ПРИКЛАДНАЯ ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

2014 Вычислительные методы в дискретной математике № 3(25)

DOI 10.17223/20710410/25/11

УДК 510.25+510.52+519.688

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННОЙ W-ФУНКЦИИ ЛАМБЕРТА W_0 В ПРЕДЕЛАХ FP//LINSPACE

М. А. Старицын, С. В. Яхонтов

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Россия

E-mail: m.staritzyn2012@yandex.ru, SergeyV.Yakhontov@gmail.com

Строится FP//LINSPACE алгоритмический аналог вещественной W-функции Ламберта $W_0(x)$ на отрезке $[-(re)^{-1},(re)^{-1}]$ FP//LINSPACE алгоритмических вещественных чисел, где r — рациональное, $r > 4/3$ (в качестве r можно брать любое рациональное с таким условием). Для построения алгоритмического аналога вещественной W-функции Ламберта $W_0(x)$ предлагается алгоритм WLE расчёта двоично-рациональных приближений данной функции на отрезке $[-(re)^{-1},(re)^{-1}]$ с полиномиальной временной и линейной емкостной сложностью на машине Тьюринга. Алгоритм WLE строится на основе разложения в ряд Тейлора данной функции, при этом показывается и используется в алгоритме линейная сходимость ряда Тейлора W-функции Ламберта $W_0(x)$ на отрезке $[-(re)^{-1},(re)^{-1}]$.

Ключевые слова: *вещественная W-функция Ламберта W_0, алгоритмические вещественные функции, машина Тьюринга, полиномиальная временная сложность, линейная емкостная сложность.*

Введение

В работе предлагается алгоритм расчёта вещественной W-функции Ламберта W_0 [1] на отрезке $[-(re)^{-1},(re)^{-1}]$, где r — рациональное, $r > 4/3$ (говоря более точно, основной ветви W_0 вещественной W-функции Ламберта W) с полиномиальной временной и линейной емкостной сложностью на машине Тьюринга. Алгоритм строится на основе разложения в ряд Тейлора данной функции с использованием алгоритма вычисления линейно сходящихся степенных рядов в пределах FP//LINSPACE из [2] в качестве базового алгоритма.

При построении алгоритмического аналога вещественной W-функции Ламберта W_0 берётся модель алгоритмических чисел и функций, изложенная в [3]. Посредством FP//LINSPACE будем обозначать класс алгоритмов, полиномиальных по времени и линейных по памяти при вычислении на машине Тьюринга [4].

W-функция Ламберта W является трансцендентной функцией и относится к классу специальных функций (т. е. как специальная функция W-функция Ламберта W не выражается через элементарные функции). W-функция Ламберта W интересна как с практической точки зрения, так как используется, например, в математических задачах физики, так и с теоретической точки зрения, например при рассмотрении вычислительной сложности констант и функций математического анализа в теоретической информатике.

Имеется достаточно большое количество алгоритмов расчёта констант и функций математического анализа: алгоритмы на основе AGM [5], метод Карацубы быстрого вычисления экспоненциальной функции [6], метод `binary splitting` [7] как вариант метода Карацубы, алгоритм `bit-burst` расчёта голономных функций (D-finite на англ.) [8], метод Ньютона вычисления обратных функций и др. Но на данный момент не известно никаких результатов относительно использования этих методов вычисления констант и функций математического анализа для вычисления вещественной W-функции Ламберта W_0 на отрезке $[-(re)^{-1}, (re)^{-1}]$ с линейной памятью на машине Тьюринга. Кроме того, некоторые из перечисленных методов не могут быть применены для расчёта W-функции Ламберта W_0; например, алгоритм `bit-burst` расчёта голономных функций [8] неприменим к расчету W-функции Ламберта W_0, так как данная функция не принадлежит к классу голономных функций. Поэтому результат, изложенный в данной работе, является новым в области вычислительной сложности алгоритмических чисел и функций.

