

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УДК 519.17

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЧИСЕЛ k -ДОЛЬНЫХ ГРАФОВ

Р. М. Ганопольский

Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Россия

Рассматривается специальный вид экспоненциальных производящих функций последовательности чисел k -дольных графов. Эти функции учитывают количество вершин в каждой доле. Выводится соотношение, являющееся вариацией экспоненциальной теоремы для этих производящих функций. Делается вывод о возможности обобщения полученного соотношения для гиперграфов и мультиграфов. Анализируются полученные выражения и их упрощённые частные случаи. Рассматриваются варианты практического применения соотношений и частных случаев в физике и математике.

Ключевые слова: k -дольный граф, гиперграф, мультиграф, связные графы, покрытие, производящие функции, экспоненциальная теорема.

DOI 10.17223/20710410/27/9

THE EXPONENTIAL GENERATING FUNCTIONS FOR SEQUENCE
OF THE NUMBERS OF k -PARTITE GRAPHS

R. M. Ganopolsky

*Tyumen State University, Tyumen, Russia***E-mail:** rodion@utmn.ru

A specific kind of exponential generating functions for the sequence of the numbers of k -partite graphs is considered. These functions take into account the numbers of vertices in each part. A relation is obtained for such generating functions. This relation is a variant of the exponential theorem for these generating functions. It is concluded that it is possible to generalize the obtained relation for hypergraphs and multigraphs. The obtained expression and its simplified special cases are analyzed. The applications of the relations and special cases in physics and mathematics are considered.

Keywords: k -partite graph, hypergraph, multigraph, connected graph, cover, generating functions, exponential theorem.

Введение

Граф G с множеством вершин V ($|V| = n$) называется k -дольным графом, если вершины графа разбиты на k непересекающихся непустых подмножества V_i так, что

$$\bigcup_{i=1}^k V_i = V; \quad V_i \neq \emptyset; \quad |V_i| = n_i > 0; \quad V_i \cap V_j = \emptyset, \quad i, j = 1, \dots, k, \quad i \neq j,$$

и нет рёбер, соединяющих вершины одного и того же подмножества [1–3]. При этом 1-дольный граф — это множество вершин без рёбер, а 0-дольным графом является только пустой граф. Очевидно, что любой k -дольный граф при $k < n$ можно преобразовать в $(k + 1)$ -дольный, разбив вершины на большее количество подмножеств. В общем случае k -дольный граф ($k > 0$) состоит из $s \geq 1$ компонент связности, каждая из которых является связным l_i -дольным графом ($i = 1, \dots, s, l_i = 1, \dots, k$).

Определим множество X как множество номеров долей графа:

$$X = \{1, 2, \dots, k\}. \quad (1)$$

Множество номеров долей любой из компонент связности графа является подмножеством X . Мощность этого подмножества равна количеству долей компоненты связности. Так как несколько различных компонент связности графа могут иметь совпадающие множества номеров долей, семейство всех множеств номеров долей всех компонент связности k -дольного графа может содержать повторяющиеся подмножества и в общем случае является повторяющимся покрытием множества X . Для того чтобы избавиться от повторяющихся подмножеств, введём следующее понятие.

Пусть набор связных l -дольных графов ($0 < l \leq k$) — это все компоненты связности исходного графа, множества (мощности l) номеров долей которых тождественны. Любой несвязный k -дольный граф можно разбить на наборы связных l_i -дольных графов. Каждый набор определяется уникальным множеством номеров долей. У двух любых наборов множества номеров их долей отличаются. Тогда семейство множеств номеров долей наборов связных l_i -дольных графов является неповторяющимся покрытием множества X .

