ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ РЕАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

DOI 10.17223/20710410/25/12

УДК 519.8

ПОСТОПТИМАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ЗАДАЧИ С КРИТЕРИЯМИ КРАЙНЕГО ОПТИМИЗМА[1]

В. А. Емеличев, Е. В. Устилко

Белорусский государственный университет, г. Минск, Беларусь

E-mail: emelichev@bsu.by, ustilko@tut.by

Получены нижняя и верхняя оценки радиуса устойчивости многокритериальной инвестиционной булевой задачи с критериями крайнего оптимизма в случае, когда в пространстве состояний финансового рынка и критериальном пространстве экономической эффективности инвестиционных проектов задана произвольная метрика Гельдера, а в пространстве проектов — метрика Чебышева.

Ключевые слова: *многокритериальная инвестиционная задача, критерий крайнего оптимизма, множество Парето, радиус устойчивости задачи, метрика Гельдера, метрика Чебышева.*

Введение

Многие проблемы принятия многоцелевых решений (индивидуальных или групповых) в управлении, планировании и проектировании могут быть сформулированы как многокритериальные (векторные) задачи дискретной оптимизации. Решение таких задач сводится к выбору лучших в том или ином смысле значений переменных из некоторой дискретной совокупности, что определяется экономическим или физическим смыслом изучаемых проблем. Характерной особенностью подобных задач, возникающих на практике, является неточность исходных данных. Эта неточность обусловлена влиянием различных факторов неопределённости и случайности. Порой сколь угодные малые погрешности в исходной информации влекут значительные искажения искомых решений. Такие задачи обычно называются некорректно поставленными, т. е. являются неустойчивыми к малым изменениям исходных данных, их решение может быть лишено смысла [1]. При этом естественно возникает вопрос: в каких пределах можно варьировать (возмущать) исходные данные задачи, чтобы множество оптимальных решений обладало некоторым свойство инвариантности? Этой проблематике и посвящена настоящая работа, где для многокритериальной задачи формирования оптимального портфеля с критериями крайнего оптимизма по доходности получены нижняя и верхняя оценки радиуса устойчивости задачи в случае, когда в пространстве состояний финансового рынка и критериальном пространстве эффективности инвестиционных портфелей задана произвольная метрика Гельдера l_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Отметим, что ранее в [2, 3, 4, 5] аналогичные оценки (снизу и сверху) радиуса устойчивости многокритериальных инвестиционных задач с критериями Вальда и Сэвиджа

[1]Работа частично поддержана грантом Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований № Ф13К-078.

были получены лишь в частных случаях, когда в упомянутом трехмерном пространстве параметров задач задавались линейная l_1 и чебышевская l_∞ метрики в различных комбинациях. Кроме того, в [6] дан обзор результатов, связанных с оценками радиуса устойчивости парето-оптимальных и лексикографических оптимальных портфелей тех же инвестиционных задач с разнообразными метриками, заданными в пространствах их параметров.

1. Постановка задачи и определения

Рассмотрим многокритериальный вариант задачи управления инвестициями. Для этого введём ряд обозначений.

Пусть известны m возможных состояний финансового рынка $(A_1, A_2, \dots, A_m)$, n альтернативных инвестиционных проектов $(B_1, B_2, \dots, B_n)$ и s видов (показателей) экономической эффективности проекта $(C_1, C_2, \dots, C_s)$. Задана ожидаемая оценка экономической эффективности e_{ijk} любого вида C_k всякого инвестиционного проекта B_j в случае, когда рынок находится в состоянии A_i. Через E будем обозначать трехмерную матрицу $[e_{ijk}] \in \mathbb{R}^{m\times n\times s}$, а через $E_k \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — её k-е сечение. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{E}^n$ — инвестиционный портфель, где $\mathbb{E} = \{0, 1\}$; $x_j = 1$, если инвестор выбирает проект B_j, и $x_j = 0$ в противном случае; $X \subseteq \mathbb{E}^n$ — множество всех возможных инвестиционных портфелей, т. е. тех, реализация которых не превосходит начального капитала инвестора. Отметим, что существует несколько подходов при оценке эффективности инвестиционных проектов (см., например, библиографию в [7]).

