alpha}) = 1$, а следовательно, $d_p\big(g_1(\widetilde{\alpha}), \ldots, g_p(\widetilde{\alpha})\big) = 1$. Но $f_{n,2}(\widetilde{\alpha}) = 0$, так как $d_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \overline{\alpha_1} \& \ldots \& \overline{\alpha_n} = \alpha_{n+1} \vee \cdots \vee \alpha_{2n} = 0$. Поэтому не выполняется соотношение (3).

Теперь предположим, что $p < n$. Для каждого числа i, $1 \leqslant i \leqslant p$, функция h_i мажорирует хотя бы одну переменную из множества $\{y_1, \ldots, y_n\}$. Это означает, что найдётся число j_i, $1 \leqslant j_i \leqslant n$, для которого $h_i \geqslant y_{j_i}$. Рассмотрим набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n})$ из E_2^{2n}, у которого компоненты с номерами $n + j_1, \ldots, n + j_p$ равны единице (они соответствуют переменным $y_{j_1}, \ldots, y_{j_p}$), а остальные компоненты равны нулю. Тогда $h_1(\widetilde{\alpha}) = \cdots = h_p(\widetilde{\alpha}) = 1$, а следовательно, $h_1(\widetilde{\alpha}) \& \ldots, \& h_p(\widetilde{\alpha}) = 1$. Поскольку $p < n$, $\{i_1, \ldots, i_p\} \neq \{1, \ldots, n\}$. Поэтому найдётся число j, $1 \leqslant j \leqslant n$, такое, что $\alpha_{n+j} = 0$. Значит, $\alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_n = \alpha_{n+1} \& \ldots \& \alpha_{2n} = 0$, и на наборе $\widetilde{\alpha}$ функция $f_{n,1}$ равна нулю. Поэтому не может выполняться соотношение (2), что и требовалось доказать. ■

Теорема 1. Пусть $k = 2^m$, где $m \geqslant 2$. Тогда семейство различных β-замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ с булевым замыканием O^∞ является континуальным.

Доказательство. Для каждого подмножества S множества $\{2, 3, 4, \ldots\}$ определим множество функций k-значной логики $\{F_i : i \in S\}$, которое будем обозначать через $\mathcal{W}(S)$.

Рассмотрим два различных подмножества R и Q множества $\{2, 3, 4, \dots\}$. Для них найдётся число n, такое, что $n \in R\backslash Q$ или $n \in Q\backslash R$. Без ограничения общности будем считать, что $n \in R\backslash Q$. Тогда $F_n \in [\mathcal{W}(R)]_\beta$, но по лемме 1 выполняется соотношение $F_n \notin [\mathcal{W}\backslash\{F_n\}]_\beta$, а значит, $F_n \notin [\mathcal{W}(Q)]_\beta$.

Получили, что для различных подмножеств R и Q множества $\{2, 3, 4, \dots\}$ различны и β-замкнутые классы функций $[\mathcal{W}(R)]_\beta$ и $[\mathcal{W}(Q)]_\beta$. Так как семейство различных таких подмножеств имеет континуальную мощность, то семейство различных β-замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ с булевым замыканием O^∞ как минимум континуально.

Множество всех функций k-значной логики является счётным, а следовательно, семейство его подмножеств континуально. Поэтому семейство различных β-замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ с булевым замыканием O^∞ имеет мощность не более континуума. Значит, оно континуально, что и требовалось показать. ■

3. Другие семейства β-замкнутых классов функций из $P_{k|3}$

Покажем теперь, что для каждого класса $\mathcal{B}$ булевых функций, который строго содержится в классе O^∞, семейство β-замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ с булевым замыканием $\mathcal{B}$ является конечным. Для этого введём вспомогательные определения.

