

УДК 519.4

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ РАЗЛОЖИМЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА
НА КОНЕЧНОЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЕ

М. И. Рожков

*Московский институт электроники и математики Национального исследовательского
университета Высшая Школа Экономики, г. Москва, Россия*

Рассматривается задача разложения простой однородной цепи Маркова Γ в сумму $s \geq 2$ взаимно независимых составляющих цепей Маркова $\Gamma^{(i)}$, заданных на конечной абелевой группе G . Данная задача связана с известной процедурой укрупнения состояний цепи Маркова. Описывается широкий класс цепей, допускающих такое разложение в сумму двух цепей бесконечным числом способов. Результаты данной работы могут быть полезны при оценке возможностей восстановления параметров исходных цепей Маркова, поступающих в узел суммирования, по результирующей последовательности. Такого сорта задачи возникают при построении и исследовании свойств генераторов случайных последовательностей.

Ключевые слова: разложение цепи Маркова, сумма цепей Маркова, укрупнение состояний цепи Маркова.

DOI 10.17223/20710410/27/8

ON SOME CLASSES OF DECOMPOSABLE MARKOV CHAINS
ON FINITE ABELIAN GROUP

M. I. Rozhkov

*National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia***E-mail:** rozhkov.m.i@yandex.ru

The problem for the decomposition of a given simple homogeneous Markov chain into the sum of the components of the chain is considered. The class of chains allowing this decomposition in the infinite number of ways is described.

Keywords: decomposition of a Markov chain, the summation of Markov chains.

1. Постановка задачи

Пусть $\Gamma^{(i)} = \gamma_1(i), \gamma_2(i), \dots, i = 1, \dots, s$ — независимые реализации простых однородных цепей Маркова на конечной абелевой группе $G = (G, +)$ с соответствующими матрицами переходных вероятностей

$$\pi^{(i)} = \|p^{(i)}(g, h)\|, \quad g, h \in G, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Положим $\Gamma = \gamma_1, \gamma_2, \dots$, где

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^s \gamma_j(i), \quad j = 1, 2, \dots$$

В работах [1, 2] исследовались условия, при которых элементы результирующей последовательности Γ также связаны простой однородной цепью Маркова с некоторой матрицей переходных вероятностей

$$\pi = \|p(g, h)\|, \quad g, h \in G,$$

которая не зависит от начального распределения исходных цепей (т. е. от распределения величин $\gamma_1(i)$, $i = 1, 2, \dots, s$). В этом случае будем говорить, что цепь Γ разложима в сумму цепей Маркова. Отметим, что рассматриваемая задача разложения цепи Маркова в сумму цепей тесным образом связана с известной процедурой укрупнения состояний цепи Маркова [3].

С каждой строкой матрицы $\pi^{(i)} = \|p^{(i)}(g, h)\|$, $g, h \in G$, свяжем элемент группового кольца DG (определение группового кольца см. в [4])

$$p^{(i)}(g) = \sum_{h \in G} p^{(i)}(g, h) \cdot h,$$

где D — поле действительных (рациональных) чисел. Элемент $p^{(i)}(g)$ будем называть характеристической функцией соответствующей строки матрицы $\pi^{(i)}$. В [1, теорема 1 и лемма 3] найдено следующее строение матрицы переходных вероятностей $\pi = \|p(g, h)\|$ цепи Γ , являющейся суммой исходных цепей $\Gamma^{(i)}$.

Теорема 1. Пусть сумма $s \geq 2$ цепей Маркова с матрицами переходных вероятностей $\pi^{(i)} = \|p^{(i)}(g, h)\|$, $g, h \in G$, $i = 1, 2, \dots, s$, является цепью Маркова с матрицей переходных вероятностей $\pi = \|p(g, h)\|$, $g, h \in G$. Тогда для характеристических функций $p(g)$ строк матрицы π в групповом кольце DG выполняются соотношения

$$p(0) = p^{(1)}(0) \cdot p^{(2)}(0) \cdot \dots \cdot p^{(s)}(0), \quad p(g) = p(0)f(g), \quad g \in G, \quad (1)$$

где f — гомоморфизм группы G в группу мультипликативно обратимых элементов кольца DG ; 0 — нулевой элемент группы G .

Вопрос о том, всегда ли цепь с матрицей $\pi = \|p(g, h)\|$, характеристические функции строк которой удовлетворяют соотношениям (1), разлагается в сумму s цепей, является открытым. При этом известно следующее достаточное условие марковости для суммы цепей.