На множестве портфелей X зададим векторную целевую функцию

$$f(x, E) = (f_1(x, E_1), f_2(x, E_2), \dots, f_s(x, E_s)),$$

компонентами которой являются широко известные в теории принятия решений критерии крайнего оптимизма (MAXMAX):

$$f_k(x, E_k) = \max_{1\leqslant i\leqslant m} e_{ik}x = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^{n} e_{ijk}x_j \to \max, \quad k \in N_s = \{1, 2, \dots, s\},$$

где $e_{ik} = (e_{i1k}, e_{i2k}, \dots, e_{ink})$ — i-я строка сечения E_k. С помощью такого критерия азартный инвестор оптимизирует эффективность $e_{ik}x$ портфеля x в предположении, что рынок находится в самом выгодном для него состоянии, а именно, когда доходность портфеля максимальна. Очевидно, что подобный подход основан на стереотипе поведения безоглядного оптимизма («или пан или пропал», «кто не рискует, тот не выигрывает» и т. п.). Следует отметить, что ситуации, требующие применения такого критерия, в экономической практике не являются редкими, и пользуются им не только крайние оптимисты, но и инвесторы, поставленные в безвыходное положение.

Под многокритериальной инвестиционной булевой задачей $Z^s(E)$, $s \in \mathbb{N}$, будем понимать задачу поиска множества Парето $P^s(E)$, т. е. множества парето-оптимальных инвестиционных портфелей

$$P^s(E) = \{x \in X : X(x, E) = \varnothing\},$$

где $X(x, E) = \{x' \in X : f(x, E) \leqslant f(x', E) \quad \& \quad f(x, E) \neq f(x', E)\}$.

Очевидно, что $P^s(E) \neq \varnothing$ при любой матрице $E \in \mathbb{R}^{m\times n\times s}$.

Для всякого натурального числа d в действительном пространстве $\mathbb{R}^d$ зададим метрику Гельдера l_p, $p \in [1, \infty]$, т. е. под нормой вектора $y = (y_1, y_2, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ будем понимать число

$$\|y\|_p = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{d} |y_i|^p\right)^{1/p}, & \text{если} \quad 1 \leqslant p < \infty, \\ \max\limits_{1\leqslant i\leqslant d} |y_i|, & \text{если} \quad p = \infty. \end{cases}$$

В пространствах $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^s$ зададим произвольную метрику Гельдера l_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, а в пространстве $\mathbb{R}^n$ — метрику Чебышева l_∞, т. е. полагаем

$$\|E\|_{\infty pp} = \|(\|E_1\|_{\infty p}, \|E_2\|_{\infty p}, \ldots, \|E_s\|_{\infty p})\|_p,$$
$$\|E_k\|_{\infty p} = \|(\|e_{1k}\|_\infty, \|e_{2k}\|_\infty, \ldots, \|e_{mk}\|_\infty)\|_p, \quad k \in N_s.$$

Ясно, что

$$\|e_{ik}\|_\infty \leqslant \|E_k\|_{\infty p} \leqslant \|E\|_{\infty pp}, \quad i \in N_m, \quad k \in N_s.$$

Поэтому для любых $x,\ x' \in X$ и $E \in \mathbb{R}^{m\times n\times s}$ очевидны неравенства

$$e_{ik}x - e_{i'k}x' \geqslant -(\|e_{ik}\|_\infty \|x\|_1 + \|e_{i'k}\|_\infty \|x'\|_1) \geqslant -\|E\|_{\infty pp}\|x + x'\|_1, \ \ i, i' \in N_m, \ k \in N_s. \quad (1)$$

Следуя [2, 3, 4, 5], радиусом устойчивости задач $Z^s(E)$, $s \in \mathbb{N}$, назовём число

$$\rho = \rho(m, n, s, p) = \begin{cases} \sup \Xi_p, & \text{если} \quad \Xi_p \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если} \quad \Xi_p = \varnothing, \end{cases}$$

где $\Xi_p = \{\varepsilon > 0 : \forall E' \in \Omega_p(\varepsilon) \ (P^s(E + E') \subseteq P^s(E))\}$; $\Omega_p(\varepsilon) = \{E' \in \mathbb{R}^{m\times n\times s} : \|E'\|_{\infty pp} < \varepsilon\}$ — множество возмущающих матриц; $P^s(E + E')$ — множество Парето возмущённой задачи $Z^s(E + E')$. Таким образом, радиус устойчивости задач $Z^s(E)$ — это предельный уровень возмущений элементов матрицы E в нормированном пространстве $\mathbb{R}^{m\times n\times s}$, которые не приводят к появлению новых парето-оптимальных портфелей. Очевидно, что при $P^s(E) = X$ радиус устойчивости задачи следует считать бесконечным. Задачу, для которой $P^s(E) \neq X$, будем называть нетривиальной.