Пусть $f, f_1, \dots, f_p$ — булевы функции, зависящие от одного и того же множества переменных. Функцию f будем называть *функционально зависимой от функций* $f_1, \dots, f_p$, если существует p-местная булева функция g, такая, что $f = g(f_1, \dots, f_p)$. В ином случае функцию f будем называть *функционально независимой от функций* $f_1, \dots, f_p$. Функции, реализующие константы 0 и 1, будем считать функционально зависимыми от пустого множества функций. Если для всех чисел j, $1 \leqslant j \leqslant p$, функции f_j являются функционально независимыми от функций $f_1, \dots, f_{j-1}, f_{j+1}, \dots, f_p$, то множество функций $\{f_1, \dots, f_p\}$ назовём *функционально независимым.*

Лемма 2. Пусть $A = \{f_1, \dots, f_p\}$ — функционально независимое множество булевых функций и $d(A)$ — число значений булевой вектор-функции $(f_1, \dots, f_p)$. Тогда выполняются соотношения $\lceil \log_2 d(A) \rceil \leqslant p \leqslant d(A) - 1$.

Доказательство. Так как $d(A)$ — число значений булевой вектор-функции $(f_1, \dots, f_p)$, то очевидно, что верно неравенство $d(A) \leqslant 2^p$. Поэтому $\log_2 d(A) \leqslant p$, а так как p является натуральным числом, то $\lceil \log_2 d(A) \rceil \leqslant p$.

Доказательство соотношения $p \leqslant d(A) - 1$ будем вести индукцией по p.

Пусть $p = 1$. Тогда функция f_1 не является константой по определению функционально независимого множества. Поэтому $d(A) = 2$, что и необходимо.

Теперь предположим, что для любого функционально независимого множества $A' = \{f_1, \dots, f_s\}$ булевых функций, где $1 \leqslant s < p$ и $d(A')$ — число значений булевой вектор-функции $(f_1, \dots, f_s)$, верно соотношение $s \leqslant d(A') - 1$.

Покажем, что выполняется соотношение $p \leqslant d(A) - 1$ для функционально независимого множества $\{f_1, \dots, f_p\}$ булевых функций. Для этого рассмотрим его подмножество $A' = \{f_1, \dots, f_{p-1}\}$. Это функционально независимое множество функций, поэтому по предположению индукции верно соотношение $p-1 \leqslant d(A')-1$. Если для любого вектора $(a_1, \dots, a_{p-1})$ из E_2^{p-1} на множестве наборов, на которых вектор-функция $(f_1, \dots, f_{p-1})$ принимает значение $(a_1, \dots, a_{p-1})$, функция f_p является константой, то функция f_p является функционально зависимой от функций $f_1, \dots, f_{p-1}$, что неверно. Поэтому найдётся вектор $(a_1, \dots, a_{p-1})$ из E_2^{p-1}, такой, что на множестве наборов, на которых вектор-функция $(f_1, \dots, f_{p-1})$ принимает значение $(a_1, \dots, a_{p-1})$, функция f_p

не является константой. Значит, $d(A) \geqslant d(A') + 1$, из чего и следует необходимое соотношение. ■

Пусть $F \in P_k$ и $\widehat{F} = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$. Множество компонент $\{f_{i_1}, \ldots, f_{i_p}\}$ будем называть *базой функции* F, если данное множество является функционально независимым, а остальные компоненты функции F являются функционально зависимыми от функций $f_{i_1}, \ldots, f_{i_p}$.

Лемма 3. Пусть $F \in P_k$, $\widehat{F} = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$, $\{f_{i_1}, \ldots, f_{i_p}\}$ — база функции F и $|D(F)| = r$. Тогда выполняются соотношения $\lceil \log_2 r \rceil \leqslant p \leqslant r - 1$.