Частично результат работы представлялся на конференции СПИСОК-14 [9].

1. Алгоритмические вещественные числа и функции

В данной работе основу представления конструктивных объектов (чисел и функций) составляет понятие алгоритмической последовательности φ, сходящейся по Коши [3], при этом в качестве вычислительной модели берётся машина Тьюринга. Такая последовательность определяется на множестве всех натуральных чисел $\mathbb{N}$, включая 0, а областью аппроксимирующих значений является всюду плотное в $\mathbb{R}$ естественное подмножество множества рациональных чисел. Для последовательности, сходящейся по Коши и задающей вещественное число x, требуют, чтобы выполнялось

$$|\varphi(n) - x| \leqslant 2^{-n}$$

для любого натурального n.

В качестве множества аппроксимирующих значений берётся множество двоично-рациональных чисел $\mathbb{D}$ [3]. Рациональное число d называется двоично-рациональным, если $d = m/2^n$ для некоторого целого m и натурального n. Двоично-рациональные числа имеют конечное двоичное представление: строка s, равная

$$\pm u_p u_{p-1} \dots u_0.v_1 v_2 \dots v_r,$$

обозначает число

$$d = \pm \left(\sum_{i=0}^{p} u_i 2^i + \sum_{j=1}^{r} v_j 2^{-j} \right).$$

Длина представления двоично-рационального числа определяется как количество символов в строке s, равное, с учётом знака и двоичной точки, $p+r+3$, и обозначается $l(s)$. Под точностью представления $\mathrm{prec}(s)$ понимается число битов справа от двоичной точки, то есть r. С точки зрения изучения вычислительной сложности двоично-рациональные числа удобны тем, что для любого n двоично-рациональные числа с точностью n равномерно распределены на вещественной прямой [3].

Последовательность $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{D}$ двоично-рационально сходится к вещественному числу x, если для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $\mathrm{prec}(\varphi(n)) = n + 1$ и

$$|\varphi(n) - x| \leqslant 2^{-n}.$$

Множество всех функций, двоично-рационально сходящихся к вещественному числу x, обозначается CF_x.

Вещественное число x называется CF-алгоритмическим [3], если CF_x содержит вычислимую функцию φ.

Вещественная функция f, заданная на отрезке $[a, b]$, называется алгоритмической функцией [3] на этом отрезке, если существует машина Тьюринга M с оракульной функцией, такая, что для любого $x \in [a, b]$ и любой вычислимой функции $\varphi \in CF_x$ функция ψ, вычисляемая M с оракульной функцией φ, принадлежит $CF_{f(x)}$.

Фактически это означает, что для любой вычислимой функции $\varphi \in CF_x$ и любого $n \in \mathbb{N}$ машина M последовательно вычисляет $m \in \mathbb{N}$ и $d \in \mathbb{D}$, такие, что

$$|\varphi(m) - x| \leqslant 2^{-m}, \quad |d - f(x)| \leqslant 2^{-n}.$$

Сложность расчёта двоично-рациональных приближений алгоритмических чисел и функций определяется в [3] на основе длины двоичного представления точности вычисления. Память ленты запроса и ленты ответа оракульной функции при оценке емкостной вычислительной сложности алгоритма не учитывается. Обращение к оракульной функции $\varphi \in CF_x$ аргумента x алгоритмической функции осуществляется следующим образом:

- на ленту запроса оракульной функции записывается точность вычисления аргумента 2^{-m} в виде 0^m (унарная запись);
- рассчитывается значение $\varphi(m)$ оракульной функции, и результат записывается на ленту ответа;
- значение $\varphi(m)$ считывается с ленты ответа в промежуточную память.

Определение 1 [2]. Число $x \in \mathbb{R}$ назовём FP//LINSPACE алгоритмическим вещественным числом, если существует функция $\varphi \in CF_x$, вычислимая в пределах FP//LINSPACE.

