ПРИКЛАДНАЯ ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

2014 Прикладная теория графов № 3(25)

DOI 10.17223/20710410/25/9

УДК 519.17

ОБ ОДНОМ КОНТРПРИМЕРЕ ДЛЯ Т-НЕПРИВОДИМЫХ РАСШИРЕНИЙ СВЕРХСТРОЙНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

Д. Ю. Осипов

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

E-mail: st_hill@mail.ru

Т-неприводимым расширением графа G называется его расширение, получаемое из тривиального расширения данного графа удалением максимально возможного набора добавленных при построении тривиального расширения рёбер. Рассматривается один из способов построения оптимального расширения графа — Т-неприводимое расширение (ТНР). Приводится контрпример для схемы из работы Ф. Харари и М. Хурума «One node fault tolerance for caterpillars and starlike trees», которая описывает построение одного ТНР для произвольного сверхстройного дерева. Рассматривается способ построения всех неизоморфных ТНР для подкласса сверхстройных деревьев — равнолучевых звезд.

Ключевые слова: *граф, Т-неприводимое расширение, сверхстройные деревья, равнолучевые звезды.*

Все понятия и определения соответствуют понятиям и определениям в [1].

Определение 1. Расширением n-вершинного графа G называется граф H с $n+1$ вершинами, такой, что граф G вкладывается в каждый максимальный подграф графа H.

Простейшим примером расширения графа G является его тривиальное расширение — соединение графа G с одноэлементным графом (т. е. к графу G добавляется вершина, которая соединяется ребром с каждой вершиной графа G).

Понятие расширения графа тесно связано с вопросами отказоустойчивости дискретных систем. Если граф G рассматривать как функциональную модель некоторого устройства Σ, то расширение H графа G можно воспринимать как схему отказоустойчивой реализации этого устройства: при отказе любого элемента (что истолковывается как удаление из H соответствующей вершины и всех связанных с нею рёбер) в неповреждённой части обнаруживается работоспособная модель для Σ.

При таком подходе естественно возникает вопрос об оптимальности отказоустойчивой реализации для данной системы, т. е. о получении такого расширения H графа G, которое не содержало бы «лишних» ребер. Один из способов — конструкция минимального расширения графа [2], другой — конструкция его Т-неприводимого расширения [3].

Определение 2. Минимальным расширением графа G называется его расширение с минимальным количеством рёбер.

В общем случае при построении минимального расширения возникает необходимость добавлять рёбра в исходный граф, т. е. менять всю систему, моделируемую этим графом. Но иногда технически важно найти решение следующей задачи: построить оптимальное расширение данного графа, сохраняя его первоначальную конструкцию (т. е. не меняя связей внутри него). Существует следующая процедура:

— построить тривиальное расширение исходного графа;

— удалять из полученного графа рёбра до тех пор, пока выполняется свойство расширения.

Полученные графы назовем ТНР графа G. Для произвольного графа количество неизоморфных ТНР неизвестно.

Определение 3. Деревом называется связный граф, в котором нет циклов.

Определение 4 [2]. Дерево называется сверхстройным, если в точности одна его вершина имеет степень больше 2. Эту вершину будем называть корнем сверхстройного дерева.

Сверхстройное дерево можно рассматривать как объединение k цепей с общей концевой вершиной. При этом дерево можно закодировать вектором, состоящим из длин цепей в порядке невозрастания: $(m_1, \ldots, m_k)$, где $m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_k$. Очевидно, что такое кодирование сверстройных деревьев при $k > 2$ является взаимно однозначным.

Определение 5. Вершина v_{ij} сверхстройного дерева T (i — номер цепи сверхстройного дерева (цепи пронумерованы в некотором порядке); j — номер вершины i-й цепи, нумерация начинается с 1 от корня) называется сложной, если среди длин цепей дерева T нет цепи длины $j-1$ или $m_i - j$, где $i = 1, \ldots, k$; $m_i > 1$; $j = 2, \ldots, m_i$.

До сих пор остаётся нерешённой следующая задача: построить все неизоморфные ТНР для произвольного сверхстройного дерева. Однако попытка построить одно из ТНР для произвольного сверхстройного дерева описывается в [4].

В соответствии со схемой из [4] для построения одного из ТНР произвольного сверхстройного дерева необходимо:

— добавить новую вершину к исходному графу;
— соединить ребром добавленную вершину с корнем и со всеми листьями исходного сверхстройного дерева;
— если в исходном сверхстройном дереве нет сложных вершин, то полученный граф и является искомым ТНР. Если есть некоторая сложная вершина v_{ij}, то соединить ребром добавленную вершину и вершину v_{ij-1}. Так поступаем для всякой сложной вершины.

