2014 Теоретические основы прикладной дискретной математики № 3(25)

DOI 10.17223/20710410/25/4

УДК 621.391: 519.728

О ПОНЯТИИ РАВНОСИЛЬНОСТИ НЕДООПРЕДЕЛЁННЫХ АЛФАВИТОВ[1]

Л. А. Шоломов

Институт системного анализа РАН, г. Москва, Россия

E-mail: sholomov@isa.ru

Для недоопределённых алфавитов предложена формализация понятий: а) один алфавит сильнее другого и б) алфавиты равносильны. Рассмотрены несколько подходов к определению этих понятий. Функциональный подход основан на выразимости одного алфавита через другой, три остальных подхода — комбинаторный, вероятностный и алгоритмический — терминологически связаны с подходами Колмогорова к введению меры информации. Доказано, что эти подходы к сравнению алфавитов эквивалентны. Если алфавиты равносильны, то решение задачи оптимального сжатия для одного алфавита фактически обеспечивает решение этой задачи и для второго. Установлено, что соотношения (а) и (б) допускают проверку за полиномиальное время.

Ключевые слова: *недоопределённый алфавит, равносильные алфавиты, энтропия недоопределённых данных, сложность по Колмогорову.*

Введение

Работа имеет дело с недоопределёнными данными — последовательностями недоопределённых символов. Каждому недоопределённому символу соответствует некоторое множество основных (полностью определённых) символов, любым из которых он может быть замещен (доопределён). При оперировании с недоопределёнными данными часто бывает достаточно вместо самих данных иметь их доопределения. Такие более слабые требования к данным предоставляют дополнительные возможности, одной из которых является рассматриваемая в работе возможность нетривиальных равносильных преобразований недоопределённых алфавитов.

Обсуждаются вопросы, каким образом можно сравнивать недоопределённые алфавиты и заключать, что один из них сильнее другого либо что они равносильны. Представлены несколько подходов к введению соответствующих понятий. Первый — функциональный — основан на функциональной выразимости символов одного алфавита через символы другого. Следующие три подхода терминологически связаны с подходами к введению меры информации, описанными А. Н. Колмогоровым [1]. Это комбинаторный, вероятностный (статистический) и алгоритмический подходы. В работе доказано, что все эти подходы эквивалентны, т. е. приводят к одним и тем же соотношениям недоопределённых алфавитов по силе. Установлено, что эти соотношения допускают проверку за полиномиальное время. Равносильные преобразования недоопределённых данных изучались и раньше [2, 3], но речь шла не об алфавитах, а об источниках, порождающих недоопределённые символы с некоторыми вероятностями,

[1]Работа выполнена при поддержке ОНИТ РАН по проекту «Теоретические основы эффективного использования недоопределённой информации» программы «Интеллектуальные информационные технологии, системный анализ и автоматизация».

и в основу был положен информационный подход. Вытекающее из [2, 3] понятие равносильности по существу совпадает с введённым в данной работе.

Переход к равносильному алфавиту может оказаться полезным для ряда задач, имеющих дело с недоопределёнными данными. Одной из них является задача сжатия. В отличие от постановки этой задачи для полностью определённых данных, где кодирование должно обеспечить их полное восстановление [4], в случае недоопределённых данных требуется восстановить лишь некоторое доопределение. Если алфавиты равносильны, то решение задачи оптимального сжатия в одном из них обеспечивает решение аналогичной задачи и для другого алфавита. При этом переход к равносильному алфавиту иногда может облегчить решение исходной задачи сжатия. Ещё одна задача связана с двоичным представлением недоопределённых алфавитов. При двоичном представлении основным символам соответствуют двоичные слова некоторой длины s, а недоопределённым символам — недоопределённые двоичные слова длины s [3]. Возможна ситуация, когда для исходного недоопределённого алфавита такое представление не существует, но оно появляется при переходе к некоторому равносильному алфавиту. Рассмотрение задачи с точностью до равносильности позволяет также уменьшать длину s представлений. Задача наилучшей аппроксимации [3] недоопределённых алфавитов двоичными представлениями может быть поставлена лишь с точностью до равносильности.

Для анализа двух алфавитов на равносильность необходимо знать, как связаны символы одного алфавита с символами другого. Поэтому помимо самих алфавитов задаётся соответствие между их символами. Оно не предполагается взаимно однозначным, поскольку рассматриваются преобразования алфавитов, при которых несколько символов могут отображаться в один, и обратные преобразования, приводящие к возникновению нескольких образов одного символа. Отметим, что соотношение равносильности недоопределённых алфавитов, обладая рядом свойств отношения эквивалентности, не является эквивалентностью на множестве недоопределённых алфавитов, поскольку зависит также от введённого соответствия. В заключение эта зависимость устраняется и рассматривается отношение эквивалентности недоопределённых алфавитов.

1. Недоопределённые алфавиты

Задан конечный алфавит $A_0 = \{a_i : i \in M\}$ *основных* символов. Каждому непустому $T \subseteq M$ сопоставлен символ a_T, называемый *недоопределённым. Доопределением символа* a_T считается всякий основной символ a_i, $i \in T$. Символ a_M, доопределимый любым основным символом, называется *неопределённым* и обозначается $*$. Выделена система $\mathcal{T} \subseteq 2^M$ некоторых непустых подмножеств T множества M и ей соответствует *недоопределённый алфавит* $A = \{a_T : T \in \mathcal{T}\}$. Считаем, что для любого $i \in M$ найдётся $T \in \mathcal{T}$, для которого $i \in T$ (иначе i можно удалить из M). Символы a_T будем понимать также как множества доопределений $a_T = \{a_i : i \in T\}$ и применительно к ним использовать теоретико-множественные операции и отношения. Скажем, что символ a_T *чётче* символа $a_{T'}$ ($a_{T'}$ *размытее* a_T), если $a_T \subseteq a_{T'}$. Под *доопределением последовательности* $\mathbf{a} = a_{T_1} \dots a_{T_n}$ недоопределённых символов понимается любая последовательность основных символов, полученная из исходной заменой каждого символа каким-либо его доопределением, а под *частичным доопределением* (*размытием*) *последовательности* $\mathbf{a}$ — результат замены её символов более чёткими (размытыми) символами.

Пусть наряду с алфавитом A задан недоопределённый алфавит B, для которого основным алфавитом является $B_0 = \{b_j : j \in L\}$, а недоопределённые символы b_U соответствуют множествам U некоторой системы $\mathcal{U} \subseteq 2^L$. Считаем также, что задано соответствие $R_{AB} \subseteq A \times B$, область определения которого совпадает с A, область значений с B. В остальном соответствие произвольно, т. е. символы алфавита A могут иметь несколько образов, символы алфавита B — несколько прообразов. Наряду с записью $(a_T, b_U) \in R_{AB}$ будем использовать $a_T R_{AB} b_U$. Назовём

— алфавиты A и B с заданным для них соответствием R_{AB} *соответственными алфавитами*;
— символы a_T и b_U, такие, что $a_T R_{AB} b_U$, *соответственными символами*;
— последовательности $\mathbf{a} = a_{T_1} \dots a_{T_n}$ и $\mathbf{b} = b_{U_1} \dots b_{U_n}$, для которых $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in R_{AB}^n$ (т. е. $a_{T_i} R_{AB} b_{U_i}$, $i = 1, \dots, n$), *соответственными последовательностями*.

Операции над соответствиями выполняются обычным образом, а именно: под *инверсией* соответствия R_{AB} понимается

$$R_{BA} = R_{AB}^{-1} = \{(b_U, a_T) : (a_T, b_U) \in R_{AB}\},$$

и если помимо A и B задан недоопределённый алфавит $C = \{c_V : V \in \mathcal{V}\}$, связанный с B соответствием R_{BC}, то *произведением* (*композицией*) соответствий R_{AB} и R_{BC} считается соответствие

$$R_{AB} \circ R_{BC} = \{(a_T, c_V) : \exists b_U \ (a_T R_{AB} b_U \wedge b_U R_{BC} c_V)\}.$$

2. Подходы к понятию равносильности недоопределённых алфавитов

Опишем несколько подходов к введению понятия равносильности для соответственных недоопределённых алфавитов. Первый из них — функциональный — основан на функциональной выразимости символов одного алфавита через символы другого. Следующие три подхода терминологически связаны с подходами к введению меры информации, представленными в работе А. Н. Колмогорова [1]. Это комбинаторный, вероятностный (статистический) и алгоритмический подходы.

2.1. Функциональный подход

Рассмотрим недоопределённые алфавиты A и B, связанные соответствием R_{AB}. Пусть A_0 и B_0 — ассоциированные с A и B основные алфавиты. Всякую функцию $F : A_0 \to B_0$ можно распространить на A, положив $F(a_T) = \{F(a_i) : a_i \in a_T\}$. Скажем, что *алфавит B функционально выразим через A*, если существует функция $F : A_0 \to B_0$, такая, что для всех пар $(a_T, b_U) \in R_{AB}$ имеет место $F(a_T) \subseteq b_U$. Последнее означает, что символ b_U может быть получен из a_T функциональным преобразованием F и размытием. Будем говорить, что алфавит A *функционально сильнее* B (B *функционально слабее* A), и записывать $A \succsim_f B$, если B функционально выразим через A. В случае $A \succsim_f B$ и $B \succsim_f A$ будем алфавиты A и B называть *функционально равносильными* и записывать $A \eqsim_f B$. Соотношение $A \eqsim_f B$ означает в развёрнутой записи, что для некоторых функций $F : A_0 \to B_0$ и $G : B_0 \to A_0$

$$a_T R_{AB} b_U \Rightarrow F(a_T) \subseteq b_U \wedge G(b_U) \subseteq a_T. \tag{1}$$

Равносильность алфавитов была определена через их соотношение по силе. Покажем теперь, как соотношение по силе может быть выражено через равносильность. Для соответственных алфавитов A и B введем алфавит AB, символы $a_T b_U$ которого ассоциированы с парами $(a_T, b_U) \in R_{AB}$, и определим соответствие $R_{AB,A} = \{(a_T b_U, a_T) : (a_T, b_U) \in R_{AB}\}$.

