

УДК 519.716

**О КЛАССАХ ФУНКЦИЙ ТРЁХЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ,
ПОРОЖДЁННЫХ СИММЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ
С ОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ СЛОЁВ¹**

А. В. Михайлович

*Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, г. Москва,
Россия*

Изучаются замкнутые классы функций трёхзначной логики, порождённые симметрическими функциями, принимающими значение 1 на ограниченном числе слоёв и нулевое значение — на остальных наборах. Для этих классов получены критерии базирруемости и конечной порождённости. Установлена зависимость наличия базиса (конечного базиса) в рассматриваемом классе от существования базиса (конечного базиса соответственно) в подклассах, порождённых монотонными и немонотонными функциями порождающей системы по отдельности.

Ключевые слова: *функции многозначной логики, замкнутый класс, порождающая система.*

DOI 10.17223/20710410/27/2

**CLOSED CLASSES OF THREE-VALUED LOGIC FUNCTIONS
GENERATED BY SYMMETRIC FUNCTIONS WITH A BOUNDED
NUMBER OF LAYERS**

A. V. Mikhailovich

*National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia***E-mail:** avmikhailovich@gmail.com

Closed classes of three-valued logic functions of which a generating system consists of symmetric functions with values in the set $\{0, 1\}$ and with value 1 at a bounded subset of layers from $\{1, 2\}^n$ are considered. Some criteria for existence of a basis and of a finite basis are obtained for these classes. It is shown how the existence of a basis or of a finite basis depends on the existence of a basis or of a finite basis in subclasses generated by monotonous or non-monotonous functions.

Keywords: *multi-valued logic functions, closed classes, generating systems.*

Введение

Рассматривается задача о конечной порождённости и существовании базисов для некоторых семейств замкнутых классов функций трёхзначной логики. Э. Л. Пост [1, 2] описал все замкнутые классы булевых функций и показал, что каждый такой класс имеет конечный базис. На случай функций k -значной логики (P_k) при $k \geq 3$ эти результаты не распространяются. В работе [3] показано, что при всех $k \geq 3$ в P_k существуют

¹Работа выполнена при поддержке программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2014/2015 г., проект № 14-01-0144.

как замкнутые классы со счётным базисом, так и классы, не имеющие базиса. Следует отметить, что порождающие системы классов из этих примеров состоят из симметрических функций, принимающих значения только из множества $\{0, 1\}$ и равных нулю на единичном наборе и наборах, содержащих хотя бы одну нулевую компоненту. В работах [4–7] рассматривались некоторые семейства классов, порождённых симметрическими функциями такого вида. В частности, в [7] получены критерии базирруемости и конечной порожждённости для классов, порождённых немонотонными симметрическими функциями с ограниченным числом слоёв. В данной работе рассматриваются классы, порождённые произвольными симметрическими функциями с ограниченным числом слоёв такого вида. Для этих классов получены критерии базирруемости и конечной порожждённости в терминах свойств подклассов, порождённых немонотонными и монотонными функциями порождающей системы по отдельности. Отметим, что задача о возможности алгоритмической проверки базирруемости и конечной порожждённости является сложной самостоятельной задачей. Все недостающие определения можно найти в работах [6–8].

1. Определения и вспомогательные утверждения

Функции f и g из P_k называются *конгруэнтными*, если одна из них получается из другой переименованием переменных без отождествления (обозначение $f \cong g$). Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *симметрической*, если она не меняется при любой перестановке своих аргументов. Пусть $\mathfrak{A} \subset P_k$. Множество всех функций, которые могут быть реализованы простыми формулами (простой называется формула, у которой собственными подформулами являются только символы переменных) над $\mathfrak{A}$ и применением операции введения фиктивной переменной, будем обозначать через $\langle \mathfrak{A} \rangle$. Пусть $A_1 \subset E_3^{n_1}, \dots, A_p \subset E_3^{n_p}$, $p \geq 1$, $n = n_1 + \dots + n_p$. Обозначим через $A_1 \times \dots \times A_p$ множество всех наборов из E_3^n вида $(\tilde{\alpha}^1, \dots, \tilde{\alpha}^p)$, где $\tilde{\alpha}^i \in A_i$, $i = 1, \dots, p$. Пусть $\tilde{\alpha} \in E_3^n$. Число единиц в наборе $\tilde{\alpha}$ обозначим через $|\tilde{\alpha}|$. Набор из E_3^n , все компоненты которого равны α , будем обозначать α^n .

Обозначим через R множество всех функций трёхзначной логики, принимающих значения только из множества $\{0, 1\}$ и равных нулю на единичном наборе и на всех наборах, содержащих хотя бы одну нулевую компоненту. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in R$; N_f — множество всех наборов из E_3^n , на которых функция f принимает значение 1; e_f и d_f — соответственно число единиц и двоек в наборе из N_f с максимальным числом единиц. Пусть $F \subset R$, $k \in \mathbb{Z}^+$ (через $\mathbb{Z}^+$ обозначается множество всех неотрицательных целых чисел). Если для любой функции f из множества F выполняется неравенство $e_f \leq k$, то множество F будем называть *k-ограниченным*. Если при этом существует функция g из множества F , такая, что $e_g = k$, то множество F будем называть *точно k-ограниченным*.

