DOI 10.17223/20710410/25/6

УДК 519.6

ЛОКАЛЬНАЯ ПРИМИТИВНОСТЬ ГРАФОВ И НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ

С. Н. Кяжин*, В. М. Фомичев*,**

*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Москва, Россия
**Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, г. Москва, Россия

E-mail: s.kyazhin@kaf42.ru, fomichev@nm.ru

Для ряда объектов, моделируемых неотрицательными матрицами (графами), важные свойства достигаются тогда, когда положительны их подматрицы (подграфы являются полными). В связи с этим в данной работе известные понятия примитивности и экспонента матрицы (графа) обобщаются до понятий локальной примитивности, квазипримитивности и локальных экспонентов матрицы (графа). Получены условия локальной примитивности, субпримитивности и квазипримитивности орграфа. Установлена связь экспонента матрицы (орграфа) с локальными экспонентами.

Ключевые слова: *экспонент, локальный экспонент, локальный субэкспонент, локальный квазиэкспонент, примитивная матрица, локальная примитивность.*

Введение

В ряде прикладных задач для изучения коммуникативных свойств системы объектов представляет интерес определение экспонента примитивной неотрицательной 0,1-матрицы или системы 0,1-матриц, кодирующих связи между объектами системы. Экспонентам неотрицательных матриц и систем матриц посвящено множество трудов. Обзор результатов в этом направлении, полученных до 2012 г., можно найти в [1].

Вместе с тем в некоторых приложениях важные свойства объектов, моделируемых неотрицательными матрицами, достигаются тогда, когда положительной является не вся матрица, а лишь некоторая её часть, например подматрица, получаемая вычеркиванием некоторых строк и столбцов. Такая ситуация имеет место при изучении, в частности, композиций преобразований векторного пространства, составляющих полугруппу или группу преобразований состояний генератора гаммы: во многих случаях достаточно, чтобы от всех битов начального состояния генератора существенно зависела лишь выделенная часть битов промежуточных состояний. В связи с этим в рамках матрично-графового подхода к изучению коммуникативных свойств объектов в данной работе в порядке обобщения понятий примитивности и экспонента введены и исследованы понятия локальной примитивности, субпримитивности и квазипримитивности, а также локальных экспонентов, субэкспонентов и квазиэкспонентов неотрицательных матриц и графов. Начальные результаты в этом направлении представлены в [2].

Основные обозначения:

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$N_n = \{1, \ldots, n\}$, где $n \in \mathbb{N}$;

Ω_n — множество всех непустых подмножеств множества N_n;

$M_0(n \times m)$ — множество 0,1-матриц размера $n \times m$;

$M_0(n) = M_0(n \times m)$ при $n = m$;

$A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$, где $A, B \in M_0(n)$;
$A^t = (a_{i,j}^{(t)})$, $t \in \mathbb{N}$;
$\nu(A)$ — носитель неотрицательной матрицы A;
$S(n)$ — группа всех подстановочных матриц порядка n.

1. Локальная примитивность матриц

Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $A \in M_0(n \times m)$, $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$, $J = \{j_1, \ldots, j_r\}$, $\varnothing \neq I \subseteq N_n$, $\varnothing \neq J \subseteq N_m$. Рассмотрим подматрицу $A(I \times J)$ размера $k \times r$, $0 < k \leqslant n$, $0 < r \leqslant m$, полученную из A вычёркиванием строк с номерами $i \neq i_1, \ldots, i_k$ и столбцов с номерами $j \neq j_1, \ldots, j_r$. Матрицу $A(I \times J)$ при $I = J$ обозначим $A(J^2)$, при $I = N_n$ обозначим $A(*J)$ и при $J = N_m$ — $A(I*)$.

Матрица A называется $I \times J$-положительной (J^2-положительной при $I = J$, $*J$-положительной при $I = N_n$, $I*$-положительной при $J = N_m$), если положительна матрица $A(I \times J)$ (матрица $A(J^2)$, матрица $A(*J)$, матрица $A(I*)$). Множество $I \times J$-положительных (J^2-положительных, $*J$-положительных, $I*$-положительных) матриц обозначим $M_+(I \times J)$ ($M_+(J^2)$, $M_+(*J)$, $M_+(I*)$).

Матрица A называется:

— s-положительной, если не содержит нулевых строк;
— c-положительной, если не содержит нулевых столбцов;
— sc-положительной, если не содержит нулевых строк и столбцов.

Матрица A называется $I \times J$-s-положительной (J^2-s-положительной при $I = J$, $*J$-s-положительной при $I = N_n$, $I*$-s-положительной при $J = N_m$), если s-положительной является матрица $A(I \times J)$ (матрица $A(J^2)$, матрица $A(*J)$, матрица $A(I*)$). Множество s-положительных ($I \times J$-s-положительных, J^2-s-положительных, $*J$-s-положительных, $I*$-s-положительных) матриц обозначим $Q_s(n \times m)$ ($Q_s(I \times J)$, $Q_s(J^2)$, $Q_s(*J)$, $Q_s(I*)$). Аналогично определяются $I \times J$-c-положительные и $I \times J$-sc-положительные матрицы. Соответствующие множества матриц обозначим $Q_c(n \times m)$, $Q_c(I \times J)$, $Q_c(J^2)$, $Q_c(*J)$, $Q_c(I*)$ и $Q_{sc}(n \times m)$, $Q_{sc}(I \times J)$, $Q_{sc}(J^2)$, $Q_{sc}(*J)$, $Q_{sc}(I*)$.

Далее считаем $n = m > 1$, $A \in M_0(n)$. Рассмотрим $M_0(n)$ как кольцо относительно операций сложения и умножения (обозначаемых $\pm$ и $\circ$ соответственно), где $A \pm B = \nu(A + B)$, $A \circ B = \nu(AB)$, то есть $A \pm B$ и $A \circ B$ суть 0,1-матрицы, полученные из матриц $A + B$ и AB соответственно заменой положительных элементов единицами.

