ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

DOI 10.17223/20710410/25/1
УДК 512.53

О РЕГУЛЯРНОСТИ НЕКОТОРЫХ ПОДПОЛУГРУПП МОНОИДА ЭНДОМОРФИЗМОВ ОТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Е. А. Бондарь

Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко, г. Луганск, Украина

E-mail: bondareug@gmail.com

Для графов отношения эквивалентности получен ответ на вопрос М. Беттчера и У. Кнауэра, при каких условиях множество полусильных (локально сильных, квазисильных) эндоморфизмов является полугруппой. Найдены условия регулярности таких полугрупп.

Ключевые слова: *регулярность, полугруппа, эндоморфизм, эквивалентность.*

Введение

Полугруппам эндоморфизмов графов различных классов посвящено множество исследований. К примеру, хорошо освещен в литературе вопрос об определяемости графов своими эндоморфизмами. Так, данную проблему изучал Л. М. Глускин [1] для квазипорядков; Л. Б. Шнеперман [2], Ю. М. Важенин [3], Б. В. Попов [4] — для рефлексивных графов; Ж. Араужо и Я. Конечны [5] — для так называемых плотных отношений. Условия регулярности полугрупп эндоморфизмов упорядоченного и квазиупорядоченного множеств исследованы в [6], а для конечных и счётных цепей — в [7, 8]. Копредставление моноида эндоморфизмов конечной цепи найдено в [9]. Как отмечено выше, определение эндоморфизма зачастую рассматривалось с некоторыми дополнительными условиями в зависимости от целей исследования. Различные типы эндоморфизмов собраны в [10] для определения спектра эндоморфизмов и эндотипа. С их помощью можно классифицировать графы [10, 11].

Целый ряд работ китайских математиков посвящен изучению отношений Грина и регулярных элементов полугрупп эндоморфизмов графов эквивалентностей и их подполугрупп: эндоморфизмы изучались в [12, 13], сильные эндоморфизмы в [14], изоморфизмы в [15, 16]. Точное представление моноида эндоморфизмов графа отношения эквивалентности описано в [17], а для 2-нильпотентных отношений — в [18]. Открытым в этом направлении остается вопрос М. Беттчера и У. Кнауэра [10], при каких условиях множество всех полусильных (локально сильных, квазисильных) эндоморфизмов неориентированного графа является полугруппой. В настоящей работе получен ответ на данный вопрос для графов отношения эквивалентности.

Работа построена следующим образом. В п. 1 приводятся необходимые определения и обозначения. В пп. 2–4 изучаются полусильные, локально сильные и квазисильные эндоморфизмы отношения эквивалентности. Получено описание соответствующих эндоморфизмов, найдены необходимые и достаточные условия, когда множество таких эндоморфизмов образует полугруппу, и доказана регулярность этих полугрупп.

1. Предварительные сведения

Пусть $\mathcal{T}(X)$ — симметрическая полугруппа на множестве X, $\varphi \in \mathcal{T}(X)$, $A \subseteq X$ — произвольное непустое подмножество. Через $\varphi|_A$ будем обозначать ограничение φ на множество A; множество всех константных отображений $\nu_t : A \to X : a \mapsto t$, $t \in X$, обозначим через $I(A)$.

Пусть $\rho \subseteq X \times X$ — произвольное отношение на X. Преобразование $f \in \mathcal{T}(X)$ называется *эндоморфизмом* реляционной системы (X, ρ), если для любых $a, b \in X$ из того, что $(a, b) \in \rho$, следует $(af, bf) \in \rho$. Множество всех эндоморфизмов реляционной системы (X, ρ) образует полугруппу относительно обычной композиции преобразований и обозначается $\mathrm{End}(X, \rho)$.

Эндоморфизм $f \in \mathrm{End}(X, \rho)$ называется *полусильным* эндоморфизмом, если для любых $x, y \in X$ из условия $(xf, yf) \in \rho$ следует, что существуют прообразы $x', y' \in X$, т. е. $xf = x'f$, $yf = y'f$, такие, что $(x', y') \in \rho$. Множество всех полусильных эндоморфизмов реляционной системы (X, ρ) обозначается $\mathrm{HEnd}(X, \rho)$.