Доказательство. Так как значение функции F однозначным образом определяется по значениям функций из её базы, то доказываемые соотношения вытекают из леммы 2. ■

Лемма 4. Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_{k|3}$, $[\mathcal{A}]_\beta = \mathcal{A}$, $R \subseteq \mathcal{A}$, $B(\mathcal{A}) = B(R)$ и класс $B(\mathcal{A})$ содержится в классе M или в классе T_{01}. Тогда для любой функции F из множества $\mathcal{A}$ найдётся функция H_F из $\mathcal{A}$, зависящая от одной переменной, и такая, что $F \in [R \cup \{H_F\}]_\beta$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию F из множества $\mathcal{A}$. Обозначим через n число переменных функции F, а через $\langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ — её двоичное представление. Если функция F является константой, то в качестве H_F можно взять функцию, реализующую ту же константу, что и функция F, и зависящую от одной переменной.

Пусть теперь функция F принимает два или три значения. Тогда среди её компонент содержатся не только константы, а значит, класс $B(\mathcal{A})$ содержит селекторные функции [8].

Рассмотрим случай, когда функция F принимает три значения (более простой случай, когда функция F принимает два значения, рассматривается аналогично). По лемме 3 у неё найдётся база, состоящая ровно из двух функций. Без ограничения общности будем считать, что базой является множество $\{f_1, f_2\}$. Функции f_1 и f_2 не являются функционально зависимыми друг от друга. Поэтому они не равны между собой и не являются константами. Если класс $B(\mathcal{A})$ содержится в классе монотонных функций, то функции f_1 и f_2 являются монотонными, а значит, верны равенства $f_1(0, \ldots, 0) = f_2(0, \ldots, 0) = 0$ и $f_1(1, \ldots, 1) = f_2(1, \ldots, 1) = 1$. Если класс $B(\mathcal{A})$ содержится в классе T_{01}, то выполняются аналогичные равенства.

Функции f_1 и f_2 не равны между собой. Значит, найдётся набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{mn})$ из E_2^{mn}, на котором значения данных функций различны. Без ограничения общности будем считать, что $f_1(\widetilde{\alpha}) = 1$, а $f_2(\widetilde{\alpha}) = 0$. Поскольку функция F принимает ровно три значения, а значения её компонент $f_3, \ldots, f_m$ однозначным образом определяются по значениям функций f_1 и f_2, то двоичное представление функции F принимает следующие значения:

$$\big\langle 0, 0, f_3(0, \ldots, 0), \ldots, f_m(0, \ldots, 0) \big\rangle,$$
$$\big\langle 1, 0, f_3(\alpha_1, \ldots, \alpha_{mn}), \ldots, f_m(\alpha_1, \ldots, \alpha_{mn}) \big\rangle,$$
$$\big\langle 1, 1, f_3(1, \ldots, 1), \ldots, f_m(1, \ldots, 1) \big\rangle.$$

Для каждого числа i, $1 \leqslant i \leqslant mn$, определим булеву функцию $g_i(x_1, x_2)$ следующим образом: если $\alpha_i = 1$, то $g_i = x_1$, а если $\alpha_i = 0$, то $g_i = x_2$. Все эти функции являются селекторными, а следовательно, содержатся в классе $B(\mathcal{A})$.

Далее рассмотрим вектор-функцию $\langle f_1, \ldots, f_m \rangle (\langle g_1, \ldots, g_m \rangle, \ldots, \langle g_{m(n-1)+1}, \ldots, g_{mn} \rangle)$. Она является двоичным представлением некоторой функции H_F из P_k. Так как $m \geqslant 2$, а функции $g_1, \dots, g_{mn}$ зависят от булевых переменных x_1 и x_2, функция H_F зависит от одной переменной, а поскольку все функции $g_1, \dots, g_{mn}$ содержатся в множестве $B(\mathcal{A})$ и класс $\mathcal{A}$ является β-замкнутым, функция H_F принадлежит множеству $\mathcal{A}$. Покажем, что она искомая.

Обозначим через $\langle h_1, \dots, h_m \rangle$ двоичное представление функции H_F. Так как функции $f_3, \dots, f_m$ являются функционально зависимыми от функций f_1 и f_2, по построению функции $h_3, \dots, h_m$ являются функционально зависимыми от функций h_1 и h_2, причём эти функциональные зависимости могут быть заданы теми же функциями.