Множество $\mathcal{L}$ всех наборов из E_3^n , которые получаются друг из друга перестановкой компонент, называется *слоем*. Слой из $\{1, 2\}^n$, содержащий e единиц и d двоек, $e + d = n$, будем обозначать $\mathcal{L}(e, d)$. Множество всех симметрических функций из R обозначим S . В данной работе рассматриваются только функции из множества R , поэтому в дальнейшем симметрическими функциями будем называть функции множества S , не оговаривая это отдельно. Функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ из R будем называть *m-слоистой симметрической функцией*, если существует m различных слоёв $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_m$, $m \geq 1$, из множества $\{1, 2\}^n$, таких, что $N_f = \mathcal{L}_1 \cup \dots \cup \mathcal{L}_m$. Семейство всех m -слоистых симметрических функций обозначим S^m . Положим $S^{(m)} = \bigcup S^i$, где объединение берётся по всем i , $1 \leq i \leq m$. Функцию из R будем называть *монотонной*, если она монотонна

относительно порядка $0 < 1 < 2$ на множестве E_3 . Множество всех монотонных (немонотонных) симметрических функций из R будем обозначать MS (соответственно NS). Положим $MS^m = S^m \cap MS$, $MS^{(m)} = S^{(m)} \cap MS$, $NS^m = S^m \cap NS$, $NS^{(m)} = S^{(m)} \cap NS$. Пусть $F \subset S$ (соответственно $F \subset MS$, $F \subset NS$). Если существует такое число $m \in \mathbb{N}$, что $F \subset S^{(m)}$ (соответственно $F \subset MS^{(m)}$, $F \subset NS^{(m)}$), то будем называть F множеством симметрических функций (соответственно монотонных симметрических, немонотонных симметрических) с ограниченным числом слоёв.

Сформулируем и при необходимости докажем вспомогательные утверждения.

Лемма 1 [6]. Если формула над R обращается на некотором наборе в единицу, то и любая её подформула обращается на этом наборе в единицу.

Лемма 2 [6]. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in NS^l$, $l \geq 1$, Φ — формула над S , реализующая функцию f , Φ_1 — подформула формулы Φ , имеющая вид $g(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m)$, где $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$ — формулы над S , $g \in S^{(l)}$. Тогда среди формул $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$ есть символы переменных из множества $\{x_1, \dots, x_n\}$, причем символы всех переменных встречаются одинаковое число раз.

Лемма 3. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in S$, Φ — некоторая формула над R , реализующая функцию f , Φ_1 — подформула формулы Φ , имеющая вид $g(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m)$, где $g(x_1, \dots, x_m) \in S$, а $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$ — формулы над R . Тогда справедливы неравенства $e_f \leq e_g$ и $e_f/d_f \leq e_g/d_g$. При этом если Φ_1 не является простой формулой, то имеют место строгие неравенства $e_f < e_g$ и $e_f/d_f < e_g/d_g$.

Доказательство леммы 3 проводится аналогично доказательству утверждения 1.2.6 из работы [6].

Лемма 4. Пусть $f, g \in S$, $H \subset S$, $f, g \notin [H]$. Тогда $\{f\} \cup H = \{g\} \cup H$ в том и только в том случае, когда $f \cong g$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что для любых конгруэнтных функций f и g из S , для любого подмножества H множества S выполняется равенство $\{f\} \cup H = \{g\} \cup H$.

Пусть $H \subset S$, $f(x_1, \dots, x_n), g(x_1, \dots, x_m) \in S \setminus [H]$ и выполняется равенство $\{f\} \cup H = \{g\} \cup H$. Тогда $f \in \{g\} \cup H$ и $g \in \{f\} \cup H$. Пусть Φ — формула над $\{g\} \cup H$, реализующая функцию f . Поскольку $f \notin [H]$, то существует подформула Φ_1 формулы Φ , имеющая вид $g(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m)$, где $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$ — формулы над $\{g\} \cup H$. Из леммы 3 следует, что выполняются неравенства $e_f \leq e_g$, $e_f/d_f \leq e_g/d_g$. Аналогично можно показать, что $e_g \leq e_f$, $e_g/d_g \leq e_f/d_f$. Следовательно, $e_f = e_g$, $e_f/d_f = e_g/d_g$. Значит, выполняются равенства $m = n$ и $d_g = d_f$ и формула Φ_1 является простой. Нетрудно показать, что среди тривиальных формул $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$ символ каждой переменной из $\{x_1, \dots, x_n\}$ встречается ровно по одному разу. Следовательно, в силу леммы 1 выполняется включение $N_f \subset N_g$. Аналогично можно показать, что $N_g \subset N_f$. Следовательно, $N_f = N_g$, а значит, $f \cong g$. ■

Пусть $f, g \in NS^m$, $m \geq 1$, $A \subset R$. Будем писать $f \preceq_A g$, если $f \in \{g\} \cup A$. Из леммы 4 следует, что соотношения $f \preceq_A g$ и $g \preceq_A f$ одновременно выполняются в том и только в том случае, когда функции f и g конгруэнтны. Следовательно, отношение $\preceq_A$ является порядком на любом множестве попарно неконгруэнтных функций из NS^m . Поскольку в дальнейшем данное отношение рассматривается только на таких множествах, будем называть его порядком $\preceq_A$. Множество H попарно неконгруэнтных функций из $NS^m \setminus [A]$ называется *цепью относительно порядка $\preceq_A$* , если любые два элемента множества H сравнимы относительно порядка $\preceq_A$. Пусть G — множество