Эндоморфизм $f \in \mathrm{End}(X, \rho)$ называется *локально сильным* эндоморфизмом, если для любых $x, y \in X$ из условия $(xf, yf) \in \rho$ следует, что для каждого прообраза $x' \in X$ элемента xf существует такой прообраз $y' \in X$ элемента yf, что $(x', y') \in \rho$, и аналогичное утверждение справедливо для каждого прообраза yf. Множество всех локально сильных эндоморфизмов реляционной системы (X, ρ) обозначается $\mathrm{LEnd}(X, \rho)$.

Эндоморфизм $f \in \mathrm{End}(X, \rho)$ называется *квазисильным* эндоморфизмом, если для любых $x, y \in X$ из условия $(xf, yf) \in \rho$ следует, что существует такой прообраз $x' \in X$ элемента xf, что для любого прообраза $y' \in X$ элемента yf выполняется $(x', y') \in \rho$, и аналогичное утверждение справедливо для каждого прообраза yf. Множество всех квазисильных эндоморфизмов реляционной системы (X, ρ) обозначается $\mathrm{QEnd}(X, \rho)$.

Эндоморфизм $f \in \mathrm{End}(X, \rho)$ называется *сильным* эндоморфизмом, если для любых $x, y \in X$ из условия $(xf, yf) \in \rho$ следует, что $(x, y) \in \rho$. Множество всех сильных эндоморфизмов реляционной системы (X, ρ) образует полугруппу относительно обычной композиции преобразований и обозначается $\mathrm{SEnd}(X, \rho)$.

Эндоморфизм $f \in \mathrm{End}(X, \rho)$ называется *автоморфизмом*, если f биективно и f^{-1} — эндоморфизм. Группа всех автоморфизмов реляционной системы (X, ρ) обозначается $\mathrm{Aut}(X, \rho)$. Таким образом, для реляционной системы (X, ρ) имеем цепочку включений

$$\mathrm{End}(X, \rho) \supseteq \mathrm{HEnd}(X, \rho) \supseteq \mathrm{LEnd}(X, \rho) \supseteq \mathrm{QEnd}(X, \rho) \supseteq \mathrm{SEnd}(X, \rho) \supseteq \mathrm{Aut}(X, \rho).$$

Множество всех отношений эквивалентности на X обозначим $\mathrm{Eq}(X)$. Для $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$ через X/α обозначим фактор-множество, а класс эквивалентности α, содержащий элемент $x \in X$, будем обозначать x_α.

Через i_X обозначается диагональное отношение на множестве X, а через w_X — универсальное:

$$i_X = \{(a, a) : a \in X\}, \quad w_X = X \times X.$$

Пусть $\mathcal{G}(X)$ — симметрическая группа на множестве X. Очевидно, что

$$\mathcal{T}(X) = \mathrm{End}(X, i_X) = \mathrm{HEnd}(X, i_X) = \mathrm{LEnd}(X, i_X) \supseteq \\ \supseteq \mathrm{QEnd}(X, i_X) = \mathrm{SEnd}(X, i_X) = \mathrm{Aut}(X, i_X) = \mathcal{G}(X),$$

$$\mathcal{T}(X) = \mathrm{End}(X, w_X) = \mathrm{HEnd}(X, w_X) = \mathrm{LEnd}(X, w_X) = \\ = \mathrm{QEnd}(X, w_X) = \mathrm{SEnd}(X, w_X) \supseteq \mathrm{Aut}(X, w_X) = \mathcal{G}(X).$$

Бинарное отношение называется тривиальным, если оно диагонально или универсально. Известно, что имеет место следующая

Лемма 1 [17]. Преобразование $f \in \mathcal{T}(X)$ является эндоморфизмом отношения $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$ тогда и только тогда, когда для любого $A \in X/\alpha$ существует $B \in X/\alpha$, такое, что $Af \subseteq B$.