Докажем соотношение $\widehat{F} = \langle h_1, \dots, h_m \rangle(\langle f_1, \dots, f_m \rangle)$. Так как функции $f_3, \dots, f_m$ являются функционально зависимыми от функций f_1 и f_2, а функции $h_3, \dots, h_m$ — от функций h_1 и h_2, достаточно доказать справедливость равенств $f_1 = h_1(f_1, \dots, f_m)$ и $f_2 = h_2(f_1, \dots, f_m)$. А так как компоненты функции H_F существенно зависят только от переменных x_1 и x_2, достаточно показать, что $f_1 = h_1'(f_1, f_2)$ и $f_2 = h_2'(f_1, f_2)$, где функции h_1', h_2' получены удалением несущественных переменных $x_3, \dots, x_m$ из функций h_1 и h_2 соответственно. Для этого рассмотрим произвольный набор $\widetilde{\gamma}$ из E_2^{mn}. Имеют место три случая:

— Если $f_1(\widetilde{\gamma}) = f_2(\widetilde{\gamma}) = 0$, то $h_j'(0,0) = f_j\big(g_1(0,0), \dots, g_{mn}(0,0)\big) = f_j(0, \dots, 0) = 0$, $j = 1, 2$, что и требуется.

— Случай, когда $f_1(\widetilde{\gamma}) = f_2(\widetilde{\gamma}) = 1$, рассматривается аналогично предыдущему.

— Если $f_1(\widetilde{\gamma}) = 1$, а $f_2(\widetilde{\gamma}) = 0$, то $h_1(1,0) = f_1\big(g_1(1,0), \dots, g_{mn}(1,0)\big) = f_1(\widetilde{\alpha}) = 1$, а $h_2(1,0) = f_2(\widetilde{\alpha}) = 0$, что и необходимо.

Таким образом, верно равенство $\widehat{F} = \langle h_1, \dots, h_m \rangle(\langle f_1, \dots, f_m \rangle)$, а поскольку каждая из функций $f_1, \dots, f_m$ содержится в классе $B(R)$, получим $F \in [R \cup \{H_F\}]_\beta$, что и требовалось доказать. ■

Лемма 5. Пусть $F \in P_k$, $F \notin P_{k|1}$. Тогда в β-замкнутом классе $[\{F\}]_\beta$ найдётся функция, зависящая от одной переменной, множество компонент которой содержит селекторную функцию.

Доказательство. Обозначим двоичное представление функции F через $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$, а число её переменных — через n. Если все компоненты функции F являются константами, то функция F принимает одно значение, что неверно по условиям леммы. Поэтому среди компонент функции F найдётся функция, не являющаяся константой. Без ограничения общности положим, что это функция f_1. Тогда класс $[\{f_1\}]$ содержит селекторные функции [8]. Поэтому $x_1 \in [\{f_1\}]$ и верно равенство $x_1 = f_1(g_1, \dots, g_{mn})$ для некоторых функций $g_1, \dots, g_{mn}$, которые принадлежат классу $[\{f_1\}]$. Поскольку функция x_1 зависит только от переменной x_1, без ограничения общности можно считать, что функции $g_1, \dots, g_{mn}$ тоже зависят только от переменной x_1, а так как $f_1 \in B(\{F\})$, в силу замкнутости класса $B(\{F\})$ верно включение $\{g_1, \dots, g_{mn}\} \subseteq B(\{F\})$.

