2014 Прикладная теория графов №2(24)
DOI 10.17223/20710410/24/8

УДК 519.248:62-192+519.176

ВЫВОД АСИМПТОТИЧЕСКИХ КОНСТАНТ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТИ НЕСВЯЗНОСТИ ПЛАНАРНОГО ВЗВЕШЕННОГО ГРАФА[1]

Г. Ш. Цициашвили, М. А. Осипова, А. С. Лосев

Институт прикладной математики ДВО РАН, ДВФУ, г. Владивосток, Россия
Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия

E-mail: guram@iam.dvo.ru, mao1975@list.ru, alexax@bk.ru

Приведено доказательство формул для вычисления асимптотических констант вероятности несвязности планарного взвешенного графа с высоконадёжными рёбрами.

Ключевые слова: *вес, грань, цикл, вероятность несвязности.*

Введение

В [1] построен алгоритм вычисления вероятности несвязности для планарного взвешенного графа с высоконадёжными рёбрами. Алгоритм имеет кубическую по числу рёбер в двойственном графе сложность. Он основан на доказательстве асимптотического соотношения и на получении формул для вычисления его параметров. Речь идёт о минимальном объёме разреза и о некотором весовом коэффициенте. В настоящей работе приводится вывод формул для вычисления весового коэффициента.

1. Основной результат

Рассмотрим неориентированный связный граф G без петель и кратных рёбер с конечным множеством вершин U и рёбер W. Пусть каждому ребру графа $w \in W$ соответствует вес b_w. Обозначим $\mathcal{L}$ множество разрезов графа, $d(L)$ — число рёбер (объём) разреза L, D — минимальный объём разрезов. Предположим, что рёбра графа G отказывают независимо с вероятностями $\overline{p}(w)$, $w \in W$. Для вероятности несвязности $\overline{P}$ графа G (отсутствия хотя бы между двумя вершинами графа работающего пути) в [2] приведена следующая теорема.

Теорема 1. Если $\overline{p}(w) \sim b_w h$, $h \to 0$, $w \in W$, где $b_w > 0$, $w \in W$, то

$$\overline{P} \sim h^D \mathcal{B}_D, \quad \mathcal{B}_D = \sum_{L \in \mathcal{L}: d(L)=D} \prod_{w \in L} b_w, \quad h \to 0.$$

Замечание 1. Условие $\overline{p}(w) \sim b_w h$, $h \to 0$, $w \in W$, в отличие от условия $\overline{p}(w) \sim h$, $h \to 0$, $w \in W$, значительно расширяет область рассматриваемых моделей.

Рассмотрим планарный граф G, каждое ребро которого принадлежит какому-либо простому циклу. Рёбра планарного графа G разбивают плоскость на грани; обозначим n число граней (включая внешнюю), m — число рёбер графа. Графу G сопоставим двойственный граф G^*: грани z графа G соответствует вершина z графа G^*, ребру w графа G, принадлежащему граням z_1, z_2, — ребро w, соединяющее вершины z_1, z_2 графа G^*. Пусть элементы a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, матрицы A определяют число рёбер, содержащихся в пересечении граней $z_i \cap z_j$, $i \neq j$, $a_{ii} = 0$. Известно [3],

[1]Работа поддержана грантом РФФИ № 14-01-00873 А.

что $D = \min(k : 2 \leqslant k \leqslant 5, c_k > 0)$, где c_k — число простых циклов длины k в G^*, определяемое по формулам, которые приведены в [4].

Обозначим $\mathcal{K}^*$ множество циклов K^* графа G^*, $d(K^*)$ — длину цикла K^*, D^* — минимальную длину цикла. Известно [3], что циклам минимальной длины графа G^* соответствуют разрезы минимального объёма графа G, причём $D^* = D$. Тогда

$$\mathcal{B}_D = \sum_{K^* \in \mathcal{K}^* : d(K^*) = D} \prod_{w \in K^*} b_w. \tag{1}$$

Поэтому для $\mathcal{B}_D$ предлагается вывести аналоги формул [4], полученные для констант c_k. Пусть константы $b_{ij}(k) = b_{ji}(k) = b_{w_k}$, $k = 1, \ldots, a_{ij}$, определяют веса рёбер w_k, содержащихся в пересечении граней $z_i \cap z_j$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, графа G, при этом $b_{ii}(k) = 0$. В частности, в случае $D > 2$ имеет место $a_{ij} = 1$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$.