Определение 2 [2]. Вещественную функцию f, заданную на отрезке $[a, b]$, назовём FP//LINSPACE алгоритмической вещественной функцией на отрезке $[a, b]$, если для любого $x \in [a, b]$ функция ψ (указанная в определении алгоритмической функции) из $CF_{f(x)}$ является FP//LINSPACE вычислимой.

Множества FP//LINSPACE алгоритмических вещественных чисел и функций будем обозначать $\mathrm{FP//LINSPACE}_{CF}$ и $\mathrm{FP//LINSPACE}_{C[a,b]}$ соответственно. Здесь использование индекса $C[a, b]$ обусловлено тем, что алгоритмические функции являются непрерывными на всей области определения [3]. Построение алгоритмического аналога вещественной функции f на отрезке $[a, b]$ означает описание алгоритма, вычисляющего двоично-рациональные приближения с произвольной точностью значений $f(x)$ для $x \in [a, b]$.

2. Вычисление W-функции Ламберта W_0

Вещественная W-функция Ламберта W определяется как решение функционального уравнения

$$x = W(x)e^{W(x)}.$$

Данное решение является функцией, обратной к функции $f(x) = xe^x$. Вещественная W-функция Ламберта W определена на полуинтервале $[-e^{-1}, \infty)$ и имеет две ветви, верхнюю W_0 и нижнюю W_{-1}.

Будем строить алгоритм расчёта верхней ветви W_0, который обозначим через WLE, на основе разложения в ряд Тейлора данной функции с использованием алгоритма вычисления линейно сходящихся степенных рядов в пределах FP//LINSPACE из [2] в качестве базового алгоритма.

Напомним, что степенной ряд $S = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ называется линейно сходящимся степенным рядом, если его частичная сумма $S_{\mu(k)} = \sum\limits_{i=0}^{\mu(k)} a_i$, такая, что $\mu(k)$ — линейная функция от k, отличается от точного значения не более чем на 2^{-k}: $|S - S_{\mu(k)}| \leqslant 2^{-k}$.

Рассмотрим ряд Тейлора функции W_0 [1] в окрестности точки $x = 0$:

$$W_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-k)^{(k-1)}}{k!} x^k, \tag{1}$$

радиусом сходимости данного ряда является величина e^{-1}. Перепишем ряд (1) в виде

$$W_0^{(1)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-k)^{(k-1)}}{e^k \cdot k!} (ex)^k, \tag{2}$$

рассмотрим данный ряд для $x \in [-(re)^{-1}, (re)^{-1}]$ и оценим сверху модуль n-го остатка

$$R_n^{(1)}(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^{(1)} x^k \tag{3}$$

данного ряда. В силу неравенства $k! \geqslant 2^2 \cdot k^{k+1/2} e^{-k}$, следующего из формулы Стирлинга [10], получаем

$$|a_k^{(1)} x^k| < \frac{k^k}{e^k \cdot 2^2 \cdot k^{k+1/2} e^{-k}} \cdot \frac{e^k}{(re)^k} < 2^{-C_1 \cdot k}$$

для $x \in [-(re)^{-1}, (re)^{-1}]$. Здесь C_1 — константа, зависящая от рационального r. Следовательно,

$$R_n^{(1)}(x) < \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-C_1 \cdot k} = C_2 \cdot 2^{-C_1 (n+1)},$$

то есть ряд (2) линейно сходится.

Далее, покажем FP//LINSPACE вычислимость коэффициентов $a_k^{(1)}$ ряда (2) (отметим, что входными данными для алгоритма вычисления коэффициентов $a_k^{(1)}$ является двоичная запись точности вычисления 2^{-m}, что является точностью вычисления аргумента x [2]).