Рассмотрим свойства типа $I \times J$-положительности для степеней квадратной матрицы. Матрица A называется $I \times J$-примитивной (J^2-примитивной при $I = J$, $*J$-примитивной при $I = N_n$, $I*$-примитивной при $J = N_n$), если существует натуральное число γ, такое, что матрица $A^t(I \times J)$ (матрица $A^t(J^2)$, матрица $A^t(*J)$, матрица $A^t(I*)$) положительна при любом $t \geqslant \gamma$. Наименьшее такое число γ назовём $I \times J$-экспонентом (J^2-экспонентом при $I = J$, $*J$-экспонентом при $I = N_n$, $I*$-экспонентом при $J = N_n$) матрицы A, обозначим $I \times J$-$\exp A$ (J^2-$\exp A$, $*J$-$\exp A$, $I*$-$\exp A$). Множество примитивных ($I \times J$-примитивных, J^2-примитивных, $*J$-примитивных, $I*$-примитивных) матриц обозначим $P(n)$ ($P(I \times J)$, $P(J^2)$, $P(*J)$, $P(I*)$).

Обозначим $S(J)$ подгруппу группы $S(n)$, определяемую условием: если $i \notin J$, то в любой матрице из $S(J)$ единица в i-й строке расположена на главной диагонали. Иначе говоря, при умножении матрицы из подгруппы $S(J)$ на любой вектор координаты вектора с номерами $i \notin J$ остаются неизменными, а остальные координаты могут быть переставлены. Группа $S(J)$ изоморфна группе $S(|J|)$. Заметим, что подстановочные матрицы не являются $I \times J$-примитивными, если хотя бы одно из множеств I, J имеет порядок больше единицы.

Отметим некоторые алгебраические свойства рассматриваемых множеств матриц.

Утверждение 1. При любых допустимых множествах I, J выполнено:

а) если $A \in Q_s(I^2) \cup Q_c(J^2)$ и γ — наименьшее натуральное число, при котором $A^\gamma(I \times J) > 0$, то $A \in P(I \times J)$ и $I \times J\text{-exp}A = \gamma$;

б) $Q_s(J^2)$ и $Q_c(J^2)$ — мультипликативные моноиды, содержащие подгруппу $S(J)$;

в) $P(J^2)$ — наследственное подмножество множества $Q_{sc}(n)$.

Доказательство.

а) Если $A^t(I \times J) > 0$, то $a_{i,j}^{(t)} > 0$ при любых $i \in I$ и $j \in J$, $t \geqslant 1$. По правилу умножения матриц

$$a_{i,j}^{(t+1)} = a_{i,1}a_{1,j}^{(t)} + \ldots + a_{i,n}a_{n,j}^{(t)}; \tag{1}$$

$$a_{i,j}^{(t+1)} = a_{i,1}^{(t)}a_{1,j} + \ldots + a_{i,n}^{(t)}a_{n,j}. \tag{2}$$

Если $A \in Q_s(I^2)$ и $i \in I$, то во множестве $\{a_{i,r} : r \in I\}$ содержится положительное число, тогда $a_{i,j}^{(t+1)} > 0$ в соответствии с (1). Если $A \in Q_c(J^2)$ и $j \in J$, то во множестве $\{a_{r,j} : r \in J\}$ содержится положительное число, тогда $a_{i,j}^{(t+1)} > 0$ в соответствии с (2). Следовательно, в обоих случаях $A^{t+1}(I \times J) > 0$. Отсюда если $A^\gamma(I \times J) > 0$, то $A^t(I \times J) > 0$ при любом $t \geqslant \gamma$.

б) Единичная матрица является J^2-s-положительной при любом допустимом множестве J, то есть достаточно показать, что множество $Q_s(J^2)$ замкнуто относительно умножения. Пусть $C = (c_{i,j}) = AB$, где A и B суть J^2-s-положительные матрицы, тогда $a_{i,l(i)} > 0$ и $b_{l(i),j} > 0$ при любом $i \in J$ и при некоторых $l(i), j \in J$. Тогда

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + \ldots + a_{i,n}b_{n,j} \geqslant a_{i,l(i)}b_{l(i),j} > 0,$$

то есть i-я строка матрицы C ненулевая при всех $i \in J$. Значит, $C \in Q_s(J^2)$.

Для множества $Q_c(J^2)$ доказательство аналогичное.

Включение $S(J) \subseteq Q_s(J^2) \cap Q_c(J^2)$ следует из определений данных множеств.

в) Если матрица содержит нулевую строку (столбец), то и любая её степень содержит нулевую строку (столбец), отсюда $P(J^2) \subseteq Q_{sc}(n)$. Любая степень J^2-примитивной матрицы также J^2-примитивная, значит, подмножество $P(J^2)$ — наследственное. ■

Замечание 1. Множество $Q_{sc}(I \times J)$ не замкнуто относительно умножения. Например, при $n = 3$, $I = \{1, 2, 3\}$, $J = \{1, 2\}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in Q_{sc}(I \times J), \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \notin Q_{sc}(I \times J).$$

Рассмотрим частичные порядки на множестве $M_0(n)$ и других множествах.

Напомним, что функция $f : X \to L$, где X — частично упорядоченное множество, L — линейно упорядоченное множество, называется изотонной (антиизотонной), если для любых $x, x' \in X$ из отношения $x \leqslant x'$ следует, что $f(x) \leqslant f(x')$ ($f(x) \geqslant f(x')$).

Для $I, J, I', J' \subseteq N_n$ положим: $(I, J) \leqslant (I', J') \Leftrightarrow I \subseteq I'$ и $J \subseteq J'$. Данное бинарное отношение $\leqslant$ рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, следовательно, является отношением частичного порядка на множестве Ω_n^2.

Для $A, B \in M_0(n)$ положим: $A \leqslant B \Leftrightarrow a_{i,j} \leqslant b_{i,j}$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$. Если при этом существуют такие i и j, что $a_{i,j} < b_{i,j}$, то $A < B$. Бинарное отношение $\leqslant$ обладает свойствами рефлексивности, транзитивности и антисимметричности, следовательно, является отношением частичного порядка на множестве $M_0(n)$.

Выполнены следующие монотонные свойства.

Утверждение 2.

а) $I \times J$-exp$A$ есть изотонная функция $\Omega_n^2 \to \mathbb{N}$ при любой матрице $A \in M_0(n)$;

б) $I \times J$-exp$A$ есть антиизотонная функция $M_0(n) \to \mathbb{N}$ при любых допустимых I, J;

в) $(A(J^2))^t \leqslant A^t(J^2)$ при любой матрице $A \in M_0(n)$ и любом допустимом J, $t \geqslant 1$, вследствие этого J^2-exp$A \leqslant \exp A(J^2)$.

Доказательство.

а) Следует из того, что если $(I, J) \leqslant (I', J')$ и $A(I' \times J') > 0$, то $A(I \times J) > 0$.