2. Полусильные эндоморфизмы

Выясним, при каких условиях произвольный эндоморфизм графа отношения эквивалентности является полусильным.

Лемма 2. Эндоморфизм $f \in \mathrm{End}(X,\alpha)$ отношения $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$ является полусильным тогда и только тогда, когда для любого $B \in X/\alpha$, такого, что $B \cap \mathrm{im}(f) \neq \varnothing$, и любых $a, b \in B \cap \mathrm{im}(f)$ существует $A \in X/\alpha$, такой, что $a, b \in Af$.

Доказательство. Необходимость. Пусть f — полусильный эндоморфизм отношения эквивалентности α, $B \in X/\alpha$, $B \cap \mathrm{im}(f) \neq \varnothing$. Предположим, что $a, b \in B \cap \mathrm{im}(f)$, следовательно, $(a,b) \in \alpha$. Так как $f \in \mathrm{HEnd}(X,\alpha)$, то среди множества прообразов af^{-1}, bf^{-1} найдутся такие элементы a' и b' соответственно, что $(a',b') \in \alpha$, то есть $a', b' \in C$ для некоторого $C \in X/\alpha$. Следовательно, $a'f = a$, $b'f = b \in Cf$.

Достаточность. Пусть $f \in \mathrm{End}(X,\alpha)$ — произвольный эндоморфизм, $(a',b') \in \alpha$ для некоторых $a', b' \in \mathrm{im}(f)$. Тогда $a', b' \in B \cap \mathrm{im}(f)$ для некоторого $B \in X/\alpha$ и по условию леммы в X/α существует такой класс эквивалентности A, что $a', b' \in Af$. Следовательно, существуют прообразы $a \in a'f^{-1}$, $b \in b'f^{-1}$, для которых $(a,b) \in \alpha$: в самом деле, для любой пары (x,y) из $(a'f^{-1} \cap A) \times (b'f^{-1} \cap A)$, очевидно, $(x,y) \in \alpha$. Таким образом, $f \in \mathrm{HEnd}(X,\alpha)$. ■

Следствие 1. Любой эндоморфизм $f \in \mathrm{End}(X,\alpha)$ отношения $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$, область значений которого содержит не более чем по одному представителю из классов X/α, является полусильным.

Множество всех полусильных эндоморфизмов отношения эквивалентности в общем случае не является полугруппой. Действительно, пусть, например, $X = \{1,2,3,4\}$, $\alpha = \{1,2\}^2 \cup \{3\}^2 \cup \{4\}^2$. Тогда, согласно лемме 2, имеем $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{HEnd}(X,\alpha)$, однако произведение $fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \notin \mathrm{HEnd}(X,\alpha)$.

Нетрудно убедиться, что если $|X| \leqslant 2$, то имеют место равенства

$$\mathrm{End}(X,\alpha) = \mathrm{HEnd}(X,\alpha) = \mathrm{LEnd}(X,\alpha).$$

Утверждение 1. Пусть $|X| > 2$, $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$. Множество $\mathrm{HEnd}(X,\alpha)$ всех полусильных эндоморфизмов отношения эквивалентности α является полугруппой тогда и только тогда, когда α — тривиальное отношение эквивалентности.

Доказательство. Пусть $\mathrm{HEnd}(X,\alpha)$ — полугруппа, α — нетривиальное отношение эквивалентности на X. Тогда в фактор-множестве X/α найдётся класс мощности больше 1, обозначим его через A. Пусть $B \in X/\alpha$ — произвольный фиксированный класс, а $\delta : X/\alpha \to X$ — отображение, которое ставит в соответствие каждому классу произвольный фиксированный элемент из этого класса. Обозначим через y элемент из A, отличный от $A\delta$. Рассмотрим следующие полусильные эндоморфизмы f и g:

$$xf = C\delta, \text{ если } x \in C, \quad C \in X/\alpha,$$

$$xg = \begin{cases} x, & \text{если } x \in A, \\ y, & \text{если } x \in B, \\ x_\alpha \delta & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $fg = \begin{pmatrix} A & B & C & D & \dots \\ A\delta & y & C\delta & D\delta & \dots \end{pmatrix}$. Таким образом, для класса A и элементов $A\delta, y \in A \cap \mathrm{im}(fg)$ не выполняется лемма 2. Следовательно, $fg \notin \mathrm{HEnd}(X,\alpha)$, что противоречит начальному предположению.