В работе [4] введены комбинаторные числа неупорядоченных покрытий конечного множества мощности n подмножествами с фиксированными мощностями

$${}_n N(k_1, k_2, \dots, k_n), \quad (2)$$

где k_i — количество подмножеств мощности i в покрытии. В случае, когда часть коэффициентов $k_i = 0$, используется альтернативное обозначение

$${}_n N_{l_1 l_2 \dots l_m}^{k_1 k_2 \dots k_m},$$

где k_i — количество подмножеств мощности l_i в покрытии. Если все подмножества в покрытии имеют мощность l , то коэффициент имеет вид ${}_n N_l^k$.

В работах [5, 6] рассматриваются производящие функции последовательности чисел (2):

обычная

$$F(x; A_1, A_2, A_3, \dots) = \sum_{j \geq 0} x^j \sum_{k=0}^j C_j^k (-1)^k \prod_{i=1}^{j-k} (1 + A_i)^{C_{j-k}^i} = \sum_{j \geq 0} \frac{x^j \prod_{i=1}^j (1 + A_i)^{C_j^i}}{(1 + x)^{j+1}} \quad (3)$$

и экспоненциальная

$$E(x; A_1, A_2, A_3, \dots) = \sum_{j \geq 0} \frac{x^j}{j!} \sum_{k=0}^j C_j^k (-1)^k \prod_{i=1}^{j-k} (1 + A_i)^{C_{j-k}^i} = e^{-x} \sum_{j \geq 0} \frac{x^j}{j!} \prod_{i=1}^j (1 + A_i)^{C_j^i}. \quad (4)$$

Числа (2) в этих функциях являются коэффициентами перед мономами $x^n \prod_i A_i^{k_i}$ в случае обычной производящей функции и перед выражением $\frac{x^n}{n!} \prod_i A_i^{k_i}$ — в случае экспоненциальной. В разложении функции E по степеням x выражения перед $\frac{x^n}{n!}$ (для

функции F — перед x^n) являются производящими функциями последовательности чисел (2) с фиксированным n :

$$\sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \prod_{i=1}^{n-k} (1 + A_i)^{C_{n-k}^i}.$$

Для введённых комбинаторных чисел в работе [4] получена формула

$${}_n N_{l_1 l_2 \dots l_m}^{k_1 k_2 \dots k_m} = \prod_{i=1}^m C_{C_n^{l_i}}^{k_i} + \sum_{i \geq 1} (-1)^i C_n^i \prod_{j=1}^m C_{C_{n-i}^{l_j}}^{k_j},$$

где $C_j^i = \frac{j!}{i!(j-i)!}$ — биномиальный коэффициент. Там же получено значение суммы чисел покрытий, состоящих из множеств одной мощности

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} {}_n N_l^k = \frac{(-1)^{k+l-1}}{kl}, \quad (5)$$

и значение суммы для случая, когда в покрытии подмножества разной мощности ($m > 1$)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} {}_n N_{l_1 l_2 \dots l_m}^{k_1 k_2 \dots k_m} = 0. \quad (6)$$

1. Экспоненциальные производящие функции

Экспоненциальную производящую функцию последовательности чисел наборов связных k -дольных графов по переменным $x_1, x_2, \dots, x_k$ (индексы переменных определяют номера долей) определим как

$$A_k(1, 2, \dots, k) = \sum_{n_i > 0} \frac{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}}{n_1! n_2! \dots n_k!} a_k(n_1, n_2, \dots, n_k), \quad (7)$$

а экспоненциальную производящую функцию последовательности чисел связных k -дольных графов как

$$D_k(1, 2, \dots, k) = \sum_{n_i > 0} \frac{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}}{n_1! n_2! \dots n_k!} d_k(n_1, n_2, \dots, n_k), \quad (8)$$

где a_k и d_k — соответственно числа наборов связных k -дольных графов и числа связных k -дольных графов, имеющих в каждой доле с номером i определённое количество n_i вершин. Сумма выполняется по $n_1 > 0, n_2 > 0, \dots, n_k > 0$, таким, что $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Параметрами функций являются номера долей графов. Если связные l -дольные графы являются компонентами k -дольного графа и $l < k$, то экспоненциальные производящие функции записываются следующим образом:

$$A_l(i_1, i_2, \dots, i_l) \text{ и } D_l(i_1, i_2, \dots, i_l), \text{ где } 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq k,$$

то есть множество номеров долей связных l -дольных графов и множество номеров долей набора связных l -дольных графов являются подмножествами множества X (1). Переменными функций A_l и D_l являются $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l}$.