попарно неконгруэнтных функций из $\text{NS}^m \setminus [A]$. Цепь $H \subset G$ называется *максимальной цепью* множества G относительно порядка $\preceq_A$, если для любой цепи $H_1 \subset \text{NS}^m \setminus [A]$, такой, что $H \subset H_1$, $H \neq H_1$, цепь H_1 не является подмножеством множества G . Функция $f \in H$ называется *верхней гранью* цепи H относительно порядка $\preceq_A$, если для любой функции $g \in H$ выполняется неравенство $g \preceq_A f$. Цепь называется *ограниченной относительно порядка $\preceq_A$* , если она имеет верхнюю грань относительно порядка $\preceq_A$.

Докажем вспомогательное утверждение, анонсированное в [10].

Лемма 5. Пусть подмножество F множества функций R содержит счётное число попарно неконгруэнтных немонотонных симметрических функций. Тогда класс $G = [F]$ не имеет конечного базиса.

Доказательство. Предположим, что класс G имеет конечный базис $\mathfrak{A} = \{g_1(x_1, \dots, x_{n_1}), \dots, g_r(x_1, \dots, x_{n_r})\}$. Положим $n = \max(n_1, \dots, n_r)$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_m)$ — некоторая немонотонная симметрическая функция из множества F , такая, что $m > 2n$. Поскольку множество F содержит счётное число попарно неконгруэнтных немонотонных симметрических функций, такая функция существует. Пусть Φ — формула над $\mathfrak{A}$, реализующая функцию f .

Предположим сначала, что $e_f \geq n$. Пусть $g_s(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_s}})$ — простая подформула формулы Φ , $1 \leq s \leq r$. Рассмотрим набор $\tilde{\alpha} \in \mathcal{L}(e_f, m - e_f)$, такой, что $\alpha_{i_1} = \dots = \alpha_{i_{n_s}} = 1$. Поскольку $e_f \geq n \geq n_s$, такой набор существует. В силу включения $\mathcal{L}(e_f, m - e_f) \subset N_f$ выполняется равенство $f(\tilde{\alpha}) = 1$. Применяя лемму 1, получаем, что $g_s(1^{n_s}) = g_s(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{n_s}}) = 1$. Но по определению множества R выполняется $g_s(1^{n_s}) = 0$. Получили противоречие.

Пусть теперь $e_f < n$. Покажем, что для любого набора $\tilde{\alpha}$ из $\{1, 2\}^m$, такого, что $|\tilde{\alpha}| \leq e_f$, и для любой подформулы Φ_1 формулы Φ выполняется равенство $\Phi_1(\tilde{\alpha}) = 1$. Доказательство будем проводить индукцией по глубине подформулы Φ_1 .

Пусть Φ_1 — простая формула, имеющая вид $g_s(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_s}})$, $1 \leq s \leq r$. Без ограничения общности будем считать, что среди переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_s}}$ встречаются символы $x_1, \dots, x_t$, и только они. Положим $a = |(\alpha_1, \dots, \alpha_t)|$, $b = e_f - a$. Определим набор $\tilde{\beta}$ из $\mathcal{L}(e_f, m - e_f)$ так: $\tilde{\beta} = (\alpha_1, \dots, \alpha_t, 1^b, 2^{m-t-b})$. Поскольку $\mathcal{L}(e_f, m - e_f) \subset N_f$, то в силу леммы 1 выполняется равенство $\Phi_1(\tilde{\beta}) = 1$. Кроме того, из определения набора $\tilde{\beta}$ следует равенство $\Phi_1(\tilde{\beta}) = \Phi_1(\tilde{\alpha})$. Значит, $\Phi_1(\tilde{\alpha}) = 1$.

Пусть теперь Φ_1 — формула глубины d и Φ_1 имеет вид $g_s(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{n_s})$, где глубина каждой из формул $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{n_s}$ не превосходит $d - 1$. Без ограничения общности будем считать, что подформулы $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_q$ являются символами переменных, а подформулы $\mathcal{B}_{q+1}, \dots, \mathcal{B}_{n_s}$ — нетривиальными формулами. По предположению индукции для любой нетривиальной подформулы $\mathcal{B}_t$, $1 \leq t \leq n_s$, для любого набора $\tilde{\gamma}$ из $\{1, 2\}^m$, такого, что $|\tilde{\gamma}| \leq e_f$, выполняется равенство $\mathcal{B}_t(\tilde{\gamma}) = 1$. Пусть среди $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_q$ встречаются символы переменных $x_1, \dots, x_t$, и только они. Положим $a = |(\alpha_1, \dots, \alpha_t)|$, $b = e_f - a$. Определим набор $\tilde{\beta}$ из $\mathcal{L}(e_f, m - e_f)$ так: $\tilde{\beta} = (\alpha_1, \dots, \alpha_t, 1^b, 2^{m-t-b})$. Поскольку $\mathcal{L}(e_f, m - e_f) \subset N_f$, то в силу леммы 1 выполняется равенство $\Phi_1(\tilde{\beta}) = 1$. Значит, $g_s(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_q}, 1^{n_s-q}) = 1$. Поскольку наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ совпадают на первых t компонентах и для любой подформулы $\mathcal{B}_t$, $q < t \leq n_s$, для любого набора $\tilde{\gamma}$ из $\{1, 2\}^m$, такого, что $|\tilde{\gamma}| \leq e_f$, выполняется равенство $\mathcal{B}_t(\tilde{\gamma}) = 1$, то справедливо равенство $\Phi_1(\tilde{\alpha}) = 1$.