2. Оценки радиуса устойчивости задачи

Для нетривиальной задачи $Z^s(E)$ положим

$$\varphi = \varphi(m, n, s) = \min_{x\notin P^s(E)} \ \max_{x'\in P(x,E)} \frac{\gamma(x', x)}{\|x' + x\|_1},$$
$$\psi = \psi(m, n, s) = \min_{x\notin P^s(E)} \ \max_{x'\in P(x,E)} \frac{\gamma(x', x)}{\|x' - x\|_1},$$

где $\gamma(x', x) = \min\{f_k(x', E_k) - f_k(x, E_k) : k \in N_s\}$; $P(x, E) = X(x, E) \cap P^s(E)$. Легко видеть, что $\varphi,\ \psi \geqslant 0$.

Теорема 1. При любых $m, n, s \in \mathbb{N}$ и $p \in [1, \infty]$ для радиуса устойчивости $\rho(m, n, s, p)$ многокритериальной нетривиальной инвестиционной задачи $Z^s(E)$ справедливы следующие оценки:

$$\varphi(m, n, s) \leqslant \rho(m, n, s, p) \leqslant (ms)^{1/p}\psi(m, n, s). \quad (2)$$

Здесь и далее считаем, что $1/p = 0$, если $p = \infty$.

Доказательство. Сначала покажем справедливость неравенства $\rho \geqslant \varphi$. При $\varphi = 0$ оно очевидно. Пусть $\varphi > 0$ и возмущающая матрица $E' \in \mathbb{R}^{m\times n\times s}$ с сечениями E'_k, $k \in N_s$, принадлежит множеству $\Omega_p(\varphi)$, т. е. $\|E'\|_{\infty pp} < \varphi$. Согласно определению числа φ, для любого портфеля $x \notin P^s(E)$ существует такой портфель $x^0 \in P(x, E)$, что

$$\gamma(x^0, x) \geqslant \varphi\|x^0 + x\|_1,$$

т. е. выполняются неравенства

$$f_k(x^0, E_k) - f_k(x, E_k) \geqslant \varphi\|x^0 + x\|_1, \quad k \in N_s.$$

Поэтому, учитывая неравенства (1), для всякого индекса $k \in N_s$ получаем

$$\begin{aligned} f_k(x^0, E_k + E'_k) - f_k(x, E_k + E'_k) = \max_{1\leqslant i\leqslant m}(e_{ik} + e'_{ik})x^0 - \max_{1\leqslant i\leqslant m}(e_{ik} + e'_{ik})x = \\ = \min_{1\leqslant i\leqslant m}\max_{1\leqslant i'\leqslant m}(e_{i'k}x^0 - e_{ik}x + e'_{i'k}x^0 - e'_{ik}x) \geqslant \\ \geqslant \min_{1\leqslant i\leqslant m}\max_{1\leqslant i'\leqslant m}(e_{i'k}x^0 - e_{ik}x) - \|E'\|_{\infty pp}\|x^0 + x\|_1 = \\ = f_k(x^0, E_k) - f_k(x, E_k) - \|E'\|_{\infty pp}\|x^0 + x\|_1 \geqslant (\varphi - \|E'\|_{\infty pp})\|x^0 + x\|_1 > 0, \end{aligned}$$

где e'_{ik} — i-я строка сечения E'_k. Таким образом, любой портфель x, не содержащийся в $P^s(E)$, не является парето-оптимальным портфелем возмущённой задачи $Z^s(E+E')$. Поэтому заключаем, что при любой возмущающей матрице $E' \in \Omega_p(\varphi)$ справедливо включение $P^s(E + E') \subseteq P^s(E)$. Следовательно, верно неравенство $\rho \geqslant \varphi$.