Теорема 2. Для планарного графа G, каждое ребро которого принадлежит какому-либо циклу, имеют место соотношения

$$\mathcal{B}_2 = \frac{1}{4} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left(\left(\sum_{1 \leqslant k \leqslant a_{ij}} b_{ij}(k) \right)^2 - \sum_{1 \leqslant k \leqslant a_{ij}} b_{ij}^2(k) \right); \quad \mathcal{B}_3 = \frac{1}{6} \operatorname{tr} B^3; \tag{2}$$

$$\mathcal{B}_4 = \frac{1}{8} \left(\operatorname{tr} B^4 - 2 \sum_{1 \leqslant i,j,k \leqslant n} b_{ij}^2(1) b_{jk}^2(1) + \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} b_{ij}^4(1) \right); \tag{3}$$

$$\mathcal{B}_5 = \frac{1}{10} \left(\operatorname{tr} B^5 - 5 \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} b_{ij}^2(1) b_{jj}^{(3)}(1) + 5 \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} b_{ij}^3(1) b_{ji}^{(2)}(1) \right), \tag{4}$$

где $B = ||b_{ij}(1)||_{i,j=1}^n$; $b_{ij}^{(l)}(1)$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, — элементы матрицы B^l, $l > 1$.

Доказательство. Используем рисунки замкнутых путей с четырьмя и пятью рёбрами, приведённые в [5]. Остановимся сначала на доказательстве формулы для $\mathcal{B}_2$:

$$\mathcal{B}_2 = \sum_{K^* \in \mathcal{K}^* : d(K^*) = 2} \prod_{w \in K^*} b_w = \frac{1}{4} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \sum_{1 \leqslant t \neq s \leqslant a_{ij}} b_{ij}(t) b_{ij}(s) =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left(\sum_{1 \leqslant t,s \leqslant a_{ij}} b_{ij}(t) b_{ij}(s) - \sum_{1 \leqslant t \leqslant a_{ij}} b_{ij}^2(t) \right) = \frac{1}{4} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left[\left(\sum_{1 \leqslant t \leqslant a_{ij}} b_{ij}(t) \right)^2 - \sum_{1 \leqslant t \leqslant a_{ij}} b_{ij}^2(t) \right].$$

Формула для $\mathcal{B}_3$ очевидна:

$$\mathcal{B}_3 = \sum_{K^* \in \mathcal{K}^* : d(K^*) = 3} \prod_{w \in K^*} b_w = \frac{1}{6} \sum_{1 \leqslant i,j,k \leqslant n} b_{ij}(1) b_{jk}(1) b_{ki}(1) = \frac{1}{6} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} b_{ii}^{(3)}(1) = \frac{1}{6} \operatorname{tr} B^3.$$

Доказательство формулы для $\mathcal{B}_4$ основано на рис. 1 из [5], в котором приведены всевозможные замкнутые пути, состоящие из четырёх рёбер:

$$\mathcal{B}_4 = \sum_{K^* \in \mathcal{K}^* : d(K^*) = 4} \prod_{w \in K^*} b_w = \frac{1}{8} \sum_{\substack{1 \leqslant i,j,k,m \leqslant n: \\ i \neq k, j \neq m}} b_{ij}(1) b_{jk}(1) b_{km}(1) b_{mi}(1) =$$

$$= \frac{1}{8} \sum_{1 \leqslant i,j,k,m \leqslant n} b_{ij}(1) b_{jk}(1) b_{km}(1) b_{mi}(1) - \frac{1}{8} \sum_{1 \leqslant i,j,k \leqslant n : i \neq k} b_{ij}(1) b_{jk}(1) b_{kj}(1) b_{ji}(1) -$$

$$- \frac{1}{8} \sum_{1 \leqslant i,j,m \leqslant n : j \neq m} b_{ij}(1) b_{ji}(1) b_{im}(1) b_{mi}(1) - \frac{1}{8} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} b_{ij}(1) b_{ji}(1) b_{ij}(1) b_{ji}(1).$$

Достаточно несложные выкладки приводят далее к равенству (3).

Для вычисления $\mathcal{B}_5$ используем рис. 3 и 4 из [5], в которых представлены всевозможные замкнутые пути, состоящие из пяти рёбер:

$$\mathcal{B}_5 = \sum_{K^* \in \mathcal{K}^* : d(K^*)=5} \prod_{w \in K^*} b_w = \frac{1}{10} \sum_{\substack{1 \leqslant i,j,k,m,s \leqslant n: \\ i \neq k, i \neq m, j \neq m, j \neq s, k \neq s}} b_{ij}(1) b_{jk}(1) b_{km}(1) b_{ms}(1) b_{si}(1) =$$

$$= \frac{1}{10} \sum_{1 \leqslant i,j,k,m,s \leqslant n} b_{ij}(1) b_{jk}(1) b_{km}(1) b_{ms}(1) b_{si}(1) - \frac{1}{10} \sum_{\substack{1 \leqslant i,j,m,s \leqslant n: \\ j \neq m, j \neq s}} b_{ij}(1) b_{ji}(1) b_{im}(1) b_{ms}(1) b_{si}(1) -$$