Таким образом, получаем, что для любого набора $\tilde{\alpha}$, такого, что $|\tilde{\alpha}| \leq e_f$, выполняется равенство $f(\tilde{\alpha}) = 1$. Поскольку e_f — число единиц в наборе с максимальным числом единиц из N_f , то функция f является монотонной симметрической. Получили противоречие. Следовательно, класс G не имеет конечного базиса. ■

Для доказательства основного результата потребуются также следующие утверждения.

Лемма 6 [9]. Пусть $F \subset S$, $H \subset R$, $G = [F \cup H]$ и существует такое $n \in \mathbb{Z}^+$, что число существенных переменных у каждой функции из множества H не превосходит n . Тогда если класс G имеет базис, то и класс $\{f \in F : e_f \geq n\}$ имеет базис.

Лемма 7 [9]. Пусть $F \subset S$ и существует функция f из F , такая, что $e_f > 0$; $H \subset R$, $G = [F \cup H]$. Пусть существует такое $n \in \mathbb{Z}^+$, что число существенных переменных у каждой функции из множества H не превосходит n . Тогда если класс $\{f \in F : e_f \geq n\}$ имеет базис, то и класс G имеет базис.

Лемма 8. Пусть $F \subset S$ и существует функция f из F , такая, что $e_f > 0$; $k \in \mathbb{Z}^+$, H — k -ограниченное множество симметрических функций, $G = [H \cup F]$, $G' = [F]$. Тогда класс G имеет базис в том и только в том случае, когда класс G' имеет базис.

Доказательство. Обозначим через F^+ множество функций f из F , таких, что $e_f > k$. Пусть класс G' (соответственно G) имеет базис. Применяя лемму 6, получаем, что класс $[F^+]$ имеет базис. Далее, применяя лемму 7, получаем, что класс G (соответственно G') имеет базис. ■

Лемма 9 [6]. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$, $g(x_1, \dots, x_m)$ — функции из MS, $n \geq m \geq 1$. Пусть $e_f < e_g$. Тогда $f \in \{g\}$.

Лемма 10. Пусть $k \in \mathbb{N}$, G — некоторое точно k -ограниченное множество попарно неконгруэнтных монотонных симметрических функций, $F = [G]$. Тогда класс F имеет базис, причём базис класса F конечный в том и только в том случае, когда множество $G \cap MS^k$ конечно.

Доказательство. Положим $G^k = G \cap MS^k$. Обозначим через n_0 минимальное число существенных переменных у функций из G^k , через f_0 — произвольную функцию из G^k , у которой n_0 существенных переменных, через G^0 — множество функций из G , число существенных переменных у которых не превосходит n_0 .

Покажем сначала, что $G \subset [G^k \cup G^0]$. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in G$. Если $e_f = k$, то $f \in G^k$. Если $e_f < k$, $n \leq n_0$, то $f \in G^0$. Если $e_f < k$ и $n > n_0 > 1$, то в силу леммы 9 выполняется включение $f \in \{f_0\}$. Следовательно, $G \subset [G^k \cup G^0]$.

Покажем, что для любой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ из G^k выполняется соотношение $f \notin [(G^k \cup G^0) \setminus \{f\}]$. Предположим, что это не так. Пусть Φ — формула над $(G^k \cup G^0) \setminus \{f\}$, реализующая функцию f . Поскольку для любой функции g из $G^k \cup G^0$ верно неравенство $e_g \leq e_f$, то из леммы 3 следует, что формула Φ простая. Следовательно, существует функция $g(x_1, \dots, x_m)$ из $G^k \cup G^0$, такая, что $f \in \{g\}$. Из леммы 3 следует, что $e_g = e_f$ и $e_f/d_f \leq e_g/d_g$. Следовательно, $d_g \leq d_f$. Поскольку формула Φ простая, то $n \leq m$. Кроме того, выполняются равенства $n = e_f + d_f$, $m = e_g + d_g$. Значит, $d_f \leq d_g$. Следовательно, $d_f = d_g$. Получаем, что $f \cong g$, что противоречит условию леммы. Поэтому для любой функции f из G^k выполняется соотношение $f \notin [(G^k \cup G^0) \setminus \{f\}]$. Поскольку множество G^0 конечно, существует подмножество H множества G^0 , такое, что $[G^0 \cup G^k] = [H \cup G^k]$ и для любой функции g из H выполняется соотношение $g \notin [(H \cup G^k) \setminus \{g\}]$. Значит, класс F имеет базис $H \cup G^k$. Поскольку множество H конечно, класс F имеет конечный базис в том и только в том случае, когда множество G^k конечно. ■

Основные результаты данной работы — критерии базизируемости и конечной порождённости для классов, порождённых множествами симметрических функций с ограниченным числом слоёв, — существенно опираются на критерии базизируемости и конечной

порождённости для классов, порождённых множествами монотонных симметрических функций и немонотонных симметрических функций с ограниченным числом слоёв по отдельности. Критерий конечной порождённости для классов, порождённых k -ограниченным множеством монотонных симметрических функций, приведён выше (поскольку функции монотонные, то множество функций с ограниченным числом слоёв является k -ограниченным множеством для некоторого k из $\mathbb{Z}^+$). Кроме того, показано, что при $k \geq 1$ такие классы всегда имеют базис. Следующая теорема устанавливает, в каких случаях класс, порождённый множеством немонотонных симметрических функций с ограниченным числом слоёв, имеет базис и в каком случае этот базис конечный.