Обозначим через H функцию, имеющую следующее двоичное представление:

$$\langle f_1, \dots, f_m \rangle\big(\langle g_1, \dots, g_m \rangle, \dots, \langle g_{m(n-1)+1}, \dots, g_{mn} \rangle\big).$$

По построению функция H содержится в классе $[\{F\}]_\beta$ и зависит от одной переменной. А так как выполняется соотношение $f_1(g_1, \dots, g_{mn}) = x_1$, имеем $x_1 \in b(H)$, что и требовалось показать. ■

Лемма 6. Пусть $\mathcal{B}$ — замкнутый класс булевых функций, содержащийся в классе M или в классе T_{01}. Тогда существует число $r = r(\mathcal{B})$, такое, что у любого

β-замкнутого класса $\mathcal{A}$ функций из $P_{k|3}$ с булевым замыканием $\mathcal{B}$ существует конечный базис, все функции которого зависят не более чем от r переменных.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — β-замкнутый класс функций из $P_{k|3}$, такой, что $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$. Если все функции из класса $\mathcal{A}$ являются константами, то утверждение леммы 6 очевидно, а в качестве r можно взять число 1.

Пусть теперь среди функций класса $\mathcal{A}$ имеется хотя бы одна функция, принимающая не менее двух значений. Обозначим её через F. Тогда по лемме 5 в классе $[\{F\}]_\beta$ существует функция H, зависящая от одной переменной, множество компонент которой содержит селекторную функцию. Так как $F \in \mathcal{A}$ и класс $\mathcal{A}$ является β-замкнутым, верно $H \in \mathcal{A}$.

Известно, что у класса $\mathcal{B}$ существует конечный базис [8]. Обозначим его функции через $g_1, \ldots, g_s$, а переменные, от которых они зависят, — через $x_1^1, \ldots, x_1^r$, где r является максимальным числом переменных у данных функций. Для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant s$, определим функцию G_j из P_k через её двоичное представление: $\widehat{G_j} = \widehat{H}(\langle g_j, \ldots, g_j \rangle)$. Тогда функция G_j зависит не более чем от r переменных, а так как $\{g_1, \ldots, g_s\} \subseteq B(\mathcal{A})$ и класс $\mathcal{A}$ является β-замкнутым, выполняется $G_j \in \mathcal{A}$.

Поскольку множество компонент функции H содержит селекторную функцию, $g_j \in b(G_j)$, $j = 1, \ldots, s$. Поэтому верно равенство $B(\{G_1, \ldots, G_s\}) = B(\mathcal{A})$, и по лемме 4 для любой функции F из множества $\mathcal{A}$ можно выбрать функцию H_F из $\mathcal{A}$, зависящую от одной переменной и такую, что $F \in [\{G_1, \ldots, G_s, H_F\}]_\beta$. Значит, верно включение $\mathcal{A} \subseteq [\{G_1, \ldots, G_s\} \cup \{H_F | F \in \mathcal{A}\}]_\beta$. Но так как все функции из множеств $\{G_1, \ldots, G_s\}$ и $\{H_F | F \in \mathcal{A}\}$ содержатся в $\mathcal{A}$, верно и обратное включение. Поэтому $\mathcal{A} = [\{G_1, \ldots, G_s\} \cup \{H_F | F \in \mathcal{A}\}]_\beta$.

Так как число функций из $\mathcal{A}$, зависящих от одной переменной, конечно, конечно и множество $\{H_F | F \in \mathcal{A}\}$, а поскольку функции $G_1, \ldots, G_s$ зависят не более чем от r переменных, где r зависит только от $\mathcal{B}$, получаем утверждение леммы 6. ■

Теорема 2. Пусть $k = 2^m$, $m \geqslant 2$, а $\mathcal{B}$ — замкнутый класс булевых функций, содержащийся в классе M или в классе T_{01}. Тогда число различных β-замкнутых классов $\mathcal{A}$ функций из $P_{k|3}$ с булевым замыканием $\mathcal{B}$ является конечным.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — произвольный β-замкнутый класс функций из $P_{k|3}$, такой, что $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$. Тогда по лемме 6 в классе $\mathcal{A}$ найдётся конечный базис, все функции которого зависят не более чем от r переменных, где r зависит только от класса $\mathcal{B}$. Так как число функций из $P_{k|3}$, зависящих не более чем от r фиксированных переменных, является конечным, конечно и число их подмножеств. Поэтому конечно число рассматриваемых β-замкнутых классов функций. ■

Следствие 1. Пусть $k = 2^m$, где $m \geqslant 2$. Тогда для любого замкнутого класса $\mathcal{B}$ булевых функций, такого, что $\mathcal{B} \subseteq O^\infty$, $\mathcal{B} \neq O^\infty$, семейство β-замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ с булевым замыканием $\mathcal{B}$ является конечным.