$$- \frac{1}{10} \sum_{\substack{1 \leqslant i,j,k,s \leqslant n: \\ j \neq s, k \neq s}} b_{ij}(1) b_{jk}(1) b_{ki}(1) b_{is}(1) b_{si}(1) - \frac{1}{10} \sum_{\substack{1 \leqslant i,j,k,s \leqslant n: \\ i \neq k, k \neq s}} b_{ij}(1) b_{jk}(1) b_{kj}(1) b_{js}(1) b_{si}(1) -$$

$$- \frac{1}{10} \sum_{\substack{1 \leqslant i,j,k,m \leqslant n: \\ i \neq k, i \neq m}} b_{ij}(1) b_{jk}(1) b_{km}(1) b_{mj}(1) b_{ji}(1) - \frac{1}{10} \sum_{\substack{1 \leqslant i,j,k,m \leqslant n: \\ i \neq m, j \neq m}} b_{ij}(1) b_{jk}(1) b_{km}(1) b_{mk}(1) b_{ki}(1) -$$

$$- \frac{1}{10} \sum_{1 \leqslant i,j,s \leqslant n} b_{ij}(1) b_{ji}(1) b_{ij}(1) b_{js}(1) b_{si}(1) - \frac{1}{10} \sum_{1 \leqslant i,j,k \leqslant n} b_{ij}(1) b_{jk}(1) b_{ki}(1) b_{ik}(1) b_{ki}(1) -$$

$$- \frac{1}{10} \sum_{1 \leqslant i,j,k \leqslant n} b_{ij}(1) b_{jk}(1) b_{kj}(1) b_{jk}(1) b_{ki}(1) - \frac{1}{10} \sum_{1 \leqslant i,j,k \leqslant n} b_{ij}(1) b_{jk}(1) b_{ki}(1) b_{ij}(1) b_{ji}(1) -$$

$$- \frac{1}{10} \sum_{1 \leqslant i,j,m \leqslant n} b_{ij}(1) b_{ji}(1) b_{im}(1) b_{mj}(1) b_{ji}(1).$$

Сравнительно простые выкладки приводят далее к равенству (4). ■

Замечание 2. Число арифметических операций, необходимых для реализации алгоритма вычисления констант D, $\mathcal{B}_D$ с помощью описанного алгоритма, равно $\mathrm{O}(n^{\min(3,D)})$, где n — число вершин в графе G^*.

Замечание 3. Прямое использование формулы (1) может привести к увеличению необходимого числа арифметических операций до $\mathrm{O}(n^{\max(3,D)})$, поскольку для определения путей $K^* \in \mathcal{K}^* : d(K^*) = D$ при реализации формулы (1) необходимо перебирать все замкнутые пути длины D в графе G^*. Однако в широко распространённом случае $D = 2$ у алгоритма, основанного на формуле (1), появляются преимущества в точности вычисления в системе с плавающей запятой из-за отсутствия операций вычитания.

2. Вычислительный эксперимент

Сравним результаты вычисления вероятности несвязности $\overline{P}$ по асимптотической формуле и методом Монте-Карло $\overline{P}^*$ с числом реализаций 10^6. Положим $h = 0{,}02$, $b(1,2) = b(1,4) = b(1,3) = b(5,3) = b(5,4) = b(5,2) = 1$, $b(2,3) = b(2,4) = b(3,4) = 1{,}2$, тогда

$$\overline{P}_G \approx 0{,}000071424, \quad \overline{P}^*_G \approx 0{,}000068, \quad \left| \frac{\overline{P}^*_{G_1}}{\overline{P}_{G_1}} - 1 \right| \approx 0{,}05029.$$

В результате проведённых вычислений время счёта методом Монте-Карло составило 20 мин, а по асимптотическому соотношению — не более 1 мин, что подтверждает полученную теоретическую оценку сложности вычислений.

Авторы благодарят А. Н. Воропаева за помощь в проверке равенств (3), (4) и рецензента за полезные замечания и рекомендации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tsitsiashvili G. Sh., Osipova M. A., and Losev A. S.* Disconnection probability of planar weighted graph // Appl. Math. Sci. 2014. No. 8(10). P. 469–472.
2. *Tsitsiashvili G. Sh.* Complete calculation of disconnection probability in planar graphs // Reliability: The. Appl. 2012. No. 7(1). P. 154–159.
3. *Прасолов В. В.* Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М.: МЦНМО, 2004.
4. *Цициашвили Г. Ш., Лосев А. С.* Связность планарного графа с высоконадёжными ребрами // Прикладная дискретная математика. 2012. № 3(17). С. 102–106.
5. *Harary F. and Manvel B.* On the number of cycles in a graph // Matematickycasopis. 1971. No. 21(1). P. 55–63.