Теорема 1 [7]. Пусть $k \in \mathbb{N}$, G — некоторое множество попарно неконгруэнтных функций из $\text{NS}^{(k)}$, $G^l = G \cap \text{NS}^l$, $H^l = G \cap (\text{NS}^{(k)} \setminus \text{NS}^{(l)})$, $1 \leq l \leq k$, $F = [G]$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Класс F имеет конечный базис, если и только если множество G конечно.
2. Класс F имеет счётный базис тогда и только тогда, когда для любого l каждая функция множества $G^l \setminus [H^l]$ содержится в ограниченной максимальной цепи множества $G^l \setminus [H^l]$ относительно порядка $\preceq_{H^l}$.
3. Класс F не имеет базиса тогда и только тогда, когда существует m , $1 \leq m \leq l$, и существует функция $h \in G^m \setminus [H^m]$, которая не содержится ни в какой ограниченной максимальной цепи множества $G^l \setminus [H^l]$ относительно порядка $\preceq_{H^l}$.

2. Основные результаты

Теорема 2. Пусть $k \in \mathbb{N}$, G — некоторое множество попарно неконгруэнтных функций из $S^{(k)}$, $F = [G]$, множество $G \cap \text{MS}$ является точно l -ограниченным для некоторого $l \in \mathbb{Z}^+$, $l \leq k$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Класс F имеет конечный базис тогда и только тогда, когда множество $G \cap \text{NS}$ конечно и выполняется по крайней мере одно из следующих условий:
 - а) класс $[G \cap \text{MS}]$ имеет конечный базис;
 - б) существует функция $f \in \langle G \cap (\text{NS}^{(k)} \setminus \text{NS}^{(l-1)}) \rangle$, такая, что для некоторых $e, d \in \mathbb{N}$ выполняется включение $\bigcup_{i=0}^l \mathcal{L}(i, d-i) \times (1^e) \subset N_f$.
2. Класс F имеет счётный базис тогда и только тогда, когда класс $[G \cap \text{NS}]$ имеет базис и выполняется по крайней мере одно из следующих условий:
 - а) класс $[G \cap \text{NS}]$ имеет счётный базис;
 - б) класс $[G \cap \text{MS}]$ имеет счётный базис и не существует функции f из $\langle G \cap (\text{NS}^{(k)} \setminus \text{NS}^{(l-1)}) \rangle$, такой, что для некоторых $e, d \in \mathbb{N}$ выполняется включение $\bigcup_{i=0}^l \mathcal{L}(i, d-i) \times (1^e) \subset N_f$.
3. Класс F не имеет базиса тогда и только тогда, когда класс $[G \cap \text{NS}]$ не имеет базиса или G является 0-ограниченным множеством, содержащим счётное число попарно неконгруэнтных функций.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть класс F имеет конечный базис $\mathfrak{A}$. В силу леммы 5 множество $G \cap \text{NS}$ конечно. Если класс $[G \cap \text{MS}]$ имеет конечный базис, то первое условие утверждения выполнено. Пусть класс $[G \cap \text{MS}]$ не имеет конечного базиса. Положим $A = G \cap \text{MS}^l$. В силу леммы 10 множество A счётно. Кроме того, из леммы 3 следует, что для любой функции f из A выполняется соотношение $f \notin [A \setminus \{f\}]$. Поскольку базис $\mathfrak{A}$ является конечным, существует конечное

множество $B \subset G$, такое, что $\mathfrak{A} \subset [B]$. Пусть функция f из $\mathfrak{A}$ реализуется формулой Υ_f над B . Обозначим через n_0 максимальное число существенных переменных в функциях из множества B . Поскольку множество A счётно, то существует функция $f(x_1, \dots, x_n)$ из A , такая, что $n > n_0$. Рассмотрим формулу Φ над $\mathfrak{A}$, реализующую функцию f , и формулу $\pi(\Phi)$ над B , полученную заменой в формуле Φ каждой функции f из базиса $\mathfrak{A}$ на соответствующую подформулу Υ_f . Поскольку $n > n_0$, формула $\pi(\Phi)$ не является простой.

Пусть Φ_1 — подформула формулы $\pi(\Phi)$, имеющая вид $g(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m)$, где g — функция из B , а $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$ — простые формулы над B или символы переменных из множества $\{x_1, \dots, x_n\}$. Без ограничения общности будем считать, что $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_s$ — символы переменных из множества $\{x_1, \dots, x_t\}$, $t \leq n$, а $\mathcal{B}_{s+1}, \dots, \mathcal{B}_m$ — простые формулы. Обозначим через $g_1(x_1, \dots, x_r)$ функцию, которую реализует формула $g(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_s, x_{t+1}, \dots, x_r)$. Очевидно, что $g_1 \in \langle \{g\} \rangle$. Из леммы 1 следует, что множество N_{g_1} содержит все наборы, имеющие вид $(\tilde{\alpha}, 1^{r-t})$, где $\tilde{\alpha} \in \mathcal{L}(e, t-e)$, $0 \leq e \leq l$.