Лемма 1. Соотношение $A \succsim_f B$ выполнено тогда и только тогда, когда $AB \eqsim_f A$.

Доказательство. Если справедливо $A \succsim_f B$ и это соотношение выполняется с функцией $F : A_0 \to B_0$, то для получения соотношения $A \succsim_f AB$ достаточно взять в качестве $F' : A_0 \to (A_0 \times B_0)$ функцию $F'(a_i) = a_i F(a_i)$, а для соотношения $AB \succsim_f A$ — функцию $G' : (A_0 \times B_0) \to A_0$, где $G'(a_i b_j) = a_i$. В результате получаем $AB \eqsim_f A$.

Обратно, если имеет место $AB \eqsim_f A$ и соотношение $A \succsim_f AB$ установлено применением функции $F : A_0 \to (A_0 \times B_0)$, то функцию $F' : A_0 \to B_0$ для $A \succsim_f B$ можно получить, назначив $F'(a_i) = b_j$, где b_j определяется значением $F(a_i) = a_u b_j$. ■

Соотношения $A \succsim_f B$ и $A \eqsim_f B$ могут быть эквивалентно представлены в терминах соответственных последовательностей, а именно: $A \succsim_f B$ имеет место тогда и только тогда, когда существует такая функция $F : A_0 \to B_0$, что для всякой пары $\mathbf{a} = a_{T_1} \dots a_{T_n}$, $\mathbf{b} = b_{U_1} \dots b_{U_n}$ соответственных последовательностей и любого доопределения $\mathbf{a}^0 = a_{i_1} \dots a_{i_n}$ последовательности $\mathbf{a}$ последовательность $F(\mathbf{a}^0) = F(a_{i_1}) \dots F(a_{i_n})$ доопределяет $\mathbf{b}$. Для соотношения $A \eqsim_f B$ дополнительно требуется существование функции $G : B_0 \to A_0$, применение которой к любому доопределению $\mathbf{b}^0$ последовательности $\mathbf{b}$ даёт последовательность $G(\mathbf{b}^0)$, доопределяющую $\mathbf{a}$.

Другие понятия равносильности будут представлены в терминах соответственных последовательностей и по форме будут подобны лемме 1.

2.2. Комбинаторный подход

Для последовательности $\mathbf{a}$ в алфавите A обозначим через $\mathcal{K}(\mathbf{a})$ класс всех последовательностей $\mathbf{a}'$ в алфавите A, в которых каждый символ $a_T \in A$ встречается такое же, как в $\mathbf{a}$, число раз. Пусть $N(\mathbf{a})$ — минимальная мощность множества последовательностей в основном алфавите A_0, среди которых имеются доопределения всех последовательностей $\mathbf{a}'$ из $\mathcal{K}(\mathbf{a})$. Величина $\log N(\mathbf{a})$ называется *комбинаторной энтропией* класса $\mathcal{K}(\mathbf{a})$ [5] (всюду под $\log x$ понимается $\log_2 x$).

Пусть A и B — соответственные алфавиты. Пару последовательностей $\mathbf{a} = a_{T_1} \dots a_{T_n}$ и $\mathbf{b} = b_{U_1} \dots b_{U_n}$ одинаковой длины в алфавитах A и B будем воспринимать также как последовательность пар (a_{T_i}, b_{U_i}), $i = 1, \dots, n$. Обозначим через $\mathcal{K}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ класс всех пар последовательностей $(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$, в которых каждая пара $(a_T, b_U) \in A \times B$ встречается столько же раз, сколько в $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Отметим, что если пара $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ соответственна, то и каждая из пар $(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$ соответственна. Через $N(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ обозначим минимальную мощность множества пар $(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0)$ полностью определённых последовательностей, среди которых имеются доопределения всех пар последовательностей из $\mathcal{K}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Будем говорить, что алфавит A *комбинаторно сильнее* алфавита B, и записывать $A \succsim_c B$, если для любых соответственных последовательностей $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ выполнено $N(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = N(\mathbf{a})$. В случае $A \succsim_c B$ и $B \succsim_c A$ будем алфавиты A и B называть *комбинаторно равносильными* и записывать $A \eqsim_c B$. Это означает, что для любых соответственных последовательностей $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ выполнено $N(\mathbf{a}) = N(\mathbf{b}) = N(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

2.3. Статистический подход

Рассмотрим *недоопределённые источники* X в алфавите A, порождающие независимо символы $a_T \in A$ с некоторыми вероятностями p_T. Положим $P = (p_T, T \in \mathcal{T})$ и для источника будем использовать обозначение $X = (A, P)$. Задавшись набором $Q = (q_i, i \in M)$ вероятностей символов a_i основного алфавита A_0, введём функцию

$$\mathcal{H}(P, Q) = -\sum_{T \in \mathcal{T}} p_T \log \sum_{i \in T} q_i. \tag{2}$$

Величину

$$\mathcal{H}(P) = \min_Q \mathcal{H}(P, Q)$$

будем называть *энтропией* источника X и обозначать также $\mathcal{H}(X)$. Для недоопределённых источников она играет ту же роль, какую энтропия Шеннона играет для всюду определённых источников (подробнее см. в [5]).

Пусть имеются алфавиты A и B, связанные соответствием R_{AB}. *Источники* X и Y в алфавитах A и B, заданные совместным распределением $p(a_T, b_U)$, $a_T \in A$, $b_U \in B$, назовём *соответственными*, если $p(a_T, b_U) > 0$ только в случае $a_T R_{AB} b_U$.

Будем говорить, что алфавит A *статистически сильнее* алфавита B, и записывать $A \succsim_s B$, если для любых пар соответственных источников X и Y выполнено $\mathcal{H}(XY) = \mathcal{H}(X)$. В случае $A \succsim_s B$ и $B \succsim_s A$ будем алфавиты A и B называть *статистически равносильными* и записывать $A \eqsim_s B$. Это означает, что для любых соответственных источников X и Y выполнено $\mathcal{H}(X) = \mathcal{H}(Y) = \mathcal{H}(XY)$.

2.4. Алгоритмический подход

Приведём некоторые результаты о сложности по Колмогорову [1] и распространим их на случай недоопределённых последовательностей.

Рассматриваются алгоритмы $\varphi(\mathbf{p}) = \mathbf{x}$, переводящие слова в слова. Слово $\mathbf{p}$ предполагается двоичным и называется *программой*, $\mathbf{x}$ — слово в алфавите $A_0 = \{a_i : i \in M\}$. Сложность $K_\varphi(\mathbf{x})$ слова $\mathbf{x}$ по алгоритму φ измеряется минимальной длиной программы $\mathbf{p}$, для которой $\varphi(\mathbf{p}) = \mathbf{x}$, и равна ∞, если такого $\mathbf{p}$ нет. По теореме оптимальности Колмогорова [1] существует алгоритм ψ, такой, что для любого φ найдется константа $c = c_\varphi$, при которой для всех $\mathbf{x}$ выполнено $K_\varphi(\mathbf{x}) \leqslant K_\psi(\mathbf{x}) + c$. Алгоритм ψ с таким свойством называется *оптимальным*. Под *сложностью* $K(\mathbf{x})$ *слова* $\mathbf{x}$ понимается его сложность по любому фиксированному оптимальному алгоритму. При использовании разных оптимальных алгоритмов ψ и ψ' сложности $K(\mathbf{x})$ и $K'(\mathbf{x})$ связаны соотношением $K(\mathbf{x}) \approx K'(\mathbf{x})$, где $f \approx g$ означает, что разность $f - g$ ограничена. Под *сложностью* $K(\mathbf{a})$ *недоопределённой последовательности* $\mathbf{a}$ в алфавите A будем понимать минимальную из сложностей $K(\mathbf{a}^0)$ её доопределений $\mathbf{a}^0$. Эта величина также определена с точностью до $\approx$.

Пусть A и B — соответственные алфавиты. Будем говорить, что алфавит A *алгоритмически сильнее* алфавита B, и записывать $A \succsim_a B$, если для любых соответственных последовательностей $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ выполнено $K(\mathbf{ab}) \approx K(\mathbf{a})$. В случае $A \succsim_a B$ и $B \succsim_a A$ будем алфавиты A и B называть *алгоритмически равносильными* и записывать $A \eqsim_a B$. Алгоритмическая равносильность означает, что для любых соответственных последовательностей $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ выполнено $K(\mathbf{a}) \approx K(\mathbf{b}) \approx K(\mathbf{ab})$.