С другой стороны, если α — тривиально, то, как было отмечено в п. 1, $\mathrm{HEnd}(X,\alpha) = \mathcal{T}(X)$. ■

Хорошо известно, что $\mathcal{T}(X)$ регулярна, поэтому справедливо

Следствие 2. Для тривиального отношения $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$ полугруппа $\mathrm{HEnd}(X,\alpha)$ регулярна.

3. Локально сильные эндоморфизмы

Следующая лемма описывает критериальные условия, при которых обычные эндоморфизмы являются локально сильными.

Лемма 3. Эндоморфизм $f \in \mathrm{End}(X,\alpha)$ отношения $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$ является локально сильным эндоморфизмом тогда и только тогда, когда для любых $A, B, C \in X/\alpha$ из того, что $Af \subseteq C$ и $Bf \subseteq C$, следует $Af = Bf$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f \in \mathrm{LEnd}(X,\alpha)$ и выполняются включения $Af \subseteq C$, $Bf \subseteq C$ для некоторых $A, B, C \in X/\alpha$. Предположим, что $Af \neq Bf$, тогда $A \neq B$. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что $y \notin Af$, $y \in Bf$ для некоторого $y \in C$. Для любого $x \in Af$, очевидно, $(x,y) \in \alpha$, но для прообраза $x' \in xf^{-1} \cap A$ не существует такого прообраза y' элемента y, что $(x',y') \in \alpha$, а это противоречит условию $f \in \mathrm{LEnd}(X,\alpha)$.

Достаточность. Пусть $f \in \mathrm{End}(X,\alpha)$ — произвольный эндоморфизм и включения $Af \subseteq C$, $Bf \subseteq C$ для любых $A, B, C \in X/\alpha$ влекут $Af = Bf$. Тогда для любых $x, y \in C \cap \mathrm{im}(f)$ из условия $(x,y) \in \alpha$ следует, что для каждого прообраза $x' \in xf^{-1}$ существует $y' \in yf^{-1} \cap (x')_\alpha$, такой, что $(x',y') \in \alpha$. Аналогичное утверждение справедливо для каждого прообраза yf^{-1}. Таким образом, f — локально сильный эндоморфизм отношения $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$. ■

Множество всех локально сильных эндоморфизмов отношения эквивалентности в общем случае не является полугруппой. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим на $X = \{1,2,3,4\}$ эквивалентность $\alpha = \{1,2\}^2 \cup \{3,4\}^2$. Эндоморфизмы $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ удовлетворяют лемме 3, а их произведение $fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ не является локально сильным эндоморфизмом.

Утверждение 2. Множество $\mathrm{LEnd}(X,\alpha)$ всех локально сильных эндоморфизмов отношения эквивалентности α на множестве $X \neq \varnothing$ является полугруппой тогда и только тогда, когда $\alpha = w_A \cup i_{X\setminus A}$ для некоторого $A \subseteq X$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathrm{LEnd}(X,\alpha)$ — полугруппа. Если $|X| < 4$, то α такое, как указано в условии данного утверждения. Пусть $|X| \geqslant 4$ и

$\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$ такое, что $\alpha \neq w_A \cup i_{X\setminus A}$ для любого $A \subseteq X$. Тогда фактор-множество X/α содержит хотя бы два класса эквивалентности A, B с мощностью $\geqslant 2$. Пусть $a, a' \in A$, $a \neq a'$, $b \in B$. Рассмотрим следующие локально сильные эндоморфизмы:

$$x\varphi = \begin{cases} a, & \text{если } x \in A, \\ b, & \text{если } x \in B, \\ x & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \qquad x\psi = \begin{cases} a, & \text{если } x = a \text{ или } x \in B, x \neq b, \\ a', & \text{если } x = b \text{ или } x \in A, x \neq a, \\ x & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для любого $x \in X$ имеем

$$x(\varphi\psi) = \begin{cases} a, & \text{если } x \in A, \\ a', & \text{если } x \in B, \\ x & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следовательно, $\varphi\psi \notin \mathrm{LEnd}(X, \alpha)$, что противоречит исходному предположению.