Покажем теперь, что если выполняются условия утверждения 1, то класс F имеет конечный базис. По условию множество $G \cap \text{NS}$ конечно. Если класс $[G \cap \text{MS}]$ имеет конечный базис, то очевидно, что множество F имеет конечный базис. Пусть класс $[G \cap \text{MS}]$ не имеет конечного базиса и существует функция $f \in \langle G \cap (\text{NS}^{(k)} \setminus \text{NS}^{(l-1)}) \rangle$, такая, что для некоторых $e, d \in \mathbb{N}$ выполняется включение $\bigcup_{i=0}^l \mathcal{L}(i, d-i) \times (1^e) \subset N_f$. Пусть

d_0 — максимальное число, такое, что выполняется включение $\bigcup_{i=0}^{d_0} \mathcal{L}(i, d-i) \times (1^e) \subset N_f$. В силу определения множества NS выполняется неравенство $d > d_0$.

Построим сначала функцию $f_1(x_1, \dots, x_{n_1}) \in [\{f\}]$, такую, что для некоторого $d_1 \leq d$, $d_1 \in \mathbb{N}$, выполняется включение $\bigcup_{i=0}^l \mathcal{L}(i, d_1-i) \times (1) \subset N_f$ и существует набор $\tilde{\alpha} \in \mathcal{L}(l+1, d_1-l-1) \times 1$, такой, что $\tilde{\alpha} \notin N_{f_1}$. Если $d_0 = l$, то функции f и f_1 совпадают. Пусть теперь $d_0 > l$. Без ограничения общности будем считать, что набор $(1^{d_0+1}, 2^{d-d_0-1}, 1^e)$ не содержится в N_f . Тогда

$$f_1(x_1, \dots, x_{n_1}) = f(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{d_0-l+1}, x_2, \dots, x_l, \underbrace{x_{l+1}, \dots, x_{l+1}}_e).$$

Очевидно, что набор $(1^{l+1}, 2^{d_1-l-1}, 1)$ не содержится в N_{f_1} , а все наборы из множества $\bigcup_{i=0}^l \mathcal{L}(i, d_1-i) \times (1)$ содержатся в N_{f_1} .

Построим функцию $f_2(x_1, \dots, x_{n_1})$, такую, что $\bigcup_{i=0}^l \mathcal{L}(i, d_1-i) \times (1) \subset N_{f_2}$ и для любого набора $\tilde{\alpha}$ из $\mathcal{L}(l+1, d_1-l-1) \times (1)$ набор $\tilde{\alpha}$ не содержится в N_{f_2} .

Положим $s = C_{d_1}^{l+1}$, $X = \{x_1, \dots, x_{d_1}\}$. Обозначим через (Y^1, Z^1) , (Y^2, Z^2) , $\dots$, (Y^s, Z^s) всевозможные разбиения множества X на помножества, содержащие $l+1$ и d_1-l-1 элементов соответственно. Пусть $\tilde{y}^i$ — некоторая фиксированная перестановка переменных из множества Y^i , а $\tilde{z}^i$ — некоторая фиксированная перестановка переменных из множества Z^i , $i = 1, \dots, s$. Покажем, что

$$f_2(x_1, \dots, x_{n_2}) = \underbrace{f_1(\tilde{y}^1, \tilde{z}^1, f_1(\tilde{y}^2, \tilde{z}^2, f_1(\dots (f_1(\tilde{y}^s, \tilde{z}^s, x_{n_1}) \dots)))}_{s \text{ символов } f_1}.$$

Для каждого t , $1 \leq t \leq s$ определим формулу Φ_t . Положим $\Phi_t = f_1(\tilde{y}^t, \tilde{z}^t, u)$. Рассмотрим набор $\tilde{\alpha}$ из $\{1, 2\}^{n_1-1}$. Пусть $a = |\tilde{\alpha}| \leq l$. Поскольку выполняется включение

$\mathcal{L}(a, d_1 - a) \times (1) \subset N_{f_1}$, то для любого i , $1 \leq i \leq s$, верно равенство $\Phi_i(\tilde{\alpha}, 1) = 1$. Индукцией по глубине подформулы формулы, реализующей функцию f_2 , нетрудно показать, что любая её подформула принимает значение 1 на наборе $(\tilde{\alpha}, 1)$. Значит, $f_2(\tilde{\alpha}, 1) = 1$.

Пусть теперь $a = l + 1$. Тогда существует разбиение (Y^p, Z^p) , $i \leq p \leq s$, такое, что все компоненты набора $\tilde{\alpha}$, соответствующие переменным из множества Y^p , принимают значение 1. Поскольку $f_1(1^{l+1}, 2^{d_1-l}, 1) = 0$, подформула

$$\underbrace{f_1(\tilde{y}^p, \tilde{z}^p, f_1(\tilde{y}^{p+1}, \tilde{z}^{p+1}, f_1(\dots (f_1(\tilde{y}^s, \tilde{z}^s, x_{n_1}) \dots)))}_{s-p+1 \text{ символов } f_1}$$

принимает значение 0 на наборе $(\tilde{\alpha}, 1)$. В силу леммы 1 выполняется равенство $f_2(\tilde{\alpha}, 1) = 0$.