Рассмотрим набор, состоящий из $m \geq 1$ связных k -дольных графов. Каждая доля исходного графа разбита на m непустых подмножеств. Каждое подмножество является

долей связного k -дольного графа. Пусть n_{ij} — мощность доли с номером i связного k -дольного графа с номером j . Очевидно,

$$\forall i, j (n_{ij} > 0); \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^m n_{ij} = n_i. \quad (10)$$

Количество разбиений множества мощности n_i на m непустых подмножеств равно

$$\frac{1}{m!} \sum_{\sum n_{ij}=n_i} \frac{n_i!}{\prod_{j=1}^m n_{ij}!},$$

где суммирование идёт по всем возможным значениям n_{ij} , удовлетворяющим соотношениям (9), (10); множитель $1/m!$ необходим, так как связные графы, образующие набор, неразличимы. Тогда числа a_k и d_k связаны формулой

$$a_k(n_1, n_2, \dots, n_k) = \sum_{m>0} \frac{\prod_{i=1}^k n_i!}{m!} \sum_{\sum n_{ij}=n_i} \prod_{j=1}^m \frac{1}{n_{1j}! n_{2j}! \dots n_{kj}!} d_k(n_{1j}, n_{2j}, \dots, n_{kj}),$$

где сумма идёт по всем возможным m -разбиениям k долей исходного графа.

Просуммировав по всем возможным n_i и поменяв порядок суммирования, с учётом (7) и (8) получим формулу для производящей функции последовательности чисел наборов k -дольных графов:

$$A_k = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{n_i>0} \sum_{\sum n_{ij}=n_i} \prod_{j=1}^m \frac{x_1^{n_{1j}} x_2^{n_{2j}} \dots x_k^{n_{kj}}}{n_{1j}! n_{2j}! \dots n_{kj}!} d_k(n_{1j}, n_{2j}, \dots, n_{kj}) = e^{D_k} - 1. \quad (11)$$

Вывод соотношения (11), как и сама формула, аналогичен выводу экспоненциальной формулы [1].

Экспоненциальную производящую функцию последовательности чисел k -дольных графов определим аналогично функциям (7) и (8):

$$F_k(1, 2, \dots, k) = \sum_{n_i>0} \frac{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}}{n_1! n_2! \dots n_k!} f_k(n_1, n_2, \dots, n_k), \quad (12)$$

где f_k — число k -дольных графов, имеющих в каждой доле (с номером i) определённое количество (n_i) вершин. Сумма выполняется по $n_1 > 0, n_2 > 0, \dots, n_k > 0$, таким, что $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Проведём преобразования, аналогичные выводу формулы (11). Учтём, что:

- 1) множество номеров долей набора связных k -дольных графов является подмножеством множества X (1), а семейство всех таких множеств номеров долей является покрытием множества X ;
- 2) так как множества номеров долей двух любых наборов связных k -дольных графов не равны друг другу, все наборы связных графов различимы. Значит, множитель $1/m!$ не нужен.

Таким образом, получаем

$$F_k = \sum_{S=\{U_\alpha\}} \prod_{U_\alpha} A_{|U_\alpha|}(U_\alpha), \quad (13)$$

где сумма идёт по всем покрытиям S множества X , а произведение — по всем подмножествам U_α , входящим в покрытие S . Применив соотношение (11), в итоге получаем

$$F_k = \sum_{S=\{U_\alpha\}} \prod_{U_\alpha} (\exp D_{|U_\alpha|} - 1). \quad (14)$$