3. Доказательство эквивалентности подходов

Далее устанавливается, что все представленные выше подходы задают для недоопределённых алфавитов одинаковые соотношения по силе и, как следствие, одинаковые понятия равносильности.

Лемма 2. Из $A \succsim_f B$ следуют соотношения $A \succsim_c B$ и $A \succsim_a B$.

Доказательство. Пусть справедливо $A \succsim_f B$ и это соотношение выполняется с функцией $F : A_0 \to B_0$. Рассмотрим соответственные последовательности $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в алфавитах A и B.

Если имеется доопределяющее множество для класса $\mathcal{K}(\mathbf{a})$, то, заменив в этом множестве каждую последовательность $\mathbf{u}^0$ парой $(\mathbf{u}^0, F(\mathbf{u}^0))$, получим доопределяющее множество для $\mathcal{K}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Обратно, из всякого доопределяющего множества для $\mathcal{K}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$,

взяв в каждой его паре $(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0)$ лишь $\mathbf{u}^0$, можно образовать доопределяющее множество для $\mathcal{K}(\mathbf{a})$. Отсюда следует равенство $N(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = N(\mathbf{a})$, приводящее к $A \succsim_c B$.

Пусть значение $K(\mathbf{a}) = K_\psi(\mathbf{a})$ достигается на программе $\mathbf{p}$, т. е. совпадает с её длиной $l(\mathbf{p})$. Можно также рассматривать $\mathbf{p}$ как программу алгоритма φ, который сначала находит для $\mathbf{a}$ доопределение $\mathbf{a}^0 = \psi(\mathbf{p})$, а затем по $\mathbf{a}^0$ строит конкатенацию $\mathbf{a}^0 F(\mathbf{a}^0)$, доопределяющую $\mathbf{ab}$. Это даёт

$$K(\mathbf{ab}) \leqslant K_\varphi(\mathbf{ab}) + c_\varphi \leqslant l(\mathbf{p}) + c_\varphi \leqslant K(\mathbf{a}) + c_\varphi.$$

Аналогично, рассмотрев программу, на которой достигается $K(\mathbf{ab})$, и считая её программой алгоритма θ, который находит доопределение для $\mathbf{ab}$, а затем выдаёт его половину, доопределяющую $\mathbf{a}$, приходим к неравенству $K(\mathbf{a}) \leqslant K(\mathbf{ab}) + c_\theta$. В результате получаем соотношение $K(\mathbf{ab}) \approx K(\mathbf{a})$, приводящее к $A \succsim_a B$. ■

Лемма 3. Из $A \succsim_c B$ следует $A \succsim_s B$.

Доказательство. Рассмотрим некоторое кодирование последовательностей $\mathbf{a}$ длины n, порождаемых недоопределённым источником X в алфавите A [5]. Пусть $p(\mathbf{a})$ — вероятность порождения $\mathbf{a}$ источником X; $l_\mathbf{a}$ — длина кода для $\mathbf{a}$. В [5] доказано, что если кодирование разделимо[2], то

$$\sum_{\mathbf{a}\in A^n} p(\mathbf{a}) l_\mathbf{a} \geqslant n\mathcal{H}(X). \tag{3}$$

Там же указано разделимое кодирование, для которого $l_\mathbf{a} \leqslant \log N(\mathbf{a}) + c_1 \log n$ и

$$\sum_{\mathbf{a}\in A^n} p(\mathbf{a}) l_\mathbf{a} \leqslant \sum_{\mathbf{a}\in A^n} p(\mathbf{a}) \log N(\mathbf{a}) + c_1 \log n \leqslant n\mathcal{H}(X) + c_2 \log n.$$

Объединяя эти факты, получаем

$$n\mathcal{H}(X) - c_1 \log n \leqslant \sum_{\mathbf{a}\in A^n} p(\mathbf{a}) \log N(\mathbf{a}) \leqslant n\mathcal{H}(X) + c_2 \log n. \tag{4}$$

Пусть имеет место $A \succsim_c B$ и заданы соответственные источники X и Y. Применим к XY левое неравенство из (4), затем, подставив $N(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = N(\mathbf{a})$, воспользуемся для X правой частью (4):

$$\begin{aligned} n\mathcal{H}(XY) - c_3 \log n \leqslant \sum_{(\mathbf{a},\mathbf{b})\in R^n_{AB}} p(\mathbf{a},\mathbf{b}) \log N(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sum_{(\mathbf{a},\mathbf{b})\in R^n_{AB}} p(\mathbf{a},\mathbf{b}) \log N(\mathbf{a}) = \\ = \sum_{\mathbf{a}\in A^n} p(\mathbf{a}) \log N(\mathbf{a}) \leqslant n\mathcal{H}(X) + c_2 \log n. \end{aligned}$$

Разделив обе части на n и перейдя к пределу при $n \to \infty$, получим $\mathcal{H}(XY) \leqslant \mathcal{H}(X)$. Обратное соотношение $\mathcal{H}(XY) \geqslant \mathcal{H}(X)$ справедливо всегда [5].

Равенство $\mathcal{H}(XY) = \mathcal{H}(X)$ означает $A \succsim_s B$. ■

Лемма 4. Из $A \succsim_a B$ следует $A \succsim_s B$.

Доказательство. Если k — натуральное число, а $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_r$, $r \leqslant \log k + 1$, — его двоичная запись, начинающаяся с 1, то через $\tilde{k}$ будем обозначать двоичное слово $\sigma_1\sigma_1\ldots\sigma_r\sigma_r 01$. Для него $l(\tilde{k}) \leqslant 2\log k + 4$.

[2]Кодирование разделимо, если последовательность произвольно приписанных друг к другу кодовых слов однозначно разбивается на кодовые слова.

Пусть $\mathbf{p_a}$ — программа построения доопределения последовательности $\mathbf{a} \in A^n$ оптимальным алгоритмом, на которой достигается $K(\mathbf{a})$. Если кодами последовательностей $\mathbf{a}$, порождаемых источником X, считать $\mathbf{p_a}$, кодирование может оказаться неразделимым. Чтобы превратить его в разделимое, в качестве кодов будем использовать слова $\tilde{l}(\mathbf{p_a})\mathbf{p_a}$. Их длина удовлетворяет оценке $l_{\mathbf{a}} \leqslant K(\mathbf{a}) + c_4 \log n$. Подставив её в (3), получаем

$$\sum_{\mathbf{a}\in A^n} p(\mathbf{a})K(\mathbf{a}) \geqslant n\mathcal{H}(X) - c_4 \log n. \tag{5}$$

Пусть X и Y — соответственные источники в алфавитах A и B. Аналог для XY неравенства (5) и учёт соотношения $K(\mathbf{ab}) \approx K(\mathbf{a})$ дают

$$\begin{aligned} n\mathcal{H}(XY) - c_5 \log n \leqslant \sum_{(\mathbf{a},\mathbf{b})\in R^n_{AB}} p(\mathbf{a},\mathbf{b})K(\mathbf{ab}) = \\ = \sum_{(\mathbf{a},\mathbf{b})\in R^n_{AB}} p(\mathbf{a},\mathbf{b})K(\mathbf{a}) + c_6 = \sum_{\mathbf{a}\in A^n} p(\mathbf{a})K(\mathbf{a}) + c_6. \end{aligned} \tag{6}$$

Оценим $K(\mathbf{a})$. Пусть $M = \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_s\}$ и символы $a_{T_1}, \ldots, a_{T_s}$ входят в последовательность $\mathbf{a}$ соответственно $u_1, \ldots, u_s$ раз. В работе [6] описан градиентный (жадный) алгоритм построения доопределяющего множества для $\mathcal{K}(\mathbf{a})$, согласно которому некоторым образом находится набор натуральных параметров $(v_0, v_1, \ldots, v_{k-1})$ и доопределяющее множество образуется последовательностями, в которых символы a_i, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, встречаются v_i раз. Оно строится последовательно. На каждом шаге добавляется последовательность, которая доопределяет наибольшее число последовательностей класса $\mathcal{K}(\mathbf{a})$, не получивших доопределений на предыдущих шагах, и расположена лексикографически раньше других последовательностей, обладающих этим свойством. С ней связывается номер шага, на котором она включена в множество. В [6] доказано, что мощность $\hat{N}$ построенного множества удовлетворяет оценке $\log \hat{N} \leqslant \log N(\mathbf{a}) + c_7 \log n$.

В качестве программы нахождения доопределения для $\mathbf{a}$ возьмём

$$\mathbf{p_a} = \tilde{n}\tilde{m}\tilde{s}\tilde{u}_1 \ldots \tilde{u}_s\tilde{v}_0 \ldots \tilde{v}_{m-1}\mu,$$

где μ — двоичная запись номера последовательности, доопределяющей $\mathbf{a}$. Она позволяет однозначно указать параметры класса $\mathcal{K}(\mathbf{a})$ и параметры $(v_0, v_1, \ldots, v_{k-1})$ класса, из которого берутся доопределения, а затем применением градиентной процедуры вплоть до шага, двоичной записью которого является μ, найти доопределение для $\mathbf{a}$. Имеем

$$K(\mathbf{a}) \leqslant l(\mathbf{p_a}) + c_8 \leqslant \log \hat{N} + c_9 \log n \leqslant \log N(\mathbf{a}) + c_{10} \log n.$$

Подставив эту оценку в (6), приходим к ситуации, имевшей место в предыдущей лемме, и завершаем доказательство, как там. ■

В дальнейшем понадобится следующий факт из [5].