Достаточность. Пусть $\alpha = w_A \cup i_{X\setminus A}$ для некоторого $A \subseteq X$. Если $|A| \leqslant 1$ или $A = X$, то $\alpha = i_X$ или $\alpha = w_X$ и, следовательно, $\mathrm{LEnd}(X, \alpha) = \mathcal{T}(X)$ — полугруппа. Пусть $|A| \geqslant 2$. Учитывая, что X/α содержит единственный класс эквивалентности неединичной мощности, по лемме 3 все элементы из $\mathrm{LEnd}(X, \alpha)$ представляют собой объединение трёх попарно непересекающихся множеств:

$$\Phi_1 = \{\varphi \in \mathcal{T}(X) : \varphi|_A \in \mathcal{T}(A),\ \varphi|_A \notin I(A),\ \varphi|_{X\setminus A} \in \mathcal{T}(X\setminus A)\},$$
$$\Phi_2 = \{\varphi \in \mathcal{T}(X) : \varphi|_A \in I(A),\ \mathrm{im}(\varphi) \subseteq X\setminus A\},$$
$$\Phi_3 = \bigcup_{a\in A} \Phi^{(a)},\ \Phi^{(a)} = \{\varphi \in \mathcal{T}(X) : \varphi|_A \in I(A),\ \ a \in \mathrm{im}(\varphi),\ \ \mathrm{im}(\varphi) \subseteq (X\setminus A) \cup \{a\}\}.$$

Нетрудно видеть, что $\Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \Phi_3$ замкнуто по умножению. Таким образом, множество $\mathrm{LEnd}(X, \alpha)$ образует подполугруппу $\mathcal{T}(X)$. ■

Следствие 3. Для любого $\alpha = w_A \cup i_{X\setminus A}$, $A \subseteq X$ полугруппа $\mathrm{LEnd}(X, \alpha)$ является регулярной.

Доказательство. Если $|A| \leqslant 1$ или $A = X$, то $\mathrm{LEnd}(X, \alpha) = \mathcal{T}(X)$, следовательно, $\mathrm{LEnd}(X, \alpha)$ регулярна. Пусть $\varphi \in \mathrm{LEnd}(X, \alpha)$ — произвольный локально сильный эндоморфизм. Построим такой $\psi \in \mathrm{LEnd}(X, \alpha)$, для которого $\varphi = \varphi\psi\varphi$. Рассмотрим возможные случаи.

Если $\varphi \in \Phi_1$, то определим преобразование ψ множества X следующим образом:

$$x\psi = \begin{cases} y, y \in x\varphi^{-1}, & \text{если } x \in \mathrm{im}(\varphi), \\ x & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $\psi|_A \in \mathcal{T}(A)$, $\psi|_{X\setminus A} \in \mathcal{T}(X\setminus A)$ и $\varphi = \varphi\psi\varphi$. Поскольку ранг $\varphi|_A$ всегда $\geqslant 2$, имеем $\psi|_A \notin I(A)$. Таким образом, $\psi \in \Phi_1$.

Пусть $\varphi \in \Phi_2$, $b \in X\setminus A$ — произвольный фиксированный элемент. Положим

$$x\psi = \begin{cases} y, y \in x\varphi^{-1}, & \text{если } x \in \mathrm{im}(\varphi), \\ b, & \text{если } x \in A, \\ x & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда $\psi \in \Phi_2 \cup \Phi_3$ и $\varphi = \varphi\psi\varphi$.