б) Индукция по степени t матрицы. Если $B \leqslant A$, то $B^t \leqslant A^t$ при $t \geqslant 1$. Действительно, при $t = 1$ неравенство выполнено. Пусть оно выполнено при t. Тогда $A^{t+1} = AA^t = (B + C)(B^t + C')$, где $C, C' \in M_0(n)$. Тогда

$$A^{t+1} = B^{t+1} + B',$$

где $B' = CB^t + BC' + CC' \in M_0(n)$. Отсюда $B^{t+1}(I \times J) \leqslant A^{t+1}(I \times J)$ при любых $I, J \subseteq N_n$ и $t \geqslant 0$. Следовательно, $I \times J$-exp$A \leqslant I \times J$-exp$B$.

в) Индукция по степени t матрицы. Пусть $(A(J^2))^t = (c_{i,j}^{(t)})$, $t = 1, 2, \ldots$ При $t = 1$ неравенство выполнено. Пусть оно выполнено для t, где $t \geqslant 1$. Докажем неравенство для $t + 1$. По правилу умножения матриц для любых $i, j \in N_n$

$$a_{i,j}^{(t+1)} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^{(t)} a_{k,j}, \quad c_{i,j}^{(t+1)} = \sum_{k \in J} c_{i,k}^{(t)} c_{k,j}.$$

По предположению $c_{i,k}^{(s)} \leqslant a_{i,k}^{(s)}$ для любого $s \leqslant t$ и для любых $i, j \in J$. Тогда для $i, j \in J$

$$c_{i,j}^{(t+1)} = \sum_{k \in J} c_{i,k}^{(t)} c_{k,j} \leqslant \sum_{k \in J} a_{i,k}^{(t)} a_{k,j} \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^{(t)} a_{k,j} = a_{i,j}^{(t+1)}.$$

Индукция доказана. ■

Для матрицы A обозначим $M_{A,J} = \{B \in M_0(n) : B(J^2) \geqslant A(J^2)\}$, где $\varnothing \neq J \subseteq N_n$.

Утверждение 3. Если $A(J^2) \leqslant A^2(J^2)$, то $M_{A,J}$ — полугруппа; если при этом $B(J^2) \leqslant AB(J^2)$ ($B(J^2) \leqslant BA(J^2)$), то $M_{B,J}$ — правый (левый) идеал полугруппы $M_{A,J}$.

Доказательство. Пусть $C, D \in M_{A,J}$. Тогда $C(J^2) = A(J^2) + C'(J^2)$, $D(J^2) = A(J^2) + D'(J^2)$, где C', D' — неотрицательные матрицы. Отсюда

$$CD(J^2) = ((A + C')(A + D'))(J^2) = (A^2 + AD' + C'A + C'D')(J^2) \geqslant A^2(J^2) \geqslant A(J^2).$$

Следовательно, $CD \in M_{A,J}$, то есть $M_{A,J}$ — полугруппа.

Пусть $K \in M_{B,J}$, то есть $K(J^2) \geqslant B(J^2)$. Так как $C(J^2) = A(J^2) + C'(J^2)$, где $C' \in M_0(n)$, то получим

$$CK(J^2) = ((A + C')K)(J^2) = (AK + C'K)(J^2) \geqslant AK(J^2) \geqslant AB(J^2) \geqslant B(J^2).$$

Следовательно, $CK \in M_{B,J}$ и $M_{B,J}$ — левый идеал полугруппы $M_{A,J}$. Для правого идеала доказательство аналогичное. ■

Следствие 1. Если $A(J^2)$ — единичная матрица, то $P(J^2)$ — идеал моноида $M_{A,J}$.

2. Локальная субпримитивность матриц и графов

Пусть A — матрица смежности вершин n-вершинного графа Γ. По определению матрица A и граф Γ одновременно примитивны или не примитивны. Для графа Γ обозначим через D_t матрицу достижимости вершин за t шагов, $t = 1, 2, \ldots$:

$$D_t = \sum_{i=1}^{t} A^i.$$

Известно, что $D_n > 0$, если граф Γ сильносвязный. В соответствии с [3, разд. 10.2], наименьшее натуральное число t, при котором $D_t > 0$, называется субэкспонентом матрицы A, обозначается sbxp$A$, при этом матрица A называется субпримитивной.

Критерий субпримитивности таков: матрица A субпримитивная, если и только если сильно связен граф Γ, при этом sbxp$A$ равен диаметру графа Γ. Заметим, что понятие субэкспонента распространено [3, разд. 10.2] на систему матриц таким образом, что понятия субэкспонента системы матриц и диаметра соответствующей системы графов существенно различаются.

Дадим иное обобщение субэкспонента. Матрица A называется $I \times J$-субпримитивной (J^2-субпримитивной при $I = J$, $*J$-субпримитивной при $I = N_n$, $I*$-субпримитивной при $J = N_n$), если для некоторого натурального числа γ матрица $D_\gamma(I \times J)$ (матрица $D_\gamma(J^2)$, матрица $D_\gamma(*J)$, матрица $D_\gamma(I*)$) положительна. Наименьшее такое γ назовём $I \times J$-субэкспонентом (J^2-субэкспонентом при $I = J$, $*J$-субэкспонентом при $I = N_n$, $I*$-субэкспонентом при $J = N_n$) матрицы A и обозначим $I \times J$-sbxp$A$ (J^2-sbxp$A$, $*J$-sbxp$A$, $I*$-sbxp$A$). Заметим, что если $D_\gamma(I \times J) > 0$, то $D_t(I \times J) > 0$ при всех $t \geqslant \gamma$. Множество субпримитивных ($I \times J$-субпримитивных, J^2-субпримитивных, $*J$-субпримитивных, $I*$-субпримитивных) матриц обозначим $\Sigma(n)$ ($\Sigma(I \times J)$, $\Sigma(J^2)$, $\Sigma(*J)$, $\Sigma(I*)$).

Из определений следует, что при любых допустимых множествах I, J

$$P(n) \subseteq \Sigma(n) \cap P(I \times J) \subseteq P(I \times J) \subseteq \Sigma(I \times J).$$

Следовательно, для любой матрицы $A \in M_0(n)$

$$I \times J\text{-sbxp}A \leqslant I \times J\text{-exp}A \leqslant \max\{I \times J\text{-exp}A, \text{sbxp}A\} \leqslant \exp A.$$

Утверждение 4. Если матрицы $A, B \in M_0(n)$ сопряжены в $S(J)$, то они одновременно обладают или не обладают свойством ξ, где ξ — любое из свойств: J^2-примитивность, J^2-субпримитивность, J^2-s-положительность, J^2-c-положительность, J^2-sc-положительность.