Утверждение 1. Набор вероятностей Q минимизирует функцию $\mathcal{H}(P, Q)$ из (2) тогда и только тогда, когда при каждом j, $j \in M$, выполнено

$$\sum_{T:\, j\in T} \frac{p_T}{\sum\limits_{k\in T} q_k} \leqslant 1, \tag{7}$$

где строгое неравенство может иметь место лишь при тех j, для которых $q_j = 0$.

Скажем, что символ a_i *мажорирует* в алфавите A символ a_j, если для всякого $a_T \in A$ принадлежность $a_j \in a_T$ влечёт $a_i \in a_T$. Отношение мажорирования транзитивно и рефлексивно.

Лемма 5. Пусть в недоопределённом алфавите A отсутствуют мажорируемые символы и a_i — произвольный фиксированный символ из A_0. Тогда найдётся набор вероятностей $P = (p_T,\, T \in \mathcal{T})$ со строго положительными p_T, для которого компонента q_i всякого набора Q, минимизирующего функцию $\mathcal{H}(P, Q)$, строго положительна.

Доказательство. Рассмотрим произвольный символ $a_i \in A_0$. Введём обозначения $\mathcal{T}' = \{T : T \in \mathcal{T}, i \in T\}$, $\mathcal{T}'' = \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}'$, $u = |\mathcal{T}'|$, $v = |\mathcal{T}''|$. Зададимся параметрами $p > 0$ и $\varepsilon > 0$, удовлетворяющими условию

$$pu + \varepsilon v = 1, \tag{8}$$

и назначим набор вероятностей $P = (p_T,\, T \in \mathcal{T})$, положив

$$p_T = \begin{cases} p, & T \in \mathcal{T}', \\ \varepsilon, & T \in \mathcal{T}''. \end{cases}$$

Покажем, что при подходящем выборе параметров p и ε он удовлетворяет условиям леммы.

Пусть набор Q минимизирует функцию $\mathcal{H}(P, Q)$. Для него справедливо утверждение 1. Рассмотрим произвольное $j \in M$, $j \neq i$. Дальше сумму из левой части (7) будем обозначать $S(T \mid j \in T)$. Будем рассматривать также суммы $S(T \mid \theta(T))$ более общего вида, где $\theta(T)$ — условия на множества T, по которым ведётся суммирование.

а) Если $S(T \mid j \in T) < 1$, то $q_j = 0$ по утверждению 1.

б) Пусть $S(T \mid j \in T) = 1$. Запишем это равенство в виде

$$S(T \mid T \in \mathcal{T}', j \in T) + S(T \mid T \in \mathcal{T}'', j \in T) = 1. \tag{9}$$

Поскольку a_j не мажорируется символом a_i, найдётся $T' \in \mathcal{T}'$, для которого $j \notin T'$. Тогда

$$S(T \mid T \in \mathcal{T}', T \neq T') + \frac{p_{T'}}{\sum\limits_{k \in T'} q_k} = S(T \mid i \in T) \leqslant 1.$$

Отсюда, принимая во внимание соотношения $\sum\limits_{k \in T'} q_k \leqslant 1$ и $p_{T'} = p$, получаем

$$S(T \mid T \in \mathcal{T}', T \neq T') \leqslant 1 - \frac{p_{T'}}{\sum\limits_{k \in T'} q_k} \leqslant 1 - p_{T'} = 1 - p.$$

С учётом этого находим

$$S(T \mid T \in \mathcal{T}', j \in T) \leqslant S(T \mid T \in \mathcal{T}', T \neq T') \leqslant 1 - p.$$

Это неравенство и (9) дают $1 - p + S(T \mid T \in \mathcal{T}'', j \in T) \geqslant 1$, что приводит к

$$p \leqslant \sum_{T:\, T \in \mathcal{T}'', j \in T} \frac{p_T}{\sum\limits_{k \in T} q_k} \leqslant \sum_{T:\, T \in \mathcal{T}'', j \in T} \frac{p_T}{q_j}.$$

Подставив сюда $|\mathcal{T}''| = v$ и $p_T = \varepsilon$ для $T \in \mathcal{T}''$, получаем $\dfrac{\varepsilon v}{q_j} \geqslant p$, т. е. $q_j \leqslant \dfrac{\varepsilon v}{p}$. Учитывая пункт (а), заключаем, что эта оценка справедлива для всех $j \neq i$. Поэтому

$$q_i = 1 - \sum_{j,\, j \neq i} q_j \geqslant 1 - \frac{\varepsilon v(u+v)}{p}.$$

Отсюда и из (8) следует, что при достаточно малом ε выполнено $q_i > 0$. ■

Пусть задан недоопределённый источник $X = (A, P)$ и символ $a_j \in A_0$ мажорируется в A символом a_i, $a_i \neq a_j$. Введём операцию *исключения мажорируемого символа* a_j из алфавита A и из источника X, при выполнении которой каждый символ $a_T \in A$ заменяется символом[3] $a_{T \setminus j}$ (поскольку a_j мажорируется некоторым a_i, множество T' непусто). В результате операции получается алфавит $A' = \{a_{T'} : T' = T \setminus j,\ a_T \in A\}$, для которого основным алфавитом является $A'_0 = A_0 \setminus a_j$. Источник $X = (A, P)$ преобразуется в $X' = (A', P')$, где набор P' образован вероятностями $p'_{T'} = p_{T'} + p_{T' \cup j}$. Здесь $p_{T'}$ и $p_{T' \cup j}$ — вероятности символов $a_{T'}$ и $a_{T' \cup j}$ источника X; при отсутствии какого-либо из этих символов в алфавите A соответствующая вероятность считается равной нулю.

Если наряду с X задан источник Y с алфавитом B, то при устранении из A мажорируемого символа a_j соответствие R_{AB} переходит в

$$R_{A'B} = \{(a_{T'}, b_U) : \exists T (T \setminus j = T' \wedge (a_T, b_U) \in R_{AB})\}. \tag{10}$$

Совместное распределение P_{XY} источников X и Y образовано вероятностями $p_{TU} = p(a_T, b_U)$ для пар $(a_T, b_U) \in R_{AB}$, а совместное распределение $P_{X'Y}$ источников X' и Y — вероятностями $p'_{T'U} = p_{T'U} + p_{T' \cup j, U}$, где $(a_{T'}, b_U) \in R_{A'B}$. Здесь вероятности $p_{T'U}$ и $p_{T' \cup j, U}$ берутся из P_{XY}, а если какой-либо из них в P_{XY} нет, она полагается равной нулю. В случае соответственных источников X и Y источники X' и Y также соответственны.

Лемма 6. Если источник X' образован из X удалением мажорируемого символа, то $\mathcal{H}(X') = \mathcal{H}(X)$ и $\mathcal{H}(X'Y) = \mathcal{H}(XY)$.

Доказательство. Докажем равенство $\mathcal{H}(X'Y) = \mathcal{H}(XY)$. Будем считать для определённости, что исключаемым из A символом является a_1, и он мажорируется символом a_2. Если в $(a_T, b_U) \in R_{AB}$ имеется символ (a_1, b_u), то там имеется и (a_2, b_u). Поэтому (a_2, b_u) мажорирует (a_1, b_u).

Функция $\mathcal{H}(P_{XY}, Q)$ для произведения XY имеет вид

$$\mathcal{H}(P_{XY}, Q) = - \sum_{(T,U) : a_T R_{AB} b_U} p_{TU} \log \sum_{i \in T, j \in U} q_{ij}. \tag{11}$$

Легко понять, что функция $\mathcal{H}(P_{X'Y}, Q')$ для $X'Y$ может быть получена из неё подстановкой нуля вместо всех q_{1j}. Поскольку минимум при отсутствии ограничений на Q не превосходит минимума по наборам Q с условием $q_{1j} = 0$, выполнено $\mathcal{H}(X'Y) \geqslant \mathcal{H}(XY)$.

Рассмотрим набор Q, на котором достигается минимум в (11) т. е. значение $\mathcal{H}(X, Y)$. Образуем из Q набор Q', удалив все компоненты q_{1j} и заменив компоненты q_{2j} на $q_{1j} + q_{2j}$. Так как символ (a_2, b_j) мажорирует (a_1, b_j), значение каждой из сумм $\sum\limits_{i \in T, j \in U} q_{ij}$

[3] Правильнее было бы писать $a_{T \setminus \{j\}}$, но в целях простоты записей мы не различаем одноэлементные множества и элементы.

из (11) при отбрасывании q_{1j} и подстановке $q_{1j} + q_{2j}$ вместо q_{2j} не уменьшится. Это даёт

$$\mathcal{H}(XY) = \mathcal{H}(P_{XY}, Q) \geqslant \mathcal{H}(P_{X'Y}, Q') \geqslant \mathcal{H}(X'Y).$$

С учётом предшествующего неравенства получаем $\mathcal{H}(X'Y) = \mathcal{H}(XY)$.

Равенство $\mathcal{H}(X') = \mathcal{H}(X)$ доказывается аналогично. ■

Обозначим через $\hat{X} = (\hat{A}, \hat{P})$ источник, полученный из $X = (A, P)$ последовательным удалением мажорируемых символов, пока они есть.