Пусть $\varphi \in \Phi^{(a)} \subseteq \Phi_3$, $a \in A$. Определим ψ так, что

$$x\psi = \begin{cases} y, y \in x\varphi^{-1}, & \text{если } x \in \mathrm{im}(\varphi), \\ a\psi, & \text{если } x \in A\setminus\{a\}, \\ x & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В этом случае $\psi \in \Phi_2 \cup \Phi_3$ и $\varphi = \varphi\psi\varphi$. ■

Отметим, что если X конечно, $|A| \leqslant 1$ или $A = X$, то $|\mathrm{LEnd}(X, \alpha)| = |X|^{|X|}$.

Как известно [19, с. 210], число всех сюръективных отображений $\mathrm{sur}\, n^m$ из m-элементного множества в n-элементное множество равно $n!S(m, n)$, где $S(m, n)$ — число Стирлинга второго рода.

Следствие 4. Пусть X — конечное множество, $\alpha = w_A \cup i_{X\setminus A}$ для некоторого $A \subset X$, $|A| \geqslant 2$. Тогда

$$|\mathrm{LEnd}(X, \alpha)| = (k^k - k)l^l + l^{l+1} + k\sum_{m=1}^{l+1} C_l^{m-1} \mathrm{sur}\, m^{(l+1)},$$

где k — мощность множества A; l — мощность множества $X\setminus A$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что $|\Phi_1| = (k^k - k)l^l$, $|\Phi_2| = l^{l+1}$. Так как для произвольного преобразования из $\varphi \in \Phi^{(a)}$ ранга m, $m \leqslant l+1$, справедливо $\varphi|_A \in I(A)$, то $\Phi^{(a)}$ равномощно множеству всех сюръективных преобразований из $(l+1)$-элементного множества в m-элементное. Поскольку элемент a определён и фиксирован, остальные $(m-1)$ элементов можно выбрать C_l^{m-1} способами. Таким образом,

$$|\Phi^{(a)}| = \mathrm{sur}\, 1^{l+1} + C_l^1 \mathrm{sur}\, 2^{l+1} + C_l^2 \mathrm{sur}\, 3^{l+1} + \ldots$$
$$\ldots + C_l^{l-1} \mathrm{sur}\, l^{l+1} + \mathrm{sur}\, (l+1)^{l+1} = \sum_{m=1}^{l+1} C_l^{m-1} \mathrm{sur}\, m^{(l+1)},$$

и, следовательно, $|\Phi_3| = k|\Phi^{(a)}| = k\sum_{m=1}^{l+1} C_l^{m-1} \mathrm{sur}\, m^{(l+1)}$. Поскольку $\Phi_1 \cap \Phi_2 \cap \Phi_3 = \varnothing$, получаем искомую формулу. ■

4. Квазисильные эндоморфизмы

Для квазисильных эндоморфизмов выполняется следующая

Лемма 4. Для всякого отношения $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$ справедливо равенство

$$\mathrm{QEnd}(X, \alpha) = \mathrm{SEnd}(X, \alpha).$$

Доказательство. Достаточно доказать включение $\mathrm{QEnd}(X, \alpha) \subseteq \mathrm{SEnd}(X, \alpha)$. Пусть $f \in \mathrm{QEnd}(X, \alpha)$. Отметим, что так как f — квазисильный, для любого $c \in \mathrm{im}(f)$ в cf^{-1} существует прообраз c', α-эквивалентный любому другому прообразу элемента c. Следовательно, все прообразы любого фиксированного элемента находятся в одном и том же классе эквивалентности, то есть несколько классов не могут одновременно отображаться в c.

Пусть $a, b \in \mathrm{im}(f)$ и $(a, b) \in \alpha$. По определению в af^{-1} существует такой элемент x, что $(x, y) \in \alpha$ для любого $y \in bf^{-1}$. Так как $af^{-1} \subseteq x_\alpha$, последнее равносильно условию: для любых $x \in af^{-1}$ и $y \in bf^{-1}$ выполняется $(x, y) \in \alpha$. Таким образом, f — сильный эндоморфизм. ■

Если X — конечное множество, моноид $\mathrm{SEnd}(X, \alpha)$ регулярен (см., например, [20]). Таким образом, имеет место

Следствие 5. Для любой эквивалентности $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$, где X — конечное множество, полугруппа $\mathrm{QEnd}(X, \alpha)$ является регулярной.