Доказательство. Если матрицы A и B сопряжены в $S(J)$, то найдётся перестановочная матрица $T \in S(J)$, такая, что $A = T^{-1}BT$, отсюда $A^t = T^{-1}B^tT$ при любом $t \in \mathbb{N}$. Следовательно, при любом натуральном t матрицы A^t и B^t отличаются лишь перестановкой строк и столбцов с номерами $i \in J$, то есть обладают одинаковыми указанными свойствами. ■

Обозначим: l_{ij} — длина кратчайшего пути от вершины i до вершины j в графе Γ; $d(I, J) = \max\limits_{(i,j) \in I \times J} l_{ij}$ — расстояние между наиболее удалёнными вершинами множеств I и J. При $I = J = N_n$ величина $d(I, J)$ совпадает с диаметром графа Γ.

Теорема 1. Матрица A является $I \times J$-субпримитивной, если и только если в графе Γ существует путь из любой вершины $i \in I$ в любую вершину $j \in J$, при этом $I \times J$-sbxp$A = d(I, J)$.

Доказательство. Согласно [4, с. 143], $a_{i,j}^{(t)} > 0$, если и только если в орграфе Γ имеется путь из i в j длины t. Отсюда матрица $D_t(I \times J) > 0$, если и только если в графе Γ для любых $i \in I$ и $j \in J$ существует путь из i в j длины не более t. Следовательно, $I \times J\text{-sbxp}A = d(I, J)$. ■

3. Локальная примитивность ориентированных графов

Граф Γ называется $I \times J$-примитивным, если матрица A является $I \times J$-примитивной, при этом соответствующие $I \times J$-экспоненты матрицы A и графа Γ равны. Получим условия $I \times J$-примитивности на теоретико-графовом языке.

Обозначим при любых допустимых I, J:

$\bar{J}$ — множество $N_n \setminus J$;

$\gamma_{I\times J}$ — величину $I \times J\text{-exp}\,\Gamma$ для $I \times J$-примитивного графа Γ, где $\gamma_{i\times j} = \gamma_{I\times J}$ при $I = \{i\}$, $J = \{j\}$;

γ_{J2} — величину $J^2\text{-exp}\,\Gamma$ для J^2-примитивного графа Γ;

γ_{*J} — величину $*J\text{-exp}\,\Gamma$ для $*J$-примитивного графа Γ;

γ_{I*} — величину $I*\text{-exp}\,\Gamma$ для $I*$-примитивного графа Γ;

$\rho(I, J)$ — величину $\min\limits_{(i,j)\in I\times J} l_{ij}$, то есть расстояние в графе Γ от множества I до множества J ($\rho(I, J) = 0$ при $I \cap J \neq \varnothing$, $\rho(i, J) = \rho(I, J)$ при $I = \{i\}$, $\rho(I, j) = \rho(I, J)$ при $J = \{j\}$);

$\theta(I, J)$ — величину $\max\limits_{i\in I} \rho(i, J)$, то есть расстояние достижимости из любой вершины множества I некоторой вершины множества J ($\theta(i, J) = \rho(i, J) = \theta(I, J)$ при $I = \{i\}$);

$\tau(I, J)$ — величину $\max\limits_{j\in J} \rho(I, j)$, то есть расстояние достижимости из некоторой вершины множества I любой вершины множества J ($\tau(I, j) = \rho(I, j) = \tau(I, J)$ при $J = \{j\}$).

Обозначим также в графе Γ:

$L(i, j)$ — множество длин всех простых путей из i в j;

$L(\Gamma)$ — множество длин всех простых циклов;

U — множество вершин графа $\tilde{U}$, где $\tilde{U}$ — часть графа Γ (цикл, подграф, ...).

Пусть $Y \subseteq N_n$. Путь в Γ из i в j, проходящий через некоторые вершины непустого множества Y, назовем Y-путём из i в j. Сильносвязный подграф $\tilde{U}$ орграфа Γ назовём i, j-связывающим, если в Γ существует U-путь из i в j. В частности, сильносвязный орграф есть i, j-связывающий орграф при любых i, j.

Пусть $L(\Gamma) = \{l_1, \ldots, l_m\}$, где $l_1 < \ldots < l_m$. Заметим, что $(l_1, \ldots, l_m) = 1$, если и только если орграф Γ примитивный [5, с. 226].

Утверждение 5. Если орграф Γ является $I \times J$-примитивным, то орграф Γ имеет i, j-связывающий подграф для любой пары $(i, j) \in I \times J$.

Доказательство. Если орграф Γ является $I \times J$-примитивным, то матрица A является $I \times J$-примитивной, тогда $A^t(I \times J) > 0$ при любом $t \geqslant \gamma$, где $\gamma \in \mathbb{N}$. Отсюда в Γ имеется путь w длины t из i в j для любой пары $(i, j) \in I \times J$ и любого $t \geqslant \gamma$. Число вершин в подграфе не более n, значит, при $t > n$ путь w содержит цикл $\tilde{C}$. Следовательно, подграф $\Gamma(C)$ с множеством вершин C является сильносвязным и i, j-связывающим подграфом. ■

Утверждение 6. Связный циклический орграф Γ является $I \times J$-примитивным, если и только если Γ является $i \times j$-примитивным для любой пары вершин $(i,j) \in I \times J$, при этом $\gamma_{I\times J} = \max\limits_{(i,j)\in I\times J} \gamma_{i\times j}$.

В силу утверждений 5 и 6 достаточно получить условия $i \times j$-примитивности для связного циклического орграфа Γ.

Для множества взаимно простых натуральных чисел $\{a_1,\ldots,a_m\}$ обозначим $g(a_1,\ldots,a_m)$ число Фробениуса, то есть наибольшее натуральное число, не принадлежащее аддитивной полугруппе, порождённой множеством $\{a_1,\ldots,a_m\}$.

Сильносвязный орграф Γ с n вершинами называется r-дольным с блоками V_0, V_1, …, V_{r-1}, где $r > 1$, если $V_0, V_1, \ldots, V_{r-1}$ — блоки разбиения множества вершин орграфа Γ, такие, что если (i,j) — дуга и $i \in V_t$, то $j \in V_{(t+1) \bmod r}$, $t = 0,1,\ldots,r-1$.