Отметим, что ранее в работе [5] уже приводились контрпримеры для утверждения из [4], что минимальное вершинное 1-расширение сверхстройного дерева с k цепями и p сложными вершинами содержит в точности $k + p + 1$ дополнительных ребер.

Рассмотрим сверхстройное дерево (3, 2, 2) (граф G на рис. 1). У данного сверхстройного дерева только одна сложная вершина — вершина v_{12}. Построим ТНР для данного сверхстройного дерева по описанной схеме (граф G' на рис. 2).

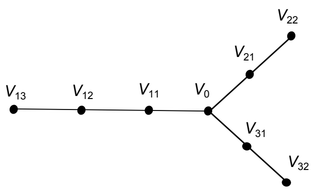

Рис. 1. Граф G

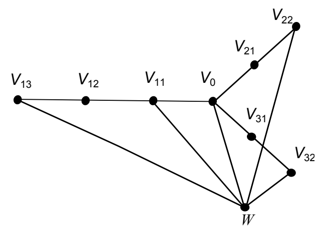

Рис. 2. Граф G'

Нетрудно заметить, что граф G' не является ТНР для сверхстройного дерева G. На самом деле ТНР для графа G является граф H (рис. 3).

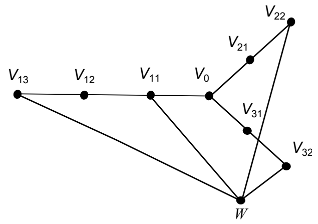

Рис. 3. Граф H

Графы G' и H отличаются на одно ребро. Докажем, что граф H действительно является ТНР для графа G, представленного на рис. 1.

Легко проверяется, что граф H является расширением графа G. Докажем свойство неприводимости графа H, т. е. что при удалении любого ребра из H полученный граф не будет расширением графа G. Очевидно, при удалении ребра wv_6 (или wv_8, или wv_1) полученный граф не будет расширением для графа G, так как достаточно удалить из полученного графа вершину v_5 (или v_7, или v_2 соответственно), чтобы получить вершину v_6 (или v_8, или v_1 соответственно) степени 0, чего не может быть в графе G. При удалении ребра wv_3 достаточно удалить вершину v_4. В этом случае центром графа будет вершина w, а вершина v_8 будет иметь степень 1, но так как вершина v_8 смежна только с w, то мы не сможем получить двухвершинную цепь, а, следовательно, в полученный граф не вкладывается граф G. Таким образом, никакой граф, полученный из H удалением ребра, не является расширением для G, и свойство неприводимости графа H доказано. Следовательно, граф H является ТНР для графа G.

Граф G — сверхстройное дерево с наименьшим числом вершин, которое является контрпримером для описанной в [4] схемы. Среди сверхстройных деревьев с числом вершин 9 такого контрпримера нет. Среди сверхстройных деревьев с числом вершин 10 существует одно такое дерево: (5, 2, 2). Среди сверхстройных деревьев с числом вершин 11 существуют два таких дерева: (4, 3, 3) и (6, 2, 2). Можно предположить, что с ростом числа вершин количество таких контрпримеров будет возрастать, и такие графы можно выделить в некий подкласс сверхстройных деревьев.

Поскольку задача построения одного из ТНР для произвольного сверхстройного дерева не решена, можно решить эту задачу для некоторого подкласса сверхстройных деревьев. Таким подклассом, например, являются равнолучевые звезды [6].

Определение 6. Граф называется равнолучевой звездой с m лучами, каждый из которых состоит из n вершин, если $V = \{v_0, v_1^1, \ldots, v_n^1, \ldots, v_1^m, \ldots, v_n^m\}$, а $\alpha = \{v_i^j v_{i+1}^j : i = 1, \ldots, n-1; j = 1, \ldots, m\} \cup \{v_0 v_1^j : j = 1, \ldots, m\}$, где v_0 — центр равнолучевой звезды.

Теорема 1. Пусть граф S_n^m — равнолучевая звезда с m лучами, каждый из которых состоит из n вершин ($n \geqslant 2$). Тогда единственным ТНР для графа S_n^m является граф, полученный из тривиального расширения графа S_n^m удалением рёбер wv_{n-1}^j, $j = 1, \ldots, m$, где w — вершина, добавленная при построении тривиального расширения графа S_n^m.

Доказательство. Пусть граф $G = (V, \alpha)$ — равнолучевая звезда с m лучами, каждый из которых состоит из n вершин. Положим $H' = (G)$, $H' = (V', \alpha')$, где $V' = V \cup \{w\}$. Стоит отметить, что граф G можно рассматривать как объединение m цепей одинаковой длины n, имеющих одну общую начальную вершину v_0, т. е. эти цепи можно записать следующим образом: $v_0 v_1^j \ldots v_n^j$, $j = 1, \ldots, m$.