Пусть $g(x_1, \dots, x_m)$ — функция из $G \cap MS^l$, такая, что $m \geq d_1$, а $g_1, \dots, g_r$ — все функции из $G \cap MS^l$, зависящие от меньшего чем m числа переменных. Покажем, что $G \cap MS^l \subset [\{g_1, \dots, g_r, g, f\}]$. Для этого достаточно показать, что для любой функции $h(x_1, \dots, x_p)$ из M^l , такой, что $p > m$, выполняется соотношение $h \in [\{f_2\} \cup \{g\}]$. Положим $s = C_p^{d_1}$, $X = \{x_1, \dots, x_p\}$. Обозначим через (Y^1, Z^1) , (Y^2, Z^2) , $\dots$, (Y^s, Z^s) всевозможные разбиения множества X на помножества, содержащие d_1 и $p - d_1$ элементов соответственно. Пусть $\tilde{y}^i$ — некоторая фиксированная перестановка переменных из множества Y^i , а $\tilde{z}^i$ — некоторая фиксированная перестановка переменных из множества Z^i , $i = 1, \dots, s$. Покажем, что

$$h(x_1, \dots, x_p) = \underbrace{f_2(\tilde{y}^1, \tilde{z}^1, f_2(\tilde{y}^2, \tilde{z}^2, f_2(\dots (f_2(\tilde{y}^s, \tilde{z}^s, g(x_1, \dots, x_m)) \dots)))}_{s \text{ символов } f_2}.$$

Рассмотрим произвольный набор $\tilde{\alpha}$ из $\{1, 2\}^p$. Пусть $a = |\tilde{\alpha}| \leq l$. Покажем, что для любой подформулы Φ формулы, реализующей функцию h , выполняется равенство $\Phi(\tilde{\alpha}) = 1$.

Обозначим через Φ_t формулу, имеющую вид

$$\underbrace{f_2(\tilde{y}^t, \tilde{z}^t, f_2(\tilde{y}^{t+1}, \tilde{z}^{t+1}, f_2(\dots (f_2(\tilde{y}^s, \tilde{z}^s, g(x_1, \dots, x_m)) \dots)))}_{s-t+1 \text{ символов } f_2}, \quad 1 \leq t \leq s,$$

а через Φ_{s+1} — формулу $g(x_1, \dots, x_m)$. Индукцией по t от $s+1$ до 1 нетрудно показать, что для любого набора $\tilde{\alpha}$ из $\{1, 2\}^p$, такого, что $|\tilde{\alpha}| \leq l$, выполняется $\Phi_t(\tilde{\alpha}) = 1$.

Пусть теперь $l < a < p - (d_1 - l) - 1$. Без ограничения общности будем считать, что $\tilde{\alpha} = (1^a, 2^{p-a})$. Рассмотрим разбиение множества X следующего вида: $Y^r = \{x_1, \dots, x_{l+1}, x_{p-(d_1-l)+2}, \dots, x_p\}$, $Z^r = \{x_{l+2}, \dots, x_{p-(d_1-l)+1}\}$. Рассмотрим подформулу Φ_r . Значение формулы Φ_r на наборе $\tilde{\alpha}$ совпадает со значением функции f_2 на наборе $(\tilde{\beta}, 1)$, где $\tilde{\beta}$ — набор из $\mathcal{L}(l+1, d_1 - l - 1)$. Следовательно, $\Phi_r(\tilde{\alpha}) = 0$. В силу леммы 1 выполняется равенство $\Phi_1(\tilde{\alpha}) = 0$.

Пусть теперь $a \geq p - (d_1 - l + 1)$. Тогда $|(\alpha_1, \dots, \alpha_m)| \geq m - (d_1 - l + 1)$. Поэтому $g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = 0$. В силу леммы 1 $\Phi_1(\tilde{\alpha}) = 0$. Следовательно, формула Φ_1 реализует функцию h .

Таким образом, класс F имеет конечный базис.

Докажем утверждение 2. Пусть класс F имеет счётный базис. Очевидно, что в этом случае множество G счётно. Поскольку $G \subset S^{(k)}$, существует число $l \leq k$, такое, что множество $G \cap MS$ является l -ограниченным. Из леммы 8 следует, что класс $[G \cap NS]$ имеет базис. Если множество $G \cap NS$ счётно, то в силу леммы 5 класс $[G \cap NS]$ не

имеет конечного базиса, а значит, он имеет счётный базис, и в этом случае утверждение доказано. Пусть множество $G \cap \text{NS}$ конечно. Тогда класс $G \cap \text{MS}$ имеет счётный базис. Если существует функция f , такая, что для некоторых $e, d \in \mathbb{N}$ выполняется включение $\bigcup_{i=0}^l \mathcal{L}(i, d-i) \times (1^e) \subset N_f$, то, как показано выше, класс F имеет конечный базис. Следовательно, такой функции не существует.