Для этого запишем коэффициенты $a_k^{(1)}$ в виде произведения $a_k^{(1)} = \dfrac{1}{ek} \prod\limits_{j=1}^{k-1} (-1)^{j-1} b_j$, где $b_j = \dfrac{k}{ej}$; обозначим $a_{(p,k)} = \prod\limits_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} b_j$. Будем вычислять величину $a_{(k-1,k)}$ (равную $a_k^{(1)}$) последовательно в цикле для $p \in \{1, \ldots, k-2\}$, на каждом шаге выполняя произведение $a^*_{(p,k)} b^*_{p+1}$ (при этом $a_{(1,k)} = b_1$), где $a^*_{(p,k)}$ — приближённое значение величины $a_{(p,k)}$ с некоторой точностью ε_p; b^*_{p+1} — приближённое значение величины b_{p+1} с той же точностью $\varepsilon_p = 2^{-q} < 2^{-1}$; q — некоторое натуральное. Произведение $\zeta = a^*_{(p,k)} b^*_{p+1}$ будем округлять с точностью ε_p, то есть отбрасывать биты числа ζ после двоичной точки, начиная с q-го бита.

Используя метод математической индукции по $p \in \{1, \ldots, k-2\}$, покажем, что если взять $\varepsilon_1 \leqslant 2^{-C_3 k + (\log_2(k)+2)}$, где C_3 — некоторая константа, то

$$\varepsilon_p \leqslant 2^{-C_3 k + \sum\limits_{j=1}^{p} (\log_2(k) - \log_2(j) + 2)}$$

для любого $p \in \{1, \dots, k-2\}$. База индукции: $p = 1$; в этом случае величина $a^*_{(1,k)}$, равная b^*_1, вычисляется с точностью ε_1. Индукционный переход: пусть для $p \in \{1, \dots, k-3\}$ выполняется $|a^*_{(p,k)} - a_{(p,k)}| \leqslant \varepsilon_p$. Тогда

$$|a^*_{(p+1,k)} - a_{(p+1,k)}| \leqslant |a^*_{(p,k)} b^*_{p+1} - a_{(p,k)} b_{p+1}| + \varepsilon_p =$$
$$= |a^*_{(p,k)} b^*_{p+1} - a^*_{(p,k)} b_{p+1} + a^*_{(p,k)} b_{p+1} - a_{(p,k)} b_{p+1}| + \varepsilon_p \leqslant$$
$$\leqslant |a^*_{(p,k)}(b^*_{p+1} - b_{p+1})| + |b_{p+1}(a^*_{(p,k)} - a_{(p,k)})| + \varepsilon_p < 2\varepsilon_p + \frac{k}{p+1}\varepsilon_p < 2^{\log_2(k) - \log_2(p+1) + 2}\varepsilon_p$$

(здесь используется оценка $a_{(p,k)} < 2^{-1}$), то есть $\varepsilon_{p+1} < 2^{-C_3 k + \sum\limits_{j=1}^{p+1}(\log_2(k) - \log_2(j) + 2)}$.

Теперь оценим сверху величину

$$\nu = \sum_{j=1}^{p} (\log_2(k) - \log_2(j)).$$

В силу неравенства $p! \geqslant 2p^{p+1/2}e^{-p}$, следующего из формулы Стирлинга, получаем

$$\nu = \sum_{j=1}^{p} \left(\log_2\left(\frac{k}{j}\right)\right) = \log_2\left(\prod_{j=1}^{p} \frac{k}{j}\right) = \log_2\left(\frac{k^p}{p!}\right) \leqslant \log_2\left(\frac{k^p}{2p^{p+1/2}e^{-p}}\right) =$$
$$= \log_2\left(\frac{(2k)^p}{2p^{p+1/2}e^{-p}2^p}\right) \leqslant C_4 k,$$

применив тот факт, что функция $f(x) = x(\log_2(2k) - \log_2(x))$ возрастает на отрезке $[1, k]$.