Следствие 1. Имеют место равенства $\mathcal{H}(\hat{X}) = \mathcal{H}(X)$ и $\mathcal{H}(\hat{X}Y) = \mathcal{H}(XY)$.

Лемма 7. Из $A \succsim_s B$ следует $A \succsim_f B$.

Доказательство. Рассмотрим недоопределённые алфавиты A и B, удовлетворяющие условию $A \succsim_s B$.

а) Сначала будем полагать, что в алфавите A нет мажорируемых символов.

Пусть a_i — произвольный символ из A_0. В соответствии с леммой 5 возьмём набор $P = (p_T,\, T \in \mathcal{T})$ положительных вероятностей, для которого в любом наборе Q, минимизирующем $\mathcal{H}(P, Q)$, компонента q_i положительна. Рассмотрим источники X и Y в алфавитах A и B, заданные совместным распределением p_{TU}, $T \in \mathcal{T}$, $U \in \mathcal{U}$, удовлетворяющим условиям

$$p_{TU} > 0 \Leftrightarrow a_T R_{AB} b_U, \quad \sum_U p_{TU} = p_T,$$

где p_T — компонента выбранного набора P. Источники X и Y соответственны, поэтому $\mathcal{H}(XY) = \mathcal{H}(X)$.

Пусть $\mathcal{H}(XY)$ достигается на наборе $Q = (q_{uj}, u \in M, j \in L)$. Введём величины $q_u^0 = \sum\limits_j q_{uj}$ и положим $Q^0 = (q_u^0,\, u \in M)$. Принимая во внимание равенство $\sum\limits_u q_u^0 = \sum\limits_{u,j} q_{uj} = 1$, находим

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(XY) &= -\sum_{T,U} p_{TU} \log \sum_{u \in T, j \in U} q_{uj} \geqslant -\sum_{T,U} p_{TU} \log \sum_{u \in T} q_u^0 = \\ &= -\sum_T p_T \log \sum_{u \in T} q_u^0 = \mathcal{H}(P, Q^0) \geqslant \mathcal{H}(X). \end{aligned} \tag{12}$$

Значения левой и правой частей совпадают, поэтому все неравенства могут быть заменены равенствами. Одно из них имеет вид $\mathcal{H}(P, Q^0) = \mathcal{H}(X)$ и потому по выбору P выполнено $q_i^0 > 0$. Следовательно, при некотором j_i имеет место $q_{ij_i} > 0$.

Рассмотрим произвольные T и U, такие, что $i \in T$ и $(a_T, b_U) \in R_{AB}$. Для них $p_{TU} > 0$. Воспользуемся равенством

$$p_{TU} \log \sum_{u \in T, j \in U} q_{uj} = p_{TU} \log \sum_{u \in T} q_u^0,$$

возникшим в (12) при замене неравенств равенствами. В силу определения q_i^0 из него вытекает

$$\sum_{j \in U} q_{uj} = q_i^0 = \sum_j q_{uj}.$$

Так как q_{ij_i} положительно, $j_i \in U$. Это означает, что для заданного $a_i \in A_0$ имеется символ b_{j_i}, такой, что если $a_i \in a_T$ и $a_T R_{AB} b_U$, то $b_{j_i} \in b_U$.

Применим такие рассуждения ко всем символам $a_i \in A_0$ и для каждого из них найдем символ b_{j_i} с указанным свойством. Введём функцию $F : A_0 \to B_0$, положив $F(a_i) = b_{j_i}$. Так определённая функция F удовлетворяет условию

$$a_T R_{AB} b_U \Rightarrow f(a_T) \subseteq b_U. \tag{13}$$

б) Пусть теперь алфавит A произволен и все пары соответственных источников X и Y в алфавитах A и B удовлетворяют условию $\mathcal{H}(XY) = \mathcal{H}(X)$.

Рассмотрим одну из соответственных пар X и Y. Путём последовательного удаления из X всех мажорируемых символов построим источник $\hat{X} = (\hat{A}, \hat{P})$. Пусть его основным алфавитом является $\hat{A}_0 = \{a_i : i \in \hat{M}\}$, тогда $\hat{A} = \{a_{\hat{T}} = a_{T \cap \hat{M}} : a_T \in A\}$. По следствию 1 выполнено $\mathcal{H}(\hat{X}Y) = \mathcal{H}(XY)$ и $\mathcal{H}(\hat{X}) = \mathcal{H}(X)$. Поэтому $\mathcal{H}(\hat{X}Y) = \mathcal{H}(\hat{X})$. Легко видеть, что, произвольно варьируя в источниках X вероятности символов алфавита A, можно в качестве $\hat{A}$ получить все возможные источники в алфавите $\hat{A}$. Поэтому к алфавитам $\hat{A}$ и B применим результат пункта (а), в соответствии с которым существует функция $\hat{F} : \hat{A}_0 \to B_0$, удовлетворяющая условию $a_T R_{\hat{A}B} b_U \Rightarrow \hat{F}(a_{\hat{T}}) \subseteq b_U$. На её основе образуем функцию $F : A_0 \to B_0$, положив $F(a_i) = \hat{F}(a_i)$ для $a_i \in \hat{A}_0$ и назначив для $a_i \in A_0 \setminus \hat{A}_0$ значение $F(a_i)$ равным $\hat{F}(a_u)$, где a_u — символ из $\hat{A}_0$, мажорирующий a_i. Функция F удовлетворяет условию (13), ибо для $a_i \in a_T \setminus a_{\hat{T}}$ в $a_{\hat{T}}$ имеется мажорирующий a_i символ a_u и $F(a_i) = \hat{F}(a_u) \in b_U$. ■

Объединяя результаты лемм 2, 3, 4 и 7, получаем следующий факт.

Теорема 1. Введённые соотношения недоопределённых алфавитов по силе эквивалентны, т. е.

$$A \gtrsim_f B \Leftrightarrow A \gtrsim_c B \Leftrightarrow A \gtrsim_s B \Leftrightarrow A \gtrsim_a B.$$

Введённые понятия равносильности недоопределённых алфавитов эквивалентны, т. е.

$$A \eqsim_f B \Leftrightarrow A \eqsim_c B \Leftrightarrow A \eqsim_s B \Leftrightarrow A \eqsim_a B.$$

С учётом теоремы дальше будем применять записи $A \gtrsim B$ и $A \eqsim B$ без уточнения, в каком смысле они понимаются.

4. Некоторые операции над алфавитами. Приведение

Функциональный подход к введению соотношений $A \gtrsim B$ и $A \eqsim B$ более удобен и конструктивен, чем другие подходы, поскольку имеет дело непосредственно с алфавитами A и B, а не с соответственными последовательностями в этих алфавитах. Дальше будем базироваться на функциональном подходе.

Напомним, что соотношение $A \gtrsim B$ означает существование функции $F : A_0 \to B_0$, для которой $a_T R_{AB} b_U \Rightarrow F(a_T) \subseteq b_U$, а соотношение $A \eqsim B$ — одновременное выполнение соотношений $A \gtrsim B$ и $B \gtrsim A$.

Пусть $A = \{a_T : T \in \mathcal{T}\}$, $B = \{b_U : U \in \mathcal{U}\}$ и $C = \{c_V : V \in \mathcal{V}\}$ — недоопределённые алфавиты, R_{AB}, R_{BC} и R_{AC} — заданные для них соответствия.

Лемма 8. Пусть соответствия удовлетворяют условию

$$R_{AC} \subseteq R_{AB} \circ R_{BC}. \tag{14}$$

Тогда

$$\begin{array}{rcl} A \gtrsim B, B \gtrsim C & \Rightarrow & A \gtrsim C, \\ A \eqsim B, B \eqsim C & \Rightarrow & A \eqsim C. \end{array}$$

Доказательство.

1. Пусть выполнены $A \gtrsim B$ и $B \gtrsim C$ и эти соотношения устанавливаются с использованием функций $F : A_0 \to B_0$ и $G : B_0 \to C_0$. Рассмотрим произвольную пару (a_T, c_V), такую, что $a_T R_{AC} c_V$. Из (14) следует, что при некотором b_U имеют место $a_T R_{AB} b_U$ и $b_U R_{BC} c_V$. Тогда $F(a_T) \subseteq b_U$, а потому $G(F(a_T)) \subseteq G(b_U) \subseteq c_V$ и в качестве функции $A_0 \to C_0$ в соотношении $A \gtrsim C$ может быть взята $G(F)$.

2. В случае $A \eqsim B$ и $B \eqsim C$ справедливы, в частности, соотношения $A \gtrsim B$ и $B \gtrsim C$. Согласно п. 1 доказательства, из них следует $A \gtrsim C$. Кроме того, включение (14) может быть эквивалентно переписано в виде $R_{CA} \subseteq R_{CB} \circ R_{BA}$. Из него и соотношений $C \gtrsim B$ и $B \gtrsim A$, вытекающих из $B \eqsim C$ и $A \eqsim B$, в силу п. 1 следует $C \gtrsim A$. В результате получаем $A \eqsim C$. ■

Согласно лемме 8, соотношения $\gtrsim$ и $\eqsim$ транзитивны при условии (14).