Пусть выполняется одно из условий утверждения 2. Пусть класс $[G \cap \text{NS}]$ имеет счётный базис. В силу теоремы 1 множество $G \cap \text{NS}$ счётно и в силу леммы 5 класс F не имеет конечного базиса. Поскольку для некоторого $l \leq k$ множество $G \cap \text{MS}$ является l -ограниченным, в силу леммы 8 класс F имеет базис. Следовательно, класс F имеет счётный базис.

Пусть теперь множество $G \cap \text{NS}$ конечно. Тогда класс $[G \cap \text{MS}]$ имеет счётный базис. Поскольку для некоторого $l \leq k$ множество $G \cap \text{MS}$ является l -ограниченным, применяя лемму 8, получаем, что класс F имеет базис. Предположим, что класс F имеет конечный базис. Выше показано, что в этом случае существует функция f , такая, что для некоторых $e, d \in \mathbb{N}$ выполняется включение $\bigcup_{i=0}^l \mathcal{L}(i, d-i) \times (1^e) \subset N_f$. По условию такой функции не существует. Следовательно, класс F имеет счётный базис.

Утверждение 3 следует из справедливости утверждений 1 и 2. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Post E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions // Am. J. Math. 1921. V. 43. No. 3. P. 163–185.
2. Post E. L. The Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic. Ann. Math. Studies. Princeton Univ. Press, 1941. 122 p.
3. Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k -значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // ДАН СССР. 1959. Т. 127. № 1. С. 44–46.
4. Михайлович А. В. О замкнутых классах трехзначной логики, порожденных симметрическими функциями // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2008. № 4. С. 54–57.
5. Михайлович А. В. О классах функций трехзначной логики, порожденных монотонными симметрическими функциями // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2009. № 1. С. 33–37.
6. Михайлович А. В. О замкнутых классах функций многозначной логики, порожденных симметрическими функциями // Математические вопросы кибернетики. М.: Физматлит, 2013. Вып. 18. С. 123–212.
7. Михайлович А. В. О базисуемости замкнутых классов функций трехзначной логики, порожденных симметрическими функциями с ограниченным числом слоев // Материалы IX молодежной науч. школы по дискретной математике и её приложениям (Москва, 16–21 сентября 2013 г.). М.: Изд-во ИПМ РАН, 2013. С. 80–85.
8. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001. 384 с.
9. Михайлович А. В. О замкнутых классах трехзначной логики, порожденных системами, содержащими симметрические функции // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2012. № 1. С. 58–62.
10. Михайлович А. В. О свойствах замкнутых классов функций трехзначной логики, порожденных симметрическими функциями // Материалы X Междунар. семинара «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 1–6 февраля 2010 г.). М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2010. С. 193–196.

REFERENCES

1. *Post E. L.* Introduction to a general theory of elementary propositions. *Am. J. Math.*, 1921, vol. 43, no. 3, pp. 163–185.
2. *Post E. L.* The Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic. *Ann. Math. Studies*. Princeton Univ. Press, 1941. 122 p.
3. *Janov Ju. I., Muchnik A. A.* O sushhestvovanii k -znachnyh zamknutyh klassov, ne imejushhih konechnogo bazisa. *DAN SSSR*, 1959, vol. 127, no. 1, pp. 44–46. (in Russian)
4. *Mikhailovich A. V.* O zamknutyh klassah trehznachnoj logiki, porozhdennyh simmetricheskimi funkcijami. *Vestn. Mosk. un-ta. Matem. Mehan.*, 2008, no. 4, pp. 54–57. (in Russian)
5. *Mikhailovich A. V.* O klassah funkcij trehznachnoj logiki, porozhdennyh monotonnymi simmetricheskimi funkcijami. *Vestn. Mosk. un-ta. Matem. Mehan.*, 2009, no. 1, pp. 33–37. (in Russian)
6. *Mikhailovich A. V.* O zamknutyh klassah funkcij mnogoznachnoj logiki, porozhdennyh simmetricheskimi funkcijami. *Matematicheskie voprosy kibernetiki*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2013, no. 18, pp. 123–212. (in Russian)
7. *Mikhailovich A. V.* O baziruemosti zamknutyh klassov funkcij trehznachnoj logiki, porozhdennyh simmetricheskimi funkcijami s ogranichenym chislom sloev. *Materialy IX molodezhnoj nauch. shkoly po diskretnoj matematike i ejo prilozhenijam* (Moscow, 16–21 september, 2013). Moscow, IPM RAN Publ., 2013, pp. 80–85. (in Russian)
8. *Jablonskij S. V.* Vvedenie v diskretnuju matematiku. Moscow, Vysshaja Shkola Publ., 2001. 384 p. (in Russian)
9. *Mikhailovich A. V.* O zamknutyh klassah trehznachnoj logiki, porozhdennyh sistemami, soderzhashhimi simmetricheskie funkcii. *Vestn. Mosk. un-ta. Matem. Mehan.*, 2012, no. 1, pp. 58–62. (in Russian)
10. *Mikhailovich A. V.* O svojstvah zamknutyh klassov funkcij trehznachnoj logiki, porozhdennyh simmetricheskimi funkcijami. *Materialy X Mezhdunar. seminara «Diskretnaja matematika i ee prilozhenija»* (Moscow, 1–6 february, 2010). Moscow, DMM MSU Publ., 2010, pp. 193–196. (in Russian)