Докажем неравенство $\rho \leqslant (ms)^{1/p}\psi$. В соответствии с определением величины ψ найдётся такой портфель $x^0 \notin P^s(E)$, что для любого портфеля $x \in P(x^0, E)$ существует индекс $l \in N_s$, при котором

$$f_l(x, E_l) - f_l(x^0, E_l) \leqslant \psi\|x - x^0\|_1. \tag{3}$$

Полагая $\varepsilon > (ms)^{1/p}\psi$, зададим элементы e^0_{ijk} любого k-го сечения E^0_k, $k \in N_s$, возмущающей матрицы E^0 по правилу

$$e^0_{ijk} = \begin{cases} \delta, & \text{если} \quad i \in N_s,\ x^0_j = 1, \\ -\delta & \text{в остальных сучаях,} \end{cases}$$

где $\varepsilon/(ms)^{1/p} > \delta > \psi$. Тогда получаем

$$\|e^0_{ik}\|_\infty = \delta, \quad \|E^0_k\|_{\infty p} = m^{1/p}\delta, \quad i \in N_m, \quad k \in N_s; \quad \|E^0\|_{\infty pp} = (ms)^{1/p}\delta.$$

Это значит, что $E^0 \in \Omega_p(\varepsilon)$. Кроме того, все строки e^0_{ik}, $i \in N_m$, любого сечения E^0_k, $k \in N_s$, одинаковы и состоят из компонент δ и $-\delta$. Поэтому, положив $A = e^0_{ik}$, $i \in N_m$, $k \in N_s$, имеем

$$A(x - x^0) = -\delta\|x - x^0\|_1. \tag{4}$$

Отсюда, учитывая (3), выводим, что для любого портфеля $x \in P(x^0, E)$ существует индекс $l \in N_s$, удовлетворяющий соотношениям

$$\begin{aligned} f_l(x, E_l + E^0_l) - f_l(x^0, E_l + E^0_l) = \max_{1\leqslant i\leqslant m}(e_{il} + e^0_{il})x - \max_{1\leqslant i\leqslant m}(e_{il} + e^0_{il})x^0 = \\ = \min_{1\leqslant i\leqslant m}\max_{1\leqslant i'\leqslant m}(e_{i'l}x - e_{il}x^0 + e^0_{i'l}x - e^0_{il}x^0) = f_l(x, E_l) - f_l(x^0, E_l) + A(x - x^0) \leqslant \\ \leqslant (\psi - \delta)\|x - x^0\|_1 < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, справедлива формула

$$\forall x \in P(x^0, E) \quad (x \notin X(x^0, E + E^0)). \tag{5}$$

Если $X(x^0, E + E^0) = \varnothing$, то $x^0 \in P^s(E + E^0)$. Напомним, что $x^0 \notin P^s(E)$.

Допустим теперь, что $X(x^0, E + E^0) \neq \varnothing$. Тогда благодаря внешней устойчивости множества $P^s(E + E^0)$ (см., например, [8]) найдётся портфель $x^* \in P(x^0, E + E^0)$. Покажем, что $x^* \notin P^s(E)$.

Допустим обратное: $x^* \in P^s(E)$. Согласно (5), выполняется включение

$$x^* \in P^s(E) \setminus P(x^0, E).$$

Поэтому возможны лишь следующие два случая.

С л у ч а й 1. $f(x^*, E) = f(x^0, E)$. Тогда для любого $k \in N_s$ равенства (4) влекут

$$f_k(x^*, E_k + E_k^0) - f_k(x^0, E_k + E_k^0) = f_k(x^*, E_k) - f_k(x^0, E_k) + A(x^* - x^0) = -\delta \|x^* - x^0\|_1 < 0.$$

С л у ч а й 2. Существует такой индекс $q \in N_s$, что $f_q(x^*, E_q) < f_q(x^0, E_q)$. Тогда, вновь используя (4), приходим к соотношениям

$$f_q(x^*, E_q + E_q^0) - f_q(x^0, E_q + E_q^0) = f_q(x^*, E_q) - f_q(x^0, E_q) + A(x^* - x^0) < 0.$$

В результате и тот, и другой случай противоречат включению $x^* \in P(x^0, E + E^0)$. Тем самым доказано, что $x^* \notin P^s(E)$. Напомним, что $x^* \in P^s(E + E^0)$.

Итак, при любом числе $\varepsilon > (ms)^{1/p}\psi$ гарантируется существование такой возмущающей матрицы $E^0 \in \Omega_p(\varepsilon)$, что найдётся портфель (x^0 или x^*), который одновременно, не являясь парето-оптимальным портфелем задачи $Z^s(E)$, является таковым в возмущённой задаче $Z^s(E + E^0)$. Таким образом, справедлива формула

$$\forall \varepsilon > (ms)^{1/p}\psi \quad \exists E^0 \in \Omega_p(\varepsilon) \quad (P^s(E + E^0) \not\subseteq P^s(E)).$$

Следовательно, $\rho \leqslant (ms)^{1/p}\psi$. ■

Из теоремы 1 вытекает следующий известный результат.