Дальше будет встречаться ситуация, когда алфавит A преобразуется в B последовательно: $A = A^{(0)} \to A^{(1)} \to \ldots \to A^{(s)} = B$. При этом алфавиты A и B связаны соответствием $R_{AB} = R_{A^{(0)}A^{(s)}}$ и для каждого шага i, $i = 1, \ldots, s$, имеется соответствие $R_{A^{(i-1)}A^{(i)}}$. Произведение соответствий $R_{A^{(0)}A^{(1)}} \circ R_{A^{(1)}A^{(2)}} \circ \ldots \circ R_{A^{(s-1)}A^{(s)}}$ понимается в обычном смысле:

$$a^{(0)}(R_{A^{(0)}A^{(1)}} \circ R_{A^{(1)}A^{(2)}} \circ \ldots \circ R_{A^{(s-1)}A^{(s)}})a^{(s)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists a^{(1)} \ldots \exists a^{(s-1)}(a^{(0)} R_{A^{(0)}A^{(1)}} a^{(1)} \wedge \ldots \wedge a^{(s-1)} R_{A^{(s-1)}A^{(s)}} a^{(s)}).$$

Аналогично лемме 8 доказывается следующее её обобщение.

Лемма 9. Пусть соответствия удовлетворяют условию

$$R_{A^{(0)}A^{(s)}} \subseteq R_{A^{(0)}A^{(1)}} \circ R_{A^{(1)}A^{(2)}} \circ \ldots \circ R_{A^{(s-1)}A^{(s)}}. \tag{15}$$

Тогда

$$A^{(0)} \gtrsim A^{(1)}, A^{(1)} \gtrsim A^{(2)}, \ldots, A^{(s-1)} \gtrsim A^{(s)} \Rightarrow A^{(0)} \gtrsim A^{(s)},$$
$$A^{(0)} \eqsim A^{(1)}, A^{(1)} \eqsim A^{(2)}, \ldots, A^{(s-1)} \eqsim A^{(s)} \Rightarrow A^{(0)} \eqsim A^{(s)}.$$

Пусть заданы недоопределённый алфавит A и функция $F : A_0 \to A_0$. Скажем, что алфавит A' получен из A *функциональным преобразованием* F, если $A' = \{F(a_T) : a_T \in A\}$, $R_{AA'} = \{(a_T, F(a_T)) : a_T \in A\}$.

Пусть недоопределённый алфавит A не содержит символа a_T, совпадающего с a_j. Тогда выполнима операция *исключения символа* a_j, в результате которой возникает алфавит $A' = \{a_{T\setminus j} : a_T \in A\}$, связанный с A соответствием $R_{AA'} = \{(a_T, a_{T\setminus j}) : a_T \in A\}$. Отметим что операция исключения мажорируемого символа a_j выполнима всегда, ибо всякий символ a_T, содержащий a_j, содержит и мажорирующий его символ a_i.

Лемма 10. Если A' получен из A посредством а) функционального преобразования, б) исключения символа, в) исключения мажорируемого символа, то а) $A \gtrsim A'$, б) $A' \gtrsim A$, в) $A' \eqsim A$.

Доказательство. Пункт (а) фактически следует из определения, пункт (б) — из того, что всякое доопределение символа $a_{T\setminus j}$ доопределяет a_T. Рассмотрим пункт (в). Пусть удаляемый символ a_j мажорируется символом a_i. Операцию удаления a_j можно трактовать как функциональное преобразование F, при котором $F(a_j) = a_i$ и $F(a_u) = a_u$ для $u \neq j$. Поэтому, согласно (а), выполнено $A \gtrsim A'$. С другой стороны, это операция удаления символа, и в соответствии с (б) имеет место $A' \gtrsim A$. В итоге получаем $A' \eqsim A$. ■

Рассмотрим теперь случай последовательного исключения из алфавита A мажорируемых символов. Обозначим через J множество индексов j исключенных символов a_j. Результат исключения даёт алфавит $A_J = \{a_{T\setminus J} : a_T \in A\}$, связанный с A соответствием $R_{AA_J} = \{(a_T, a_{T\setminus J}) : a_T \in A\}$.

Лемма 11. Алфавит, полученный последовательным исключением мажорируемых символов, равносилен исходному.

Доказательство. Применим индукцию по процедуре исключения. Утверждение леммы для одноэлементного множества J вытекает из пункта (в) леммы 10. Предположим, что утверждение справедливо для множества J, и пусть из алфавита A_J исключается символ $a_{j'}$. Положим $J' = J \cup j'$ и рассмотрим произвольную пару $(a_T, a_{T\setminus J'}) \in R_{AA_{J'}}$. Символ $a_{T\setminus J'}$ возник из $a_{T\setminus J} \in A_J$ в результате исключения $a_{j'}$, а потому $(a_T, a_{T\setminus J}) \in R_{AA_J}$ и $(a_{T\setminus J}, a_{T\setminus J'}) \in R_{A_JA_{J'}}$. Это означает $(a_T, a_{T\setminus J'}) \in R_{AA_J} \circ R_{A_JA_{J'}}$ и приводит к включению $R_{AA_{J'}} \subseteq R_{AA_J} \circ R_{A_JA_{J'}}$, совпадающему для этих соответствий с условием (14). Из соотношений $A \approx A_J$ и $A_J \approx A_{J'}$, первое из которых выполнено по предположению индукции, а второе — по лемме 10, в силу леммы 8 вытекает $A \approx A_{J'}$. ■

Недоопределённый алфавит, у которого отсутствуют мажорируемые символы, называется *приведённым*. Последовательно устраняя в произвольном порядке из алфавита A мажорируемые символы (пока это возможно), придём к некоторому приведённому алфавиту $\hat{A}$. Если $\hat{M} \subseteq M$ — множество индексов неустранённых символов, то $\hat{A} = \{a_{T\cap\hat{M}} : a_T \in A\}$, $R_{A\hat{A}} = \{(a_T, a_{T\cap\hat{M}}) : a_T \in A\}$. По лемме 11 $\hat{A} \approx A$.

Устраняя из A мажорируемые символы в другом порядке, можно получить другой приведённый алфавит $\check{A}$, найти соответствие $R_{A\check{A}}$, затем соответствие $R_{\hat{A}\check{A}} = R_{\hat{A}A} \circ \circ R_{A\check{A}}$, где $R_{\hat{A}A} = R^{-1}_{A\hat{A}}$.

Соответственные алфавиты A и B назовем *изоморфными*, если существует биекция $\pi : A_0 \to B_0$, такая, что соответствие

$$R_{\pi(A)B} = \{(\pi(a_T), b_U) : (a_T, b_U) \in R_{AB}\}$$

является диагональю. Здесь $\pi(a_T) = \{\pi(a_i) : i \in T\}$.

Лемма 12. Изоморфные алфавиты равносильны.

Доказательство. В качестве функции F в (1) может быть взята биекция π, а в качестве G — её обращение π^{-1}. Поскольку $R_{\pi(A)B}$ — диагональ, для $(a_T, b_U) \in R_{AB}$ выполнено $\pi(a_T) = b_U$ и $\pi^{-1}(b_U) = a_T$. ■

Следующее утверждение показывает, что приведённый алфавит единственен с точностью до переименования основных символов.

Теорема 2. Все приведённые алфавиты, образованные из заданного алфавита A, изоморфны.

Доказательство. Символ a_j алфавита A назовем *строго мажорируемым*, если в A существует такой символ a_i, что a_i мажорирует a_j и a_j не мажорирует a_i. Поскольку отношение мажорирования транзитивно, символы, не являющиеся строго мажорируемыми, разбиваются на классы эквивалентности, состоящие из символов a_u, индексы u которых входят в одну и ту же совокупность множеств T, $T \in \mathcal{T}$. В результате построения приведённого алфавита будут исключены все строго мажорируемые символы, а в каждом классе эквивалентности нестрого мажорируемых символов остаётся один. Если $\hat{A}$ и $\check{A}$ — различные приведённые алфавиты и им соответствуют множества неисключённых символов $\hat{A}_0$ и $\check{A}_0$, то можно задать биекцию $\pi : \hat{A}_0 \to \check{A}_0$, сопоставив

символу $a_{\hat{T}} \in \hat{A}_0$ единственный символ $a_{\check{T}} \in \check{A}_0$ из того же класса эквивалентности. В приведённых алфавитах $\hat{A}$ и $\check{A}$ символу $a_T \in A$ соответствуют символы $a_{\hat{T}} = a_T \cap \hat{A}_0$ и $a_{\check{T}} = a_T \cap \check{A}_0$, такие, что $a_{\check{T}} = \pi(a_{\hat{T}})$. Поэтому соответствие $R_{\pi(\hat{A})\check{A}}$, образованное парами $(\pi(a_{\hat{T}}), a_{\check{T}})$, является диагональю. ■

В качестве равносильных преобразований мы использовали удаления мажорируемых символов. Поскольку соотношение равносильности симметрично, в результате добавления мажорируемых символов также возникают равносильные алфавиты.

Если требуется решить некоторую прикладную задачу, то переход от исходного алфавита к равносильному может упростить её решение либо даже сделать нерешаемую задачу решаемой. Приведём два примера. Первый относится к задаче сжатия недоопределённых данных и использует сокращение основного алфавита за счёт удаления мажорируемых символов, второй относится к задаче (двоичного) разложения недоопределённого алфавита и сопровождается увеличением основного алфавита за счёт введения дополнительных мажорируемых символов.