Множество всех путей орграфа Γ образует частичный моноид [6] относительно операции конкатенации, обозначаемой точкой. Данная операция определена на паре путей (u,v), если и только если конечная вершина пути u совпадает с начальной вершиной пути v. Если u — путь с начальной вершиной i и конечной вершиной a, v — путь с начальной вершиной a и конечной вершиной j, то $w = u \cdot v$ есть путь с начальной вершиной i и конечной вершиной j. При этом $\operatorname{len} w = \operatorname{len} u + \operatorname{len} v$, где $\operatorname{len} w$ — длина пути w, то есть число дуг в нём.

Обозначим в графе Γ: $[i,j]$ — путь из i в j; $\langle i,j\rangle$ — кратчайший путь из i в j. Часть цикла $\tilde{C}$ в орграфе Γ, являющаяся путём из i в j, где $i,j \in C$, обозначим $[i,j]_C$. При обходе цикла $\tilde{C}$ выделим его вершину a как начальную, цикл $\tilde{C}$ в этом случае обозначим $\tilde{C}(a)$. Для целого неотрицательного e через $e\tilde{C}(a)$ обозначим цикл, составленный из e-кратно пройденного цикла $\tilde{C}(a)$, где $0\tilde{C}(a)$ — пустой путь.

Лемма 1. Пусть Γ — сильносвязный n-вершинный орграф, $L(\Gamma) = \{l_1,\ldots,l_m\}$ и $(l_1,\ldots,l_m) = d > 1$. Тогда Γ является d-дольным орграфом с блоками $V_0,V_1,\ldots,V_{d-1}$, и при $s = 0,\ldots,d-1$ для любых вершин $i,j \in V_s$ существует путь $[i,j]$ длины t, где t — любое число, кратное d, и $t \geqslant f_n(l_1,\ldots,l_m)$, где

$$f_n(l_1,\ldots,l_m) = dg\left(\frac{l_1}{d},\ldots,\frac{l_m}{d}\right) + d + n(m+1) - 1 - \sum_{k=1}^{m} l_k. \tag{3}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, положим, что $i,j \in V_0$. Заметим, что путь $[i,j]$ существует, так как орграф Γ сильносвязный. Пусть цикл $\tilde{C}_k$ имеет длину l_k, $k = 1,\ldots,m$. Путь $[i,j]$ представим в виде

$$[i,j] = [i,a_1]\cdot(e_1\tilde{C}_1(a_1))\cdot[a_1,a_2]\cdot(e_2\tilde{C}_2(a_2))\cdot\ldots\cdot[a_{m-1},a_m]\cdot(e_m\tilde{C}_m(a_m))\cdot\langle a_m,j\rangle,$$

где $e_1,\ldots,e_m$ — целые неотрицательные числа; a_1 — вершина цикла $\tilde{C}_1$, ближайшая к вершине i; a_k — вершина цикла $\tilde{C}_k$, ближайшая к вершине a_{k-1}, $k = 2,\ldots,m$. Тогда

$$\operatorname{len}[i,j] = e_1l_1 + \ldots + e_ml_m + \operatorname{len}[i,a_1] + \sum_{k=2}^{m} \operatorname{len}[a_{k-1},a_k] + \operatorname{len}\langle a_m,j\rangle. \tag{4}$$

По условию $(l_1,\ldots,l_m) = d > 1$. Тогда, в соответствии с [5, с. 390], орграф Γ является d-дольным; пусть $V_0,V_1,\ldots,V_{d-1}$ — его блоки. Так как $i,j \in V_0$, то $\operatorname{len}[i,j]$ кратна d.

Вместе с тем $(l_1/d,\ldots,l_m/d) = 1$. Тогда любое натуральное число, большее $g(l_1/d,\ldots,l_m/d)$, может быть представлено линейной комбинацией чисел $l_1/d,\ldots,l_m/d$. Отсюда любое натуральное число, кратное d и большее $dg(l_1/d,\ldots,l_m/d)$, может быть представлено линейной комбинацией чисел $l_1, \ldots, l_m$. Значит, подбирая коэффициенты $e_1, \ldots, e_m$, можно получить сумму $e_1 l_1 + \ldots + e_m l_m$, равную любому числу t, которое кратно d и превышает $dg(l_1/d, \ldots, l_m/d)$. Так как $\operatorname{len}\langle a_m, j\rangle \leqslant n-1$ и расстояние от любой вершины до цикла $\tilde{C}_k$ не превышает $n - l_k$, $k = 1, \ldots, m$, из (4) следует, что, подбирая коэффициенты $e_1, \ldots, e_m$, можно получить $\operatorname{len}[i,j]$, равную любому числу t, которое кратно d и не меньше $f_n(l_1, \ldots, l_m)$. ■

При натуральном d множество натуральных чисел M назовём d-полным, если M содержит полную систему вычетов по модулю d. Наименьшим d-трансверсалом d-полного множества M назовём подмножество (обозначаемое $M(d)$), состоящее из наименьших чисел множества M, образующих полную систему вычетов по модулю d.

Пусть $R = \{r_1, r_2, \ldots\}$ и $R' = \{r'_1, r'_2, \ldots\}$ — множества натуральных чисел. Под суммой множеств (обозначается $R + R'$) понимаем множество натуральных чисел

$$R + R' = \{r_i + r'_j : i, j = 1, 2, \ldots\}.$$

Теорема 2. Связный циклический орграф Γ является $i \times j$-примитивным, если в графе Γ выполнено хотя бы одно из условий:

а) имеются примитивные i,j-связывающие подграфы $\tilde{U}_1, \ldots, \tilde{U}_k$, $k \geqslant 1$; тогда

$$\gamma_{i\times j} \leqslant \min_{1\leqslant r\leqslant k}\{\rho(i, U_r) + \exp\tilde{U}_r + \rho(U_r, j)\};$$

б) имеется i,j-связывающий подграф $\tilde{V}$, $L(\tilde{V}) = \{l_1, \ldots, l_m\}$, $(l_1, \ldots, l_m) = d > 1$, и для некоторых вершин μ, ν графа $\tilde{V}$ множество $M_{(i,\mu)+(\nu,j)}$ является d-полным, где $M_{(i,\mu)+(\nu,j)} = L(i,\mu) + L(\nu, j)$; тогда

$$\gamma_{i\times j} \leqslant dg\left(\frac{l_1}{d}, \ldots, \frac{l_m}{d}\right) + 2d + n(m+1) + q_{i,j} - 2 - \sum_{k=1}^{m} l_k,$$

где $q_{i,j}$ — наибольшее число d-трансверсала $M_{(i,\mu)+(\nu,j)}(d)$.