Следствие 1 [2]. $\varphi(m, n, s) \leqslant \rho(m, n, s, \infty) \leqslant \psi(m, n, s)$.

О достижимости этих оценок свидельствует слудующее очевидное утверждение.

Следствие 2. Если для любой пары портфелей $x \notin P^s(E)$ и $x' \in P(x, E)$ выполняется равенство

$$\{j \in N_n : x_j = x'_j = 1\} = \varnothing,$$

то справедлива формула

$$\rho(m, n, s, \infty) = \varphi(m, n, s) = \psi(m, n, s).$$

В случае $m = 1$ многокритериальная инвестиционная задача $Z^s(E)$ превращается в s-критериальную задачу линейного булева программирования $Z^s_L(E)$:

$$Ex = (e_1 x, e_2 x, \dots, e_s x)^{\mathrm{T}} \to \max_{x \in X},$$

где $e_k = (e_{k1}, e_{k2}, \dots, e_{kn})$ — k-я строка матрицы $E = [e_{kj}] \in \mathbb{R}^{s \times n}$, $X \in \mathbb{E}^n$. Очевидно, что такой случай можно интерпретировать как ситуацию, при которой состояние рынка не вызывает сомнений. При этом, как и ранее, в критериальном пространстве $\mathbb{R}^s$ задана произвольная метрика Гельдера l_p, а в пространстве портфелей $\mathbb{R}^n$ — метрика Чебышева l_∞.

Следствие 3. При любых n, $s \in \mathbb{N}$ и $p \in [1, \infty]$ справедливы оценки

$$\rho(1, n, s, p) \leqslant s^{1/p}\psi(1, n, s) = s^{1/p} \min_{x \notin P^s(E)} \max_{x' \in P(x,E)} \min_{k \in N_s} \frac{e_k(x' - x)}{\|x' - x\|_1}.$$

Достижимость этой оценки докажем путём построения соответствующего класса задач.

Теорема 2. Существует такой класс задач линейного булева программирования $Z^s_L(E)$, что справелива формула

$$\rho(1, n, s, p) = s^{1/p}\psi(1, n, s), \quad n, s \in \mathbb{N}, \quad p \in [1, \infty]. \tag{6}$$

Доказательство. Согласно следствию 3, для доказательства равенств (6) достаточно указать класс задач $Z^s(E)$ с условием $\rho(1, n, s, p) \geqslant s^{1/p}\psi(1, n, s)$.

Пусть $X = \{x^1, x^2, \ldots, x^n\} \subset \mathbb{E}^n$, где $n = s + 1$; x^j — j-й столбец единичной $(n \times n)$-матрицы. Пусть матрица $E = [e_{kj}] \in \mathbb{R}^{s \times n}$ со строками e_k, $k \in N_s$, имеет вид

$$E = \begin{pmatrix} 0 & M & \cdots & M & -2\alpha \\ M & 0 & \cdots & M & -2\alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M & M & \cdots & 0 & -2\alpha \end{pmatrix},$$

где $M \gg \alpha > 0$; M — достаточно большое число. Тогда

$$Ex^1 = (0, M, \ldots, M, M)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^s,$$
$$Ex^2 = (M, 0, \ldots, M, M)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^s,$$
$$\cdots$$
$$Ex^{n-1} = (M, M, \ldots, M, 0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^s,$$
$$Ex^n = (-2\alpha, -2\alpha, \ldots, -2\alpha)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^s.$$

Поэтому $x^n \notin P^s(E)$, $x^j \in P(x^n, E)$, $j \in N_s$. Кроме того, справедливы равенства

$$P^s(E) = X \setminus \{x^n\} = \{x^1, x^2, \ldots, x^s\},$$
$$\psi(1, n, s) = \max_{j \in N_s} \min_{k \in N_s} \frac{e_k(x^j - x^n)}{2} = \alpha.$$