Доказательство. Если класс $\mathcal{B}$ содержится в O^∞ и $\mathcal{B} \neq O^\infty$, то либо $\mathcal{B} \subset M$, либо $\mathcal{B} \subset T_{01}$, либо выполняются оба соотношения [8]. Поэтому по теореме 2 семейство β-замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ с булевым замыканием $\mathcal{B}$ является конечным. ■

Рассмотрим далее множество Q замкнутых классов $\mathcal{B}$ булевых функций, для которых число различных β-замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ с булевым замыканием $\mathcal{B}$ не является конечным. По теореме 2 классы, содержащиеся в классе M или в классе T_{01}, не принадлежат множеству Q.

Несложно показать, что для любой функции F из P_k, все компоненты которой являются линейными функциями, число её значений есть степень двойки, а для любой функции F, все компоненты которой являются самодвойственными функциями, число её значений является чётным. Поэтому если $\mathcal{A} \subseteq P_{k|3}$, $[\mathcal{A}]_\beta = \mathcal{A}$ и $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$, где класс $\mathcal{B}$ содержится в классе L или в классе S, то $\mathcal{A} \subseteq P_{k|2}$. В работе [6] доказано, что число различных β-замкнутых классов функций из $P_{k|2}$ с булевым замыканием $\mathcal{B}$ является конечным. Поэтому конечно и число различных β-замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ с булевым замыканием $\mathcal{B}$, а значит, ни один из классов линейных или самодвойственных функций не принадлежит множеству Q, и множество Q содержится в следующем множестве классов [8]:

$$\{P_2,\, T_0,\, T_1\} \cup \{O^\mu,\, I^\mu : \mu \geqslant 2\} \cup \{O^\infty,\, I^\infty\}.$$

В данном множестве классы O^∞ и I^∞ являются минимальными по включению, а по теореме 1 класс O^∞ содержится в множестве Q. Поскольку класс I^∞ является двойственным к классу O^∞, то и он, очевидно, содержится в Q. Поэтому имеет место следующая теорема

Теорема 3. Пусть $k = 2^m$, где $m \geqslant 2$. Тогда классы O^∞ и I^∞ являются минимальными по включению среди всех замкнутых классов $\mathcal{B}$ булевых функций, для которых число различных β-замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ с булевым замыканием $\mathcal{B}$ не является конечным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Янов Ю. И., Мучник А. А.* О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127. № 1. С. 44–46.
2. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001. 384 с.
3. *Нгуен Ван Хоа.* О семействах замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами // Дискретная математика. 1993. Т. 5. Вып. 4. С. 87–108.
4. *Марченков С. С.* S-классификация функций многозначной логики // Дискретная математика. 1997. Т. 9. Вып. 3. С. 125–152.
5. *Тарасова О. С.* Классы функций k-значной логики, замкнутые относительно операций суперпозиции и перестановок // Матем. вопросы кибернетики. Сб. статей. Вып. 13. М.: Физматлит, 2004. С. 59–112.
6. *Подолько Д. К.* О классах функций, замкнутых относительно специальной операции суперпозиции // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2013. № 6. С. 54–57.
7. *Кон П.* Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968. 352 с.
8. *Угольников А. Б.* Классы Поста: учеб. пособие. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова, 2008. 64 с.
9. *Марченков С. С.* О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики. II // Проблемы кибернетики. 1983. Т. 40. С. 261–266.