В случае если множество X бесконечное, согласно [21] и лемме 4, $\mathrm{QEnd}(X, \alpha)$ — нерегулярная полугруппа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Глускин Л. М.* Полугруппы изотонных преобразований // Успехи математических наук. 1961. Т. 16. № 5. С. 157–162.
2. *Шнеперман Л. Б.* Полугруппы эндоморфизмов квазиупорядоченных множеств // Учёные записки ЛГПИ им. А. И. Герцена. 1962. Т. 238. С. 21–37.
3. *Важенин Ю. М.* Об элементарной определяемости и элементарной характеризуемости классов рефлексивных графов // Изв. вузов. Математика. 1972. Т. 7. С. 3–11.
4. *Попов Б. В.* Полугруппы эндоморфизмов рефлексивных бинарных отношений // Учёные записки ЛГПИ им. А. И. Герцена. 1967. № 302. С. 116–123.
5. *Araújo J. and Konieczny J.* Dense relations are determined by their endomorphism monoids // Semigroup Forum. 2005. No. 70. P. 302–306.
6. *Кожухов И. Б., Ярошевич В. А.* Полугруппы отображений, сохраняющих бинарное отношение // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14. № 7. С. 129–135.
7. *Айзенштат А. Я.* Регулярные полугруппы эндоморфизмов упорядоченных множеств // Учёные записки ЛГПИ им. А. И. Герцена. 1968. Т. 387. С. 3–11.
8. *Ким В. И., Кожухов И. Б.* Условия регулярности полугрупп изотонных преобразований счетных цепей // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12. № 8. С. 97–104.
9. *Айзенштат А. Я.* Определяющие соотношения полугруппы эндоморфизмов конечного линейного упорядоченного множества // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3. № 2. С. 161–169.
10. *Böttcher M. and Knauer U.* Endomorphism spectra of graphs // Discrete Mathematics. 1992. No. 109. P. 45–57.
11. *Böttcher M. and Knauer U.* Postscript: Endomorphism spectra of graphs // Discrete Mathematics. 2003. No. 270. P. 329–331.
12. *Pei H. S. and Dingyu Z.* Green's equivalences on semigroups of transformations preserving order and an equivalence relation // Semigroup Forum. 2005. No. 71. P. 241–251.
13. *Ma M., You T., Luo S., et al.* Regularity and Green's relations for finite E-order-preserving transformations semigroups // Semigroup Forum. 2010. No. 80. P. 164–173.
14. *Deng L., Zeng J., and You T.* Green's relations and regularity for semigroups of transformations that preserve reverse direction equivalence // Semigroup Forum. 2011. No. 83. P. 489–498.
15. *Deng L., Zeng J., and Xu B.* Green's relations and regularity for semigroups of transformations that preserve double direction equivalence // Semigroup Forum. 2010. No. 80. P. 416–425.
16. *Deng L., Zeng J., and You T.* Green's relations and regularity for semigroups of transformations that preserve order and a double direction equivalence // Semigroup Forum. 2012. No. 84. P. 59–68.
17. *Жучок Ю. В.* Ендоморфізми відношень еквівалентності // Вісн. Київ. унів. Сер. Фіз.-мат. науки. 2007. Т. 3. С. 22–26.
18. *Жучок Ю. В.* Полугруппы эндоморфизмов 2-нильпотентных бинарных отношений // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14. № 6. С. 75–83.
19. *Новиков Ф. А.* Дискретная математика. 2-е изд. Стандарт третьего поколения. СПб.: Питер, 2013. 432 с.
20. *Knauer U. and Nieporte M.* Endomorphisms of graphs I. The monoid of strong endomorphisms // Arch. Math. 1989. V. 52. P. 607–614.
21. *Fan S.* Graphs whose strong endomorphism monoids are regular // Arch. Math. 1999. V. 73. P. 419–421.