Доказательство.

а) Если $\tilde{U}$ — примитивный подграф графа Γ, то для любого $t \geqslant \exp\tilde{U}$ существует путь в $\tilde{U}$ длины t из любой вершины в любую. По условию множество U достижимо из вершины i не более чем за $\rho(i,U)$ шагов, и из множества U достижима вершина j не более чем за $\rho(U,j)$ шагов. Тогда в Γ существует путь длины t из i в j при любом $t \geqslant \exp\tilde{U} + \rho(i,U) + \rho(U,j)$. Значит, граф Γ является $i \times j$-примитивным и неравенство для локального экспонента $\gamma_{i\times j}$ выполнено.

б) По условию орграф $\tilde{V}$ является d-дольным. Пусть $V_0, V_1, \ldots, V_{d-1}$ — его блоки, $\mu \in V_s$, $\nu \in V_h$, где $s, h \in \{0, \ldots, d-1\}$. Рассмотрим систему путей $[i,j]_p$, $p = 0, \ldots, d-1$:

$$[i,j]_p = [i,\mu]_p \cdot [\mu,\mu'] \cdot [\mu',\nu] \cdot [\nu,j]_p,$$

где μ' — ближайшая к вершине ν вершина из блока V_s; пути $[i,\mu]_p$ и $[\nu,j]_p$ являются простыми и $\operatorname{len}[i,\mu]_p + \operatorname{len}[\nu,j]_p \equiv p \pmod d$ — по условию для любого $p = 0, \ldots, d-1$ в Γ такая пара путей имеется. Тогда при $p = 0, \ldots, d-1$

$$\operatorname{len}[i,j]_p = \operatorname{len}[\mu',\nu] + (\operatorname{len}[i,\mu]_p + \operatorname{len}[\nu,j]_p) + \operatorname{len}[\mu,\mu']. \tag{5}$$

По определению вершины μ' имеем: $\operatorname{len}[\mu',\nu] \leqslant d-1$. Так как наибольшее число d-трансверсала множества $L(i,\mu) + L(\nu,j)$ равно $q_{i,j}$, то $\operatorname{len}[i,\mu]_p + \operatorname{len}[\nu,j]_p \leqslant q_{i,j}$ при любом p. По лемме 1 можно построить путь $[\mu, \mu']$, длина которого равна любому числу t, кратному d и не меньшему $f_n(l_1, \ldots, l_m)$. Так как множество $M_{(i,\mu)+(\nu,j)}$ является d-полным, то, в соответствии с (5), можно при любом $p = 0, \ldots, d-1$ построить путь $[i, j]_p$, длина которого равна любому числу t, сравнимому с p по модулю d и не меньшему $f_n(l_1, \ldots, l_m) + d + q_{i,j} - 1$. Следовательно, граф Γ является $i \times j$-примитивным и оценка для $\gamma_{i\times j}$ верна. ■

Следствие 2. При выполнении условия *б* теоремы 2 верна оценка

$$\gamma_{i\times j} \leqslant \frac{l_1 l_m}{d} - l_1 - l_m + 2d + n(m+3) - 4 - \sum_{k=1}^{m} l_k.$$

Доказательство. Следует из оценки числа Фробениуса [7, теорема 3.1.1]

$$g(a_1, \ldots, a_m) \leqslant a_1 a_m - a_1 - a_m,$$

а также оценки $q_{i,j} \leqslant 2n - 2$. ■

Замечание 2. Для снижения оценки величины $\gamma_{i\times j}$, полученной в п. *б* теоремы 2, можно использовать эквивалентное подмножество $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ множества $\{l_1, \ldots, l_m\}$, такое, что $r \leqslant m$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) = (l_1, \ldots, l_m) = d$ и $g(\lambda_1/d, \ldots, \lambda_r/d) = g(l_1/d, \ldots, l_m/d)$. Построение эквивалентных подмножеств $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ исследовалось в [6].

Замечание 3. Условие *б* теоремы 2 может быть расширено не только за счёт рассмотрения в орграфе Γ нескольких i, j-связывающих не примитивных подграфов, но и за счёт d-полноты объединения по данным подграфам множеств вида $M_{(i,\mu)+(\nu,j)}$.

Теорема 3. Граф Γ является J^2-примитивным, если и только если в Γ имеется примитивная компонента сильной связности $\tilde{U}$, содержащая множество вершин J; при этом

$$\gamma_{J2} \leqslant \exp \tilde{U} \leqslant \gamma_{J2} + \theta(U \setminus J, J) + \tau(J, U \setminus J).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть граф Γ является J^2-примитивным. Тогда существует путь длины t из μ в ν для любых $\mu, \nu \in J$ и любого $t \geqslant \gamma_{J2}$. Значит, $J \subseteq U$, где $\tilde{U}$ — компонента сильной связности графа Γ. Тогда при любом $t \geqslant \gamma_{J2}$ существует путь длины $\lambda = t + \theta(U \setminus J, J) + \tau(J, U \setminus J)$ из i в j для любых $i, j \in U$. Следовательно, граф $\tilde{U}$ примитивный с экспонентом, не превышающим $\gamma_{J2} + \theta(U \setminus J, J) + \tau(J, U \setminus J)$.

Нижняя оценка $\exp \tilde{U}$ следует из п. *а* утверждения 2.

Достаточность. Если $\tilde{U}$ — примитивная компонента сильной связности в графе Γ, где $J \subseteq U$ и A_U — матрица смежности вершин графа $\tilde{U}$, то существует натуральное число γ, такое, что $A_U^t > 0$ при любом $t \geqslant \gamma$. Значит, $A_U^t(J^2) > 0$ при любом $t \geqslant \gamma$, то есть матрица A_U является J^2-примитивной. Следовательно, граф Γ является J^2-примитивным. ■

Следствие 3. J^2-примитивный граф Γ примитивен, если и только если Γ сильносвязный, при этом

$$\gamma_{J2} \leqslant \exp \Gamma \leqslant \gamma_{J2} + \theta(\bar{J}, J) + \tau(J, \bar{J}).$$

Следствие 4. Граф Γ является $*J$-примитивным ($I*$-примитивным), если и только если Γ является J^2-примитивным (I^2-примитивным) и из каждой вершины $i \notin U$ достижимо множество вершин U (из множества вершин U достижима каждая вершина $i \notin U$), при этом

$$\gamma_{J2} \leqslant \gamma_{*J} \leqslant \gamma_{J2} + \theta(\bar{J}, J) \qquad (\gamma_{I2} \leqslant \gamma_{I*} \leqslant \gamma_{I2} + \tau(I, \bar{I})).$$

Доказательство. Докажем следствие для $*J$-примитивности графа; для $I*$-примитивности доказательство аналогично.