Теорема 2 [2, теорема 3]. Пусть на конечной абелевой группе G заданы $s \geq 2$ цепей Маркова $\Gamma^{(i)}$ с матрицами переходных вероятностей

$$\pi^{(i)} = \|p^{(i)}(g, h)\|, \quad g, h \in G, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Сумма цепей Маркова $\Gamma^{(i)}$ также является цепью Маркова, если характеристические функции строк матриц $\pi^{(i)}$ удовлетворяют соотношениям

$$p^{(i)}(g) = p^{(i)}(0)f(g), \quad g \in G, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

где f — гомоморфизм группы G в группу мультипликативно обратимых элементов кольца DG .

В дальнейшем потребуются два вспомогательных утверждения. Элемент

$$p = \sum_{h \in G} p(h) \cdot h$$

группового кольца DG будем называть вероятностным, если $\sum_{h \in G} p(h) = 1$, $p(h) \geq 0$.

Лемма 1. Пусть G — конечная абелева группа, D — поле действительных (рациональных) чисел, $f(g) = \sum_{h \in G} f(g, h) \cdot h$ — произвольный гомоморфизм группы G в группу мультипликативно обратимых элементов кольца DG , такой, что $\sum_{h \in G} f(g, h) = 1$ для любого элемента $g \in G$, M — максимальное значение абсолютных величин коэффициентов $f(g, h)$, $g, h \in G$.

Тогда для любого вероятностного элемента вида

$$p = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h + \sum_{h \in G} \varepsilon(h)h, \quad |\varepsilon(h)| < \frac{1}{|G|^2 M}, \quad \sum_{h \in G} \varepsilon(h) = 0$$

произведение $p \cdot f(g)$ также является вероятностным элементом при любом $g \in G$.

Доказательство. Заметим, что

$$p \cdot f(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h + \sum_{h \in G} \sum_{r \in G} (\varepsilon(r) f(g, h - r))h.$$

Кроме того, справедливо неравенство

$$\left| \sum_{r \in G} \varepsilon(r) f(g, h - r) \right| < \frac{1}{|G|^2 M} M \cdot |G| = 1/|G|.$$

Отсюда следует, что все коэффициенты элемента $p \cdot f(g)$ положительны, и утверждение леммы 1 доказано. ■

Лемма 2. Пусть $p = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h + \sum_{h \in G} \varepsilon(h)h$, $\sum_{h \in G} \varepsilon(h) = 0$, — произвольный вероятностный элемент. Тогда справедливо разложение

$$\begin{aligned} p &= L \cdot R, \\ L &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h + \sum_{h \in G} \varepsilon \cdot h + \delta \cdot 0, \quad \varepsilon \neq 0, \quad \delta \neq 0, \quad \varepsilon|G| + \delta = 0, \\ R &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h + \sum_{h \in G} r(h)h, \quad r(h) = \varepsilon(h)/\delta. \end{aligned}$$

Справедливость леммы 2 проверяется непосредственными расчётами.

2. Основные результаты

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть цепь Маркова Γ имеет матрицу переходных вероятностей $\pi = ||p(g, h)||$, для характеристических функций строк которой выполнены следующие условия:

- 1) $p(0) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h + \sum_{h \in G} \varepsilon(h)h$, $|\varepsilon(h)| < (1/|G|)^4 (1/M)^2$, $\sum_{h \in G} \varepsilon(h) = 0$;
- 2) $p(g) = p(0)f(g)$, $g \in G$,

где $f(g) = \sum_{h \in G} f(g, h)h$ — заданный гомоморфизм группы G в группу мультипликативно обратимых элементов кольца DG ; M — максимальное значение абсолютных величин коэффициентов $f(g, h)$, $g, h \in G$.