1. Будем удалять ребра из графа H'. Рассмотрим следующие случаи:

а) $H' - v_0w$.

Удалим вершину v_1^1 из полученного графа. Очевидно, что центром полученного графа будет w, так как v_0 имеет степень только $m-1$. Тогда из вершин $v_0, w, v_2^1, \ldots, v_n^1$ мы должны получить цепь из $n+1$ вершин с началом в вершине w, но так как вершина v_0 не смежна ни с w, ни с вершинами $v_2^1, \ldots, v_n^1$, то цепь из $n+1$ вершин получить невозможно. Граф G не вкладывается в полученный граф, а, следовательно, граф $H' - v_0w$ не является расширением графа G.

б) $H' - v_n^1w$.

Удалим вершину v_{n-1}^1 из полученного графа. Тогда вершина v_n^1 имеет степень 0. Следовательно, граф G не вкладывается в полученный граф и $H' - v_n^1w$ не является расширением для G. Аналогично доказывается, что графы $H' - v_n^jw$, $j = 2, \ldots, m$, также не являются расширениями для G.

в) $H' - v_i^1w$, $i = 1, \ldots, n-2$.

Удалим вершину v_{i+1}^1 из полученного графа. Так как v_i^1 будет иметь степень 1, то v_i^1 должна быть концом цепи. Началом цепи может быть вершина v_0 или w.

— v_0 — начальная вершина цепи. Тогда цепь максимальной длины имеет вид $v_0wv_1^1 \ldots v_i^1$. В эту цепь может входить максимум n вершин. Очевидно, что граф G не вкладывается в полученный граф.

— w — начальная вершина цепи. Тогда цепь максимальной длины имеет вид $wv_0v_1^1 \ldots v_i^1$. Очевидно, что граф G не вкладывается в полученный граф.

Таким образом, графы $H' - v_i^1w$, $i = 1, \ldots, n-2$, не являются расширениями для G. Аналогично доказывается, что графы $H' - v_i^jw$, $i = 1, \ldots, n-2$, $j = 2, \ldots, m$, также не являются расширениями для G.

2. Удалим из графа H' рёбра wv_{n-1}^j, $j = 1, \ldots, m$. Полученный граф назовём H. Покажем, что H является расширением для G.

а) $H - w$. Очевидно, что граф G вкладывается в граф $H - w$.

б) $H - v_0$. В этом случае центром графа станет вершина w и цепи можно записать следующим образом: $wv_n^j \ldots v_1^j$, $j = 1, \ldots, m$.

в) $H - v_i^j$, $i = 1, \ldots, n-1$, $j = 1, \ldots, m$. В этом случае «повреждённая» цепь имеет вид $v_0v_1^j \ldots v_{i-1}^jwv_{i+1}^j \ldots v_n^j$, $j = 1, \ldots, m$ (т. е. удалённую вершину v_i^j заменяет вершина w).

г) $H - v_n^j$, $j = 1, \ldots, m$. В этом случае «повреждённая» цепь имеет вид $v_0wv_1^j \ldots v_{n-1}^j$, $j = 1, \ldots, m$.

Таким образом, граф H является расширением графа G.

3. Докажем, что граф H является ТНР для G. Для этого докажем свойство неприводимости. Поскольку в п. 1 доказательства показано, что из тривиального расширения графа G невозможно удалить никакое ребро так, чтобы свойство расширения сохранялось (кроме рёбер wv_{n-1}^j, $j = 1, \ldots, m$), а граф H получен из тривиального расширения удалением рёбер wv_{n-1}^j, $j = 1, \ldots, m$, то и из графа H невозможно удалить никакое ребро так, чтобы свойство расширения сохранялось. Свойство неприводимости доказано.

4. Так как из тривиального расширения невозможно удалить никакие рёбра, кроме wv_{n-1}^j, $j = 1, \ldots, m$, так, чтобы свойство расширения сохранялось, то граф H — единственное ТНР для G. ∎

ЛИТЕРАТУРА

1. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 2009.
2. *Абросимов М. Б.* Минимальные расширения объединения некоторых графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. 2001. №4. С. 3–11.
3. *Салий В. Н.* Доказательства с нулевым разглашением в задачах о расширениях графов // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2003. №6. С. 63–65.
4. *Harary F. and Khurum M.* One node fault tolerance for caterpillars and starlike trees // Internet J. Comput. Math. 1995. V. 6. P. 135–143.
5. *Абросимов М. Б., Комаров Д. Д.* Об одном контрпримере для минимальных вершинных 1-расширений сверхстройных деревьев // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2012. №5. С. 83–84.
6. *Осипов Д. Ю.* О Т-неприводимых расширениях сверхстройных деревьев // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2013. №6. С. 85–86.