Необходимость. Если граф Γ является J-примитивным, то по определению он является и J^2-примитивным. Вместе с тем множество вершин J достижимо из любой вершины графа. Так как $\tilde{U}$ — компонента сильной связности и $J \subseteq U$, то из любой вершины графа достижимо множество вершин U.

Достаточность. Если граф Γ является J^2-примитивным, то $A^t(J^2) > 0$ при любом $t \geqslant \gamma_{J2}$. Вместе с тем множество вершин U достижимо из любой вершины $i \notin U$; тогда множество вершин J достижимо из любой вершины $i \notin J$, следовательно, $A^t(*J) > 0$ при всех натуральных $t \geqslant \gamma_{J2} + \theta(\bar{J}, J)$. Значит, граф Γ является J-примитивным и $\gamma_{*J} \leqslant \gamma_{J2} + \theta(\bar{J}, J)$. Нижняя оценка γ_{*J} следует из п. *а* утверждения 2. ∎

Замечание 4. Если граф Γ является J^2-примитивным и $\tilde{U}$ — компонента сильной связности графа Γ, такая, что $J \subseteq U$, то Γ является U^2-примитивным.

Если при этом $|U| = m$ и граф Γ примитивен ($*U$-примитивен, $U*$-примитивен), то $\max\{\theta(\bar{U}, U), \tau(U, \bar{U})\} \leqslant n - m$; тогда из следствий 3 и 4 имеем соответственно

$$\exp\Gamma \leqslant \gamma_{U2} + 2(n-m), \quad \gamma_{*U} \leqslant \gamma_{U2} + n - m, \quad \gamma_{U*} \leqslant \gamma_{U2} + n - m.$$

Так как для примитивного подграфа $\tilde{U}$ из п. *в* утверждения 2 следует, что $\gamma_{U2} \leqslant \exp\tilde{U}$, то с помощью известных оценок экспонентов отсюда получаются огрублённые оценки. Например, при использовании оценки Виландта [1, с. 7] для $\exp\tilde{U}$ получаем

$$\exp\Gamma \leqslant m^2 - 4m + 2n + 2, \quad \gamma_{*U} \leqslant m^2 - 3m + n + 2, \quad \gamma_{U*} \leqslant m^2 - 3m + n + 2.$$

4. Локальная квазипримитивность неотрицательных матриц и графов

Матрица A называется $I \times J$-квазипримитивной (J^2-квазипримитивной при $I = J$, $*J$-квазипримитивной при $I = N_n$, $I*$-квазипримитивной при $J = N_n$), если при некотором натуральном числе δ подматрица $A^t(I \times J)$ ($A^t(J^2)$, $A^t(*J)$, $A^t(I*)$) s-положительна для любого $t \geqslant \delta$. Наименьшее такое δ назовём $I \times J$-квазиэкспонентом матрицы A (J^2-квазиэкспонентом при $I = J$, $*J$-квазиэкспонентом при $I = N_n$, $I*$-квазиэкспонентом при $J = N_n$) и обозначим $I \times J$-qexp A (J^2-qexp A, $*J$-qexp A, $I*$-qexp A). Множество $I \times J$-квазипримитивных (J^2-квазипримитивных, $*J$-квазипримитивных, $I*$-квазипримитивных) матриц обозначим $\Pi(I \times J)$ ($\Pi(J^2)$, $\Pi(*J)$, $\Pi(I*)$).

$I \times J$-квазипримитивность матрицы при $I = J = N_n$ равносильна s-положительности. Определим: граф Γ является $I \times J$-квазипримитивным, если и только если матрица A является $I \times J$-квазипримитивной; соответствующие $I \times J$-квазиэкспоненты матрицы A и графа Γ равны.

Обозначим при любых допустимых I, J:

$\delta_{I\times J}$ — величину $I \times J$-qexp A для $I \times J$-квазипримитивной матрицы A;

δ_{J2} — величину J^2-qexp A для J^2-квазипримитивной матрицы A;

δ_{*J} — величину $*J$-qexp A для $*J$-квазипримитивной матрицы A;

δ_{I*} — величину $I*$-qexp A для $I*$-квазипримитивной матрицы A.

Замечание 5. При любых допустимых множествах I, J

$$P(I \times J) \subseteq \Sigma(I \times J) \cap \Pi(I \times J),$$

следовательно, для любой матрицы $A \in M_0(n)$

$$\max\{\delta_{I\times J}, I \times J\text{-sbxp}A\} \leqslant \gamma_{I\times J}.$$

Таким образом, наиболее сложным является описание $I \times J$-квазипримитивных матриц (графов), не являющихся $I \times J$-примитивными.

Матрицу A (граф Γ) будем называть локально примитивной (локально субпримитивной, локально квазипримитивной), если она $I \times J$-примитивная ($I \times J$-субпримитивная, $I \times J$-квазипримитивная) при некоторых допустимых I, J, где $I \cap J \neq N_n$. Соответствующие величины экспонентов назовём локальными экспонентами (локальными субэкспонентами, локальными квазиэкспонентами) матрицы A (графа Γ).

Утверждение 7. Для любой матрицы $A \in M_0(n)$:

а) для любого фиксированного множества I локальный квазиэкспонент $I \times J$-qexp A является антиизотонной функцией $\Omega_n \to \mathbb{N}$;

б) для любого фиксированного множества J локальный квазиэкспонент $I \times J$-qexp A является изотонной функцией $\Omega_n \to \mathbb{N}$;

в) при любых фиксированных подмножествах I, J локальный квазиэкспонент $I \times J$-qexp A является антиизотонной функцией $M_0(n) \to \mathbb{N}$.

Доказательство.

а) Если $J \subseteq J'$ и матрица $A(I \times J)$ s-положительна, то матрица $A(I \times J')$ также s-положительна.

б) Если $I \subseteq I'$ и матрица $A(I' \times J)$ s-положительна, то s-положительна и матрица $A(I \times J)$.

в) Если $B \leqslant A$, то $B^t \leqslant A^t$ при любом $t \geqslant 1$; следовательно, $B^t(I \times J) \leqslant A^t(I \times J)$ при любых $I, J \subseteq N_n$ и $t \geqslant 1$. ■

Утверждение 8.