Тогда существует разложение $p(0) = p^{(1)}(0)p^{(2)}(0)$, при котором цепь Γ представляется суммой цепей $\Gamma = \Gamma^{(1)} + \Gamma^{(2)}$ с матрицами переходных вероятностей $\pi^{(i)} = ||p^{(i)}(g, h)||$, $g, h \in G$, $i = 1, 2$, характеристические функции строк которых имеют вид

$$p^{(i)}(g) = p^{(i)}(0)f(g), \quad g \in G, \quad i = 1, 2.$$

Доказательство. В соответствии с леммой 2 для характеристической функции $p(0)$ справедливо разложение

$$\begin{aligned} p(0) &= p^{(1)}(0)p^{(2)}(0) = L \cdot R, \\ L &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h + \sum_{h \in G} \varepsilon \cdot h + \delta \cdot 0, \quad \varepsilon \neq 0, \quad \delta \neq 0, \quad \varepsilon|G| + \delta = 0, \\ R &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h + \sum_{h \in G} r(h)h, \quad r(h) = \varepsilon(h)/\delta. \end{aligned}$$

Положим в данном разложении

$$|\varepsilon| = (1/|G|)^3(1/M). \quad (2)$$

Тогда

$$|\delta| = |\varepsilon| \cdot |G| = (1/|G|)^2(1/M), \quad |\varepsilon + \delta| = |\varepsilon|(|G| - 1) < (1/|G|)^2(1/M); \quad (3)$$

$$|r(h)| = |\varepsilon(h)/\delta| < (1/|G|)^4(1/M)^2\delta^{-1} = (1/|G|)^2(1/M). \quad (4)$$

Из соотношений (2)–(4) следует, что при указанном выборе параметра ε каждая из функций $p^{(j)}(0)$, $j = 1, 2$, удовлетворяет условиям леммы 1. Тем самым при любом $g \in G$ элемент $p^{(j)}(0)f(g)$ является вероятностным. Теперь справедливость теоремы вытекает из теоремы 2. ■

Следующее утверждение показывает, что разложение $\Gamma = \Gamma^{(1)} + \Gamma^{(2)}$ в условиях теоремы 3 является неоднозначным.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда существует бесконечное множество разложений $p(0) = p^{(1)}(0)p^{(2)}(0)$, при каждом из которых цепь Γ представляется суммой цепей $\Gamma = \Gamma^{(1)} + \Gamma^{(2)}$ с матрицами переходных вероятностей

$$\pi^{(i)} = ||p^{(i)}(g, h)||, \quad g, h \in G, \quad i = 1, 2,$$

характеристические функции строк которых имеют вид

$$p^{(i)}(g) = p^{(i)}(0)f(g), \quad g \in G, \quad i = 1, 2.$$

Доказательство. Пусть в представлении

$$p(0) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h + \sum_{h \in G} \varepsilon(h)h, \quad |\varepsilon(h)| < (1/|G|)^4(1/M)^2, \quad \sum_{h \in G} \varepsilon(h) = 0$$

имеет место $0 < \beta < \max_{h \in G} \{|\varepsilon(h)|\} / ((1/|G|)^4(1/M)^2) < 1$. Пусть α — произвольное фиксированное число, $\beta < \alpha < 1$. В соответствии с леммой 2 для характеристической функции $p(0)$ справедливо разложение

$$\begin{aligned} p(0) &= p^{(1)}(0)p^{(2)}(0) = L \cdot R, \\ L &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h + \sum_{h \in G} \varepsilon \cdot h + \delta \cdot 0, \quad \varepsilon \neq 0, \quad \delta \neq 0, \quad \varepsilon|G| + \delta = 0, \\ R &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h + \sum_{h \in G} r(h)h, \quad r(h) = \varepsilon(h)/\delta. \end{aligned} \quad (5)$$

Положим в разложении (5)

$$|\varepsilon| = (1/|G|)^3(1/M)\alpha. \quad (6)$$

Тогда

$$|\delta| = |\varepsilon| \cdot |G| = (1/|G|)^2(1/M)\alpha, \quad |\varepsilon + \delta| = |\varepsilon|(|G| - 1) < (1/|G|)^2(1/M)\alpha; \quad (7)$$

$$|r(h)| = |\varepsilon(h)/\delta| < \beta(1/|G|)^4(1/M)^2\delta^{-1} = (\beta/\alpha)(1/|G|)^2(1/M). \quad (8)$$

Из соотношений (6)–(8) следует, что при указанном выборе параметра ε каждая из функций $p^{(j)}(0)$, $j = 1, 2$, удовлетворяет условиям леммы 1. Тем самым при любом $g \in G$ элемент $p^{(j)}(0)f(g)$ является вероятностным. Следовательно, учитывая теорему 2, исходная цепь Γ является суммой цепей $\Gamma = \Gamma^{(1)} + \Gamma^{(2)}$ с матрицами переходных вероятностей

$$\pi^{(i)} = ||p^{(i)}(g, h)||, \quad g, h \in G, \quad i = 1, 2,$$

характеристические функции строк которых имеют вид

$$p^{(i)}(g) = p^{(i)}(0)f(g), \quad g \in G, \quad i = 1, 2.$$

При этом различные параметры α ($\beta < \alpha < 1$) отвечают разным матрицам $\pi^{(i)}$ переходных вероятностей. ■