Пример 1. Задача сжатия недоопределённых данных ставится как задача такого кодирования недоопределённых последовательностей, которое обеспечиват возможность восстановления какого-либо их доопределения [5]. Пусть имеются равносильные алфавиты A и B и соответственные последовательности $\mathbf{a} = a_{T_1} \dots a_{T_n}$ и $\mathbf{b} = b_{U_1} \dots b_{U_n}$ в этих алфавитах. Всякое кодирование последовательности $\mathbf{a}$ может рассматриваться также как кодирование последовательности $\mathbf{b}$. Действительно, применив функцию F к доопределению $\mathbf{a}^0 = a_{i_1} \dots a_{i_n}$ последовательности $\mathbf{a}$, найденному по её коду, получим последовательность $F(\mathbf{a}^0) = F(a_{i_1}) \dots F(a_{i_n})$, которая в силу условий $F(a_{T_i}) \subseteq b_{U_i}$ доопределяет $\mathbf{b}$. Подобным же образом код для $\mathbf{b}$ может рассматриваться как код для $\mathbf{a}$. Если кодирование в одном из алфавитов оптимально (минимизирует среднюю длину кода), то оно оптимально и во втором.

В настоящее время не известно каких-либо эффективных методов кодирования недоопределённых данных. Для них применяется либо метод случайного кодирования, либо жадный (градиентный) алгоритм (первый не конструктивен, второй не эффективен). Не исключена возможность, что в результате приведения заданного недоопределённого алфавита возникнет всюду определённый алфавит. Тогда известные эффективные методы кодирования всюду определённых данных [7] обеспечат эффективное кодирование последовательностей в исходном недоопределённом алфавите. Приведём простейший пример этой ситуации. Пусть основным алфавитом является $A_0 = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$, а недоопределённым — $A = \{a_1, a_{23}, a_{02}\}$. Символы a_0 и a_3 мажорируются символом a_2. В результате исключения мажорируемых символов придём к всюду определённому алфавиту $\hat{A} = \{a_1, a_2\}$, оптимальное кодирование в котором обеспечит оптимальное кодирование в исходном недоопределённом алфавите.

Пример 2. Задача (двоичного) разложения недоопределённого алфавита состоит в том [3], чтобы каждому символу a_i основного алфавита A_0 сопоставить двоичное слово $\lambda_i = \lambda_i(1) \dots \lambda_i(s)$ некоторой длины s, а каждому недоопределённому символу $a_T \in A$ — двоичное слово $\lambda_T = \lambda_T(1) \dots \lambda_T(s)$ длины s в алфавите $\{0, 1, *\}$ так, чтобы множество доопределений слова λ_T совпало с $\{\lambda_i : i \in T\}$. Может оказаться, что такое разложение невыполнимо для заданного алфавита, но становится возможным при переходе к равносильному алфавиту. Проиллюстрируем это.

Пусть $A_0 = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и требуется разложить недоопределённый алфавит $A = \{a_{01}, a_{12}, a_{23}, a_{34}, a_{40}\}$. Предположим, что разложение существует и задаётся словами λ_i и $\lambda_{is(i)}$, $i = 0, \dots, 4$, $s(i) = (i+1) \bmod 5$. Слово $\lambda_{is(i)}$, имеющее два доопределения,

содержит единственный символ $*$, а потому λ_i и $\lambda_{s(i)}$ различаются в одной позиции. Последовательность $\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_0$ позволяет получить λ_0 из λ_0 за 5 шагов, на каждом из которых изменяется один символ, но для нечётного числа шагов это невозможно. Полученное противоречие показывает, что рассматриваемый алфавит неразложим.

Приведём разложение равносильного алфавита, найденное методом работы [3]. Основной алфавит разложения образован словами $\lambda_0 = 100$, $\lambda_1 = 110$, $\lambda_2 = 011$, $\lambda_3 = 001$, $\lambda_4 = 000$, $\lambda_5 = 010$, $\lambda_6 = 111$, а недоопределённый алфавит — словами $\lambda_{01} = 1{*}0$, $\lambda_{12} = {*}1{*}$, $\lambda_{23} = 0{*}1$, $\lambda_{34} = 00{*}$, $\lambda_{40} = {*}00$. Все недоопределённые слова $\lambda_{is(i)}$, исключая λ_{12}, имеют нужные доопределения λ_i и $\lambda_{s(i)}$, а у слова λ_{12} имеются, помимо λ_1 и λ_2, доопределения λ_5 и λ_6. Но лишние доопределения λ_5 и λ_6 мажорируются каждым из слов λ_1 и λ_2 и могут быть удалены с сохранением равносильности.

5. Распознавание равносильности алфавитов

Выше рассмотрены равносильные преобразования заданного алфавита A, теперь поставим вопрос о равносильности двух исходно заданных соответственных алфавитов $A = \{a_T : T \in \mathcal{T} \subseteq 2^M\}$ и $B = \{b_U : U \in \mathcal{U} \subseteq 2^L\}$. Путём исключения мажорируемых символов в алфавитах A и B перейдём к приведённым алфавитам $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Они единственны с точностью до изоморфизма и равносильны исходным алфавитам. Приведённые алфавиты имеют вид $\hat{A} = \{a_{T\cap\hat{M}} : a_T \in A\}$ и $\hat{B} = \{b_{U\cap\hat{L}} : b_U \in B\}$, где $\hat{M}$ и $\hat{L}$ — множества индексов неисключённых символов в алфавитах A и B. Приведённые алфавиты связаны соответствием $R_{\hat{A}\hat{B}} = \{(a_{T\cap\hat{M}}, b_{U\cap\hat{L}}) : a_T R_{AB} b_U\}$.

Теорема 3. Соответственные алфавиты A и B равносильны тогда и только тогда, когда построенные по ним приведённые алфавиты $\hat{A}$ и $\hat{B}$ изоморфны.

Доказательство.

1. Пусть приведённые алфавиты $\hat{A}$ и $\hat{B}$ изоморфны. В силу лемм 11 и 12 имеют место равносильности $A \approx \hat{A}$, $\hat{A} \approx \hat{B}$ и $\hat{B} \approx B$. Рассмотрим произвольную пару $(a_T, b_U) \in R_{AB}$. Из $a_T R_{A\hat{A}} a_{T\cap\hat{M}}$, $a_{T\cap\hat{M}} R_{\hat{A}\hat{B}} b_{U\cap\hat{L}}$ и $b_{U\cap\hat{L}} R_{\hat{B}B} b_U$ следует включение $R_{AB} \subseteq R_{A\hat{A}} \circ R_{\hat{A}\hat{B}} \circ R_{\hat{B}B}$, играющее роль (15). По лемме 9 заключаем, что $A \approx B$.

2. Пусть имеет место равносильность $A \approx B$. Наряду с ней по лемме 11 справедливы равносильности $\hat{A} \approx A$ и $B \approx \hat{B}$. Пары из $R_{\hat{A}\hat{B}}$ имеют вид $(a_{T\cap\hat{M}}, b_{U\cap\hat{L}})$, где $(a_T, b_U) \in R_{AB}$. С учётом $a_{T\cap\hat{M}} R_{\hat{A}A} a_T$ и $b_U R_{B\hat{B}} b_{U\cap\hat{L}}$ заключаем, что выполнено включение $R_{\hat{A}\hat{B}} \subseteq R_{\hat{A}A} \circ R_{AB} \circ R_{B\hat{B}}$, играющее роль (15). Воспользовавшись леммой 9, приходим к равносильности $\hat{A} \approx \hat{B}$. Из неё следует существование функций $F : \hat{A}_0 \to \hat{B}_0$ и $G : \hat{B}_0 \to \hat{A}_0$, таких, что для $(a_{T\cap\hat{M}}, b_{U\cap\hat{U}}) \in R_{\hat{A}\hat{B}}$ выполнено $F(a_{T\cap\hat{M}}) \subseteq b_{U\cap\hat{L}}$ и $G(b_{U\cap\hat{L}}) \subseteq a_{T\cap\hat{M}}$.

Пусть символ $a_i \in \hat{A}_0$ произволен, $F(a_i) = b_j$, $G(b_j) = a_u$. Покажем, что $a_u = a_i$.

Возьмём любой символ $a_{T\cap\hat{M}} \in \hat{A}$, содержащий a_i, и рассмотрим произвольную пару $(a_{T\cap\hat{M}}, b_{U\cap\hat{L}}) \in R_{\hat{A}\hat{B}}$. Из $F(a_{T\cap\hat{M}}) \subseteq b_{U\cap\hat{L}}$ следует $b_j \in b_{U\cap\hat{L}}$, и в силу $G(b_{U\cap\hat{L}}) \subseteq a_{T\cap\hat{M}}$ справедливо $a_u \in a_{T\cap\hat{M}}$. Так как символ $a_{T\cap\hat{M}}$, содержащий a_i, произволен, символ a_u мажорирует a_i и обязан совпасть с a_i, поскольку приведённый алфавит $\hat{A}$ не содержит отличных от a_i символов, мажорирующих a_i. Одновременно установлено, что

$$F(a_i) = b_j \Rightarrow G(b_j) = a_i. \tag{16}$$

Функция F инъективна, ибо в силу (16) равенства $F(a_i) = b_j$ и $F(a_{i'}) = b_j$ влекут $a_i = a_{i'}$. Аналогично (16) можно доказать, что $G(b_j) = a_u \Rightarrow F(a_u) = b_j$. Отсюда вытекает, что F сюръективна, поскольку всякий символ $b_j \in \hat{B}_0$ может быть получен как $F(a_u)$, где $a_u = G(b_j)$. Таким образом, F биективна, а из (16) следует, что $G = F^{-1}$.