а) Если орграф Γ является $I \times J$-квазипримитивным, то орграф Γ имеет i, j_i-связывающий подграф для любого $i \in I$ и некоторого $j_i \in J$.

б) $Q_s(J^2) \subset \Pi(J^2)$, и $\delta_{J2} = 1$ для любой матрицы $A \in Q_s(J^2)$.

Доказательство.

а) Если орграф Γ является $I \times J$-квазипримитивным, то матрица A является $I \times J$-квазипримитивной; тогда матрица $A^t(I \times J)$ является s-положительной при любом $t \geqslant \gamma$, где $\gamma \in \mathbb{N}$. Отсюда в Γ имеется путь w длины t из i в j_i для любого $i \in I$ и некоторого $j_i \in J$ при любом $t \geqslant \gamma$. Число вершин в подграфе не более n, значит, при $t > n$ путь w содержит цикл $\tilde{C}$. Следовательно, подграф $\Gamma(C)$ с множеством вершин C является сильносвязным и i, j_i-связывающим подграфом.

б) Если $A \in Q_s(J^2)$, то, согласно п. *б* утверждения 1, $A^t \in Q_s(J^2)$ при любом натуральном t. Следовательно, $A \in \Pi(J^2)$ и $\delta_{J2} = 1$. ■

Следствие 5. Если орграф Γ является $I \times J$-квазипримитивным, то множество J достижимо из всех вершин множества I.

Теорема 4.

а) Пусть $\tilde{U}$ — сильносвязный d-дольный подграф орграфа Γ с блоками $U_0, U_1, \ldots, U_{d-1}$, где $L(\tilde{U}) = \{l_1, \ldots, l_m\}$; $d = (l_1, \ldots, l_m) > 1$. Граф Γ является $U \times J$-квазипримитивным, если и только если $J \cap U_s \neq \varnothing$, $s = 0, 1, \ldots, d-1$, в этом случае при $|U| = r$ выполнено

$$U \times J\text{-qexp}\, \Gamma \leqslant f_r(l_1, \ldots, l_m) + d - 1,$$

где величина $f_r(l_1, \ldots, l_m)$ определена равенством (3).

б) Пусть в графе Γ подграф $\tilde{J}$ сильносвязный или состоит из компонент сильной связности, где J есть множество вершин Γ, достижимых из любой вершины множества I. Тогда орграф Γ является $U \times J$-квазипримитивным при $U = I \cup J$ и

$$U \times J\text{-qexp}\,\Gamma = \theta(I, J).$$

Доказательство.

а) Необходимость. Пусть граф Γ является $U \times J$-квазипримитивным, тогда при любом $t \geqslant \delta_{U\times J}$ матрица $A^t(U \times J)$ является s-положительной. Значит, для любого $u \in U$ и любого $t \geqslant \delta_{U\times J}$ в Γ имеется путь длины t из u в одну из вершин J. Вместе с тем, если взять пути длины $t, t+1, \ldots, t+d-1$, то с учётом d-дольности орграфа $\tilde{U}$ получим, что $J \cap U_s \neq \varnothing$, $s = 0, 1, \ldots, d-1$.

Достаточность. Пусть $j_s \in J \cap U_s$, $s = 0, 1, \ldots, d-1$. Не ограничивая общности, рассмотрим блок U_0. В блоке U_0 имеется вершина u_s, из которой вершина j_s достижима за s шагов, $s = 0, \ldots, d-1$. По лемме 1 для любой вершины $u \in U_0$ можно построить путь $[u, u_s]$ длины t, где t — любое число, кратное d и не меньшее $f_r(l_1, \ldots, l_m)$. Тогда имеется путь $[u, j_s]$ длины $t+s$, $s = 1, \ldots, d-1$. Следовательно, для любой вершины $u \in U$ и любого $t \geqslant f_r(l_1, \ldots, l_m) + d - 1$ имеется путь длины t из u в одну из вершин множества J. Это означает, что граф Γ является $U \times J$-квазипримитивным и оценка для $U \times J$-qexp Γ верна.

б) Из любой вершины $i \in I$ существует путь длины $\theta(i, J)$ в некоторую вершину $j_i \in J$. По условию для любой вершины $j \in J$ и любого $r \in \mathbb{N}$ существует путь $[j, v]$ длины r, где $v \in J$. Тогда для любой вершины $i \in U$ в Γ имеется путь $[i, v]$ длины $\theta(i, J) + r$, где $v \in J$ и $r \in \mathbb{N}$ (если $i \in I$, то $[i, v] = [i, j_i] \cdot [j_i, v]$). Следовательно, граф Γ $U \times J$-квазипримитивен и $U \times J$-qexp $\Gamma = \max\limits_{i \in I} \theta(i, J) = \theta(I, J)$. ■

Пример (локально квазипримитивная, но не локально примитивная матрица).

Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in Q_{sc}(I \times J)$, соответствующий граф $\Gamma(A)$ изображён на рис. 1.

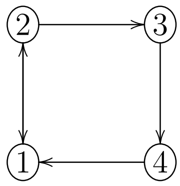

Рис. 1. Граф $\Gamma(A)$

Граф Γ является двудольным с блоками $V_0 = \{1, 3\}$ и $V_1 = \{2, 4\}$. При $J = \{1, 4\}$ оба блока содержат по одной вершине из множества J. Тогда по теореме 4 матрица A является $*J$-квазипримитивной. Вместе с тем по теореме 3 матрица A не является $*J$-примитивной.

Полученные результаты могут быть использованы для изучения перемешивающих свойств композиций криптографических преобразований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Когос К. Г., Фомичев В. М.* Положительные свойства неотрицательных матриц // Прикладная дискретная математика. 2012. № 4(18). С. 5–13.

2. *Кяжин С. Н.* О локальной примитивности графов и неотрицательных матриц // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2013. № 6. С. 81–83.
3. *Фомичев В. М.* Методы дискретной математики в криптологии. М.: Диалог-МИФИ, 2010. 424 с.
4. *Берж К.* Теория графов и её применения. М.: ИЛ, 1962. 320 с.
5. *Сачков В. Н., Тараканов В. Е.* Комбинаторика неотрицательных матриц. М.: ТВП, 2000. 448 с.
6. *Фомичев В. М.* Эквивалентные по Фробениусу примитивные множества чисел // Прикладная дискретная математика. 2014. № 1(23). С. 20–26.
7. *Alfonsin J. R.* The Diophantine Frobenius Problem. Oxford University Press, 2005. 243 p.