3. Заключительные замечания

Отметим, что из разложения $p(0) = p^{(1)}(0)p^{(2)}(0)$ и вероятностности многочленов $p(0)f(g)$, $g \in G$, не всегда «автоматически» следует вероятностность всех многочленов $p^{(j)}(0)f(g)$, $j = 1, 2$. Об этом свидетельствует следующий пример. Рассмотрим группу $G = \mathbb{Z}_m = \{0, 1, 2, 3\}$ вычетов по модулю $m = 4$. В этом случае кольцо DG есть кольцо многочленов $D[x]/(x^4 - 1)$ по модулю многочлена $x^4 - 1$. И соответственно вероятностные элементы кольца DG принимают вид многочленов

$$p = \sum_{h \in G} p(h)h = \sum_{j \in \mathbb{Z}_m} p(j)x^j = p(0) + p(1)x + p(2)x^2 + p(3)x^3.$$

Рассмотрим вероятностные многочлены

$$p = p(x) = p^{(1)}(x)p^{(2)}(x),$$

$$p^{(1)}(x) = p^{(2)}(x) = (1/2 + \varepsilon) + (1/2 - \varepsilon)x, \quad 0 < \varepsilon < 1/2(\sqrt{2} - 1),$$

а также гомоморфизм f группы $\mathbb{Z}_m$ в группу мультипликативно обратимых элементов кольца $D[x]/(x^4 - 1)$:

$$f(m) = \theta^m, \quad \theta = 1/2(1 + x + x^2 + x^3) - 1, \quad m \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Так как $p^{(1)}(x)\theta = -\varepsilon + \varepsilon x + 1/2 \cdot x^2 + 1/2 \cdot x^3$, многочлен $p^{(1)}(x)f(1)$ не является вероятностным. В то же время любой многочлен $p(x)f(m)$ является вероятностным в силу того, что

$$1) \quad \theta^2 = 1;$$

$$2) \quad \text{все коэффициенты многочлена } p(x) = (1/2 + \varepsilon)^2 + (1/2 - 2\varepsilon^2)x + (1/2 - \varepsilon)^2x^2 \text{ меньше } 1/2;$$

$$3) \quad p(x)\theta = 1/2(1 + x + x^2 + x^3) - p(x).$$

Результаты данной работы являются развитием аналогичного сорта результатов относительно разложимых законов распределения на конечной абелевой группе (см., например, [5]) и могут быть полезны при оценке возможностей восстановления параметров исходных цепей Маркова, поступающих в узел суммирования, по результирующей последовательности. Такого сорта задачи возникают при построении и исследовании свойств генераторов случайных последовательностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рожков М. И. О суммировании цепей Маркова на конечной группе // Труды по дискретной математике. 2000. Т. 3. С. 195–214.
2. Рожков М. И. Суммирование марковских последовательностей на конечной абелевой группе // Дискретная математика. 2010. Т. 22. № 3. С. 44–62.
3. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. М.: Наука, 1970.
4. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969. 688 с.
5. Воробьев Н. Н. Сложение независимых случайных величин на конечных абелевых группах // Математический сб. 1954. Т. 34(76). № 1. С. 89–126.

REFERENCES

1. Rozhkov M. I. O summirovanii cepej Markova na konechnoj gruppe. Trudy po Diskretnoi Matematike, 2000, vol. 3, pp. 195–214. (in Russian)
2. Rozhkov M. I. Summirovanie markovskih posledovatel'nostej na konechnoj abelevoj gruppe. Diskretnaya Matematika, 2010, vol. 22, no. 3, pp. 44–62. (in Russian)
3. Kemeni Dzh., Snell Dzh. Konechnye cepi Markova. Moscow, Nauka Publ., 1970. (in Russian)
4. Kjerdis Ch., Rajner I. Teorija predstavlenij konechnyh grupp i associativnyh algebr. Moscow, Nauka Publ., 1969. 688 p. (in Russian)
5. Vorob'ev N. N. Slozhenie nezavisimyh sluchajnyh velichin na konechnyh abelevykh gruppah. Matematicheskii Sb., 1954, vol. 34(76), no. 1, pp. 89–126. (in Russian)