В результате имеем оценку $\varepsilon_{p+1} < 2^{-C_5 k}$. Так как $k \leqslant n$ (где n берётся из формулы (3)), то для вычислений $a_{(p,k)}$ можно взять точности ε_{p+1}, такие, что $\varepsilon_{p+1} < 2^{-C_5 n}$. Это означает FP//LINSPACE вычислимость коэффициентов $a_k^{(1)}$ ряда Тейлора (2) функции $W_0^{(1)}(x)$ (так как m линейно зависит от n для линейно сходящихся степенных рядов, а m такое, что 2^{-m} — точность вычисления аргумента x [2]).

Так как ряд Тейлора (2) линейно сходится на отрезке $[-(re)^{-1}, (re)^{-1}]$, где r — рациональное, $r > 4/3$, то воспользуемся алгоритмом $SeriesSum_1$ из [2] для вычисления данного ряда в пределах FP//LINSPACE. Алгоритм $SeriesSum_1$ позволяет вычислять с полиномиальным временем и линейной памятью на машине Тьюринга линейно сходящиеся степенные ряды вида $S(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ на любом отрезке $\sigma \subseteq [-\varrho, \varrho]$ при условии, что $|a_i| \leqslant 1$, $\varrho \leqslant 3/4 + 2^{-5}$ и величины a_k являются FP//LINSPACE вычислимыми. Так как все условия, при которых алгоритм $SeriesSum_1$ применим, выполняются для ряда Тейлора функции $W_0^{(1)}(x)$ (а значит, и для ряда Тейлора функции W_0), то верна следующая теорема.

Теорема 1. Основная ветвь W_0 вещественной W-функции Ламберта является FP//LINSPACE алгоритмической вещественной функцией на любом отрезке $[-(re)^{-1}, (re)^{-1}]$ FP//LINSPACE алгоритмических вещественных чисел, где r — рациональное, $r > 4/3$.

Заключение

Алгоритм WLE расчета вещественной W-функции Ламберта W_0 можно применять в информатике как основу FP//LINSPACE алгоритмической вещественной W-функции Ламберта W_0, заданной на отрезке $[-(re)^{-1}, (re)^{-1}]$ FP//LINSPACE алгоритмических вещественных чисел, где r — рациональное, $r > 4/3$.

Из дальнейших исследований стоит отметить задачу построения алгоритмов, основанных на разложении в ряды, для FP//LINSPACE алгоритмических аналогов других вещественных функций, не выражающихся через элементарные функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубинов А. Е., Дубинова И. Д., Сайков С. К.* W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики. Саров: Изд-во ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2006. 160 с.
2. *Яхонтов С. В., Косовский Н. К., Косовская Т. М.* Эффективные по времени и памяти алгоритмические приближения чисел и функций. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2012. 256 с.
3. *Ko K.* Complexity Theory of Real Functions. Boston: Birkhauser, 1991. 310 p.
4. *Du D. and Ko K.* Theory of Computational Complexity. N. Y.: John Wiley & Sons, 2000. 491 p.
5. *Brent R. P.* Fast multiple-precision evaluation of elementary functions // J. ACM. 1976. V. 23. No. 2. P. 242–251.
6. *Карацуба Е. А.* Быстрые вычисления трансцендентных функций // Проблемы передачи информации. 1991. Т. 27. Вып. 4. С. 76–99.
7. *Haible B. and Papanikolaou T.* Fast multiprecision evaluation of series of rational numbers // Proc. Third Intern. Symposium on Algorithmic Number Theory, Portland, Orgeon, USA, June 21–25, 1998. P. 338–350.
8. *Mezzarobba M.* A note on the space complexity of fast D-finite function evaluation // Computer Algebra in Scientific Comput. 2012. V. 7442. P. 212–223.
9. *Старицын М. А., Яхонтов С. В.* Эффективное по времени и памяти вычисление W-функции Ламберта // Четвертая Всерос. науч. конф. по проблемам информатики СПИСОК-14. СПб., 2014 (в печати).
10. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Физматлит, 2003. 680 с.