Для произвольной пары $(a_{T\cap\hat{M}}, b_{U\cap\hat{L}}) \in R_{\hat{A}\hat{B}}$ выполнено $F(a_{T\cap\hat{M}}) \subseteq b_{U\cap\hat{L}}$ и $F^{-1}(b_{U\cap\hat{L}}) = G(b_{U\cap\hat{L}}) \subseteq a_{T\cap\hat{M}}$. Применив к последнему соотношению функцию F, получаем $b_{U\cap\hat{L}} \subseteq F(a_{T\cap\hat{M}})$, что приводит к $F(a_{T\cap\hat{M}}) = b_{U\cap\hat{L}}$. Это означает, что соответствие $R_{F(\hat{A})\hat{B}}$, образованное парами $(F(a_{T\cap\hat{M}}), b_{U\cap\hat{L}})$, является диагональю и алфавиты $\hat{A}$ и $\hat{B}$ изоморфны. ■

Как обычно [8], *эффективными* будем считать алгоритмы, время работы которых ограничено полиномом от размера исходных данных.

Теорема 4. Для соответственных алфавитов A и B существуют эффективные алгоритмы проверки соотношений $A \gtrsim B$ и $A \approx B$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть соотношение $A \approx B$, поскольку $A \gtrsim B$ сводится к нему применением леммы 1. В силу теоремы 3 равносильность алфавитов A и B имеет место тогда и только тогда, когда приведённые алфавиты $\hat{A}$ и $\hat{B}$ изоморфны.

По A, B и соответствию R_{AB} построим (эффективно) $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $R_{\hat{A}\hat{B}}$. Произвольно занумеруем $(a_{\hat{T}_s}, b_{\hat{U}_s})$, $s = 1, 2, \ldots, N$, все пары $(a_{\hat{T}}, b_{\hat{U}})$ соответствия $R_{\hat{A}\hat{B}}$. Множества $\hat{M} = \bigcup\limits_s \hat{T}_s$ и $\hat{L} = \bigcup\limits_s \hat{U}_s$ образованы индексами всех символов основных алфавитов $\hat{A}_0$ и $\hat{B}_0$. Для $i \in \hat{M}$ введём набор

$$\eta_i = (\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{iN}),$$

где η_{is} равны 1 и 0 в случаях $i \in \hat{T}_s$ и $i \notin \hat{T}_s$. Поскольку в $\hat{A}_0$ мажорируемых символов нет, все наборы η_i различны. Аналогично с каждым $j \in \hat{L}$ свяжем набор

$$\xi_j = (\xi_{j1}, \xi_{j2}, \ldots, \xi_{jN}),$$

определяемый принадлежностью j к множествам $\hat{U}_s$. Все наборы ξ_j также различны.

Легко видеть, что $\hat{A}$ и $\hat{B}$ изоморфны тогда и только тогда, когда мощности множеств $\hat{M}$ и $\hat{L}$ совпадают и для каждого $i \in \hat{M}$ имеется (единственное) $j \in \hat{L}$, при котором $\eta_i = \xi_j$. Если для этих i и j положить $b_j = \pi(a_i)$, получим биекцию $\pi : \hat{M} \to \hat{L}$, участвующую в определении изоморфизма. Трудоёмкость описанной процедуры полиномиальна. ■

Из доказательства извлекается полиномиальный способ построения функций F и G, присутствующих в определении равносильности (1). В качестве значения функции $F : A_0 \to B_0$ для $a_j \in A_0$ можно взять $F(a_j) = \pi(a_i)$, где a_i — произвольный символ из $\hat{A}_0$, мажорирующий в A символ a_j. Функция G строится аналогично.

До сих пор рассматривалась равносильность соответственных алфавитов. Обсудим теперь понятие равносильности недоопределённых алфавитов без заданного для них соответствия.

Будем использовать запись $A \sim B$ для обозначения того, что для недоопределённых алфавитов A и B существует соответствие R_{AB}, при котором $A \approx B$. В отличие от соотношения $A \approx B$, которое нельзя рассматривать как отношение на множестве алфавитов, ибо оно зависит также от соответствия R_{AB}, соотношение $A \sim B$ представляет собой отношение.

Утверждение 2. Отношение $A \sim B$ на множестве недоопределённых алфавитов является эквивалентностью.

Доказательство. Очевидно, что это отношение рефлексивно и симметрично. Докажем его транзитивность. Если имеют место равносильности $A \sim B$, $B \sim C$ и соотношения $A \approx B$, $B \approx C$ справедливы при соответствиях R_{AB}, R_{BC}, то по лемме 8 при $R_{AC} = R_{AB} \circ R_{BC}$ выполнено $A \approx C$, а потому $A \sim C$. ■

Алфавиты A и B, для которых $A \sim B$, будем называть *эквивалентными*. Следствием теоремы 3 является следующий факт.

Утверждение 3. Алфавиты A и B эквивалентны тогда и только тогда, когда алфавиты $\hat{A}$ и $\hat{B}$, полученные их приведением, изоморфны.

Алфавит A' называется *минимальным* для A, если $A' \sim A$ и A' имеет наименьшую мощность $|A'|$ и наименьшую мощность $|A'_0|$ основного алфавита среди всех алфавитов, эквивалентных A.

Утверждение 4. Алфавит $\hat{A}$, полученный из A приведением, минимален для A, и, таким образом, задача построения минимального алфавита решается эффективно.

Доказательство. Действительно, если имеется алфавит B, эквивалентный A и имеющий меньшую, чем у $\hat{A}$, мощность либо мощность основного алфавита, то это же будет справедливо для алфавита $\hat{B}$, полученного приведением B. В этом случае алфавит $\hat{B}$ не изоморфен $\hat{A}$, и по предыдущей лемме алфавит B не может быть эквивалентен A. ■

Преобразование недоопределённого алфавита называется *эквивалентным*, если в применении к любому алфавиту оно даёт эквивалентный алфавит. Одним из эквивалентных преобразований является исключение мажорируемого символа (лемма 10). Поскольку отношение эквивалентности симметрично, эквивалентным является и обратное преобразование — добавление мажорируемого символа. Более подробно эта операция состоит в следующем. К основному алфавиту A_0 добавляется новый символ a_s. Выбирается какой-либо символ $a_i \in A_0$, затем некоторым символам $a_T \in A$, таким, что $T \ni i$, сопоставляются и добавляются в алфавит A символы $a_{T \cup s}$. При добавлении $a_{T \cup s}$ символ a_T может быть оставлен в алфавите либо удалён из него. Эквивалентным преобразованием является также операция переименования символов. При её выполнении символы основного алфавита переименовываются некоторым образом (без отождествления) и символы $a_T = \{a_i : i \in T\}$ алфавита A заменяются на $\{\pi(a_i) : i \in T\}$, где $\pi(a_i)$ — результат переименования символа a_i. Система эквивалентных преобразований называется *полной*, если для любых двух эквивалентных алфавитов существует последовательность преобразований из этой системы, переводящая один алфавит в другой.

Утверждение 5. Операции исключения мажорируемого символа, добавления мажорируемого символа и переименования символов образуют полную систему эквивалентных преобразований недоопределённых алфавитов.

Доказательство. Действительно, если $A \sim B$, то приведённые алфавиты $\hat{A}$ и $\hat{B}$ изоморфны (утверждение 3). Поэтому из алфавита A можно устранением мажорируемых символов получить $\hat{A}$, переименованием символов преобразовать его в $\hat{B}$, а затем добавлением мажорируемых символов перейти к B. ■

Задача распознавания равносильности алфавитов решается эффективно (теорема 4), а решение задачи распознавания эквивалентности алфавитов связано с трудностями, поскольку к её частному случаю, когда символы недоопределённого алфавита имеют по два доопределения, сводится задача об изоморфизме графов [8], являющая-

ся одной из наиболее известных комбинаторных задач, безуспешные попытки решения которой продолжаются в течение нескольких десятков лет.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колмогоров А. Н.* Три подхода к определению понятия «количество информации» // Проблемы передачи информации. 1965. Т. 1. Вып. 1. С. 3–11.
2. *Шоломов Л. А.* Преобразование нечетких данных с сохранением информационных свойств // Дискретный анализ и исследование операций. 2005. Сер. 1. Т. 12. № 3. С. 85–104.
3. *Шоломов Л. А.* Разложение недоопределенных данных // Дискретный анализ и исследование операций. 2012. Т. 19. № 6. С. 72–98.
4. *Галлагер Р.* Теория информации и надежная связь. М.: Сов. радио, 1974. 720 с.
5. *Шоломов Л. А.* Элементы теории недоопредёленной информации // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2009. № 2. С. 18–42.
6. *Шоломов Л. А.* О функционалах, характеризующих сложность систем недоопределенных булевых функций // Проблемы кибернетики. Вып. 19. М.: Наука, 1967. С. 123–139.
7. *Потапов В. Н.* Обзор методов неискажающего кодирования дискретных источников // Дискретный анализ и исследование операций. 1999. Сер. 1. Т. 6. № 4. С. 49–91.
8. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.