Пусть $E' = [e'_{kj}] \in \Omega_p(s^{1/p}\alpha)$ — произвольная возмущающая матрица со строками $e'_1, e'_2, \ldots, e'_s$, т. е. $E' \in \mathbb{R}^{s \times n}$, $\|E'\|_{\infty p} < s^{1/p}\alpha$. Методом от противного легко доказать, что существует индекс $v \in N_s$, подчинённый неравенству $\|e'_v\|_\infty < \alpha$. Поэтому $|e'_{vj}| < \alpha$ при любом индексе $j \in N_n$. Отсюда имеем

$$(e_v + e'_v)(x^v - x^n) = 2\alpha + e'_{vv} - e'_{vn} > 2\alpha - |e'_{vv}| - |e'_{vn}| > 0,$$

а для каждого индекса $k \in N_s \setminus \{v\}$ выводим

$$(e_k + e'_k)(x^v - x^n) = e_k(x^v - x^n) + e'_k(x^v - x^n) = M + 2\alpha + e'_{kv} - e'_{kn} > 0.$$

Резюмируя, заключаем, что $x^n \notin P^s(E + E')$ при любой возмущающей матрице $E' \in \Omega_p(s^{1/p}\alpha)$. Следовательно, $\rho(1, n, s, p) \geqslant s^{1/p}\psi(1, n, s)$. ■

О достижимости верхней оценки (2) при $m = 1$ и $p = \infty$ свидетельствует следующая известная теорема.

Теорема 3 [9]. $\rho(1, n, s, \infty) = \psi(1, n, s)$, n, $s \in \mathbb{N}$.

Заключение

Поскольку рыночной экономике присущ динамизм и высокая степень неопределённости, то фактор риска — неотъемлемый атрибут финансового рынка. В настоящей работе на основе портфельной теории сформулирована многокритериальная (векторная) инвестиционная булева задача с паретовским принципом оптимальности, в которой эффективность выбираемого инвестором портфеля оценивается векторной целевой функцией, состоящей из критериев крайнего оптимизма, присущего безоглядному игроку. При этом фактор неопределённости и неточности исходной информации предлагается учитывать путём указания пределов надёжности принимаемых инвестором решений, т. е. с помощью оценок радиуса устойчивости множества Парето. В результате проведённого параметрического анализа задачи получены нижняя и верхняя оценки радиуса устойчивости в случае, когда в пространстве состояний финансового рынка $\mathbb{R}^m$ и критериальном пространстве показателей экономической эффективности проектов $\mathbb{R}^s$ задана произвольная метрика Гельдера l_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, а в пространстве проектов $\mathbb{R}^n$ — метрика Чебышева l_∞. Оказалось, что нижняя оценка не зависит от величины p, а верхняя с возрастанием числа p от 1 до ∞ уменьшается в ms раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 286 с.
2. *Емеличев В. А., Коротков В. В.* О радиусе устойчивости векторной инвестиционной задачи с критериями минимаксного риска Сэвиджа // Кибернетика и системный анализ. 2012. № 3. С. 68–77.
3. *Емеличев В. А., Коротков В. В.* Устойчивость векторной инвестиционной булевой задачи с критериями Вальда // Дискретная математика. 2012. Т. 24. № 3. С. 3–16.
4. *Емеличев В. А., Коротков В. В.* О мере устойчивости многокритериальной инвестиционной задачи с критериями эффективности Вальда // Известия НАН Азербайджана. Сер. физ.-тех. и матем. наук. 2012. Т. 32. № 6. С. 88–98.
5. *Emelichev V. and Korotkov V.* On stability radius of the multicriteria variant of Markowitz's investment portfolio problem // Bulletin of the Academy of Sciences of Moldova. Mathematics. 2011. No. 1. P. 83–94.
6. *Емеличев В. А., Котов В. М., Кузьмин К. Г. и др.* Устойчивость и эффективные алгоритмы решения задач дискретной оптимизации с многими критериями и неполной информацией // Проблемы управления и информатики. 2014. № 1. С. 53–67.
7. *Емеличев В. А., Коротков В. В.* Исследование устойчивости решений векторной инвестиционной булевой задачи в случае метрики Гельдера в критериальном пространстве // Прикладная дискретная математика. 2012. № 4. С. 61–72.
8. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. 2-е изд., испр. и доп. М.: Физматлит, 2007. 256 с.
9. *Емеличев В. А., Подкопаев Д. П.* О количественной мере устойчивости векторной задачи целочисленного программирования // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38. № 11. С. 1801–1805.