Частные случаи:

$$\begin{aligned} F_0 &= 1, \\ F_1 &= A_1 = e^{x_1} - 1, \\ F_2 &= A_2(1, 2)(1 + A_1(1) + A_1(2)) + A_1(1)A_1(2) = e^{D_2(1,2)+x_1+x_2} - e^{x_1} - e^{x_2} + 1. \end{aligned}$$

Изначально на k -дольные графы G не было введено никаких ограничений. Из проведённых преобразований видно, что полученные соотношения являются верными для всех классов графов, удовлетворяющих следующим критериям:

- 1) если в класс входит k -дольный граф G , то в этот класс должны входить и все k -дольные графы, получаемые из G перестановками вершин в любой из k долей;
- 2) если в класс входит k -дольный граф, имеющий несколько компонент связности, то должны входить и все эти компоненты связности.

Обобщениями графов являются мультиграфы и гиперграфы. В гиперграфах одно ребро может соединять более двух вершин, а в мультиграфах между двумя вершинами может быть больше одного ребра (кратные рёбра) [1, 2]. Обобщением k -дольного графа является k -дольный гиперграф — вершины гиперграфа V разбиты на k непесекающихся непустых подмножеств V_i так, что нет рёбер, соединяющих вершины одного и того же подмножества. Аналогичные определения можно дать для k -дольного мультиграфа и k -дольного мультиграфа-гиперграфа (кратные рёбра соединяют более двух вершин). Вывод соотношений (11) и (14) для мультиграфов, гиперграфов и мультиграфов-гиперграфов эквивалентен выводу соотношений для экспоненциальной производящей функции последовательности чисел k -дольных графов.

2. Анализ функций

Приравняв в соотношении (14) все переменные x_i одной переменной x , получим

$$F_k = \sum_{i \geq 0} {}_kN(i_1, i_2, \dots, i_k) \prod_j A_j^{i_j} = \sum_{i \geq 0} {}_kN(i_1, i_2, \dots, i_k) \prod_j (e^{D_j} - 1)^{i_j}, \quad (15)$$

где ${}_kN(i_1, i_2, \dots, i_k)$ — комбинаторные числа (2), а суммирование идёт по всем $i_j \geq 0$; A_j и D_j являются функциями только от переменной x .

Используем (4) и (11):

$$F_k = \sum_{j=0}^k C_k^j (-1)^j \prod_{i=1}^{k-j} (1 + A_i)^{C_{k-j}^i} = \sum_{j=0}^k C_k^j (-1)^j \exp\left(\sum_{i=1}^{k-j} D_i C_{k-j}^i\right). \quad (16)$$

Просуммируем все функции F_k , домножив в одном случае на y^k , а в другом на $y^k/k!$, и воспользуемся соотношениями (3) и (4):

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} y^k F_k &= \sum_{k \geq 0} \frac{y^k \prod_{i=1}^k (1 + A_i)^{C_k^i}}{(1 + y)^{k+1}} = \sum_{k \geq 0} \frac{y^k \exp\left(\sum_{i=1}^k D_i C_k^i\right)}{(1 + y)^{k+1}}, \\ \sum_{k \geq 0} \frac{y^k F_k}{k!} &= e^{-y} \sum_{k \geq 0} \frac{y^k}{k!} \prod_{j=0}^k (1 + A_j)^{C_k^j} = e^{-y} \sum_{k \geq 0} \frac{y^k}{k!} \exp\left(\sum_{j=0}^k C_k^j D_j\right). \end{aligned}$$

Частные случаи формулы (16):

$$\begin{aligned} F_0 &= 1, \\ F_1 &= A_1 = e^x - 1, \\ F_2 &= A_2(1 + 2A_1) + A_1^2 = (A_2 + 1)(A_1 + 1)^2 - 2(A_1 + 1) + 1 = e^{D_2+2x} - 2e^x + 1, \\ F_3 &= (A_3 + 1)(A_2 + 1)^3(A_1 + 1)^3 - 3(A_2 + 1)(A_1 + 1)^2 + 3(A_1 + 1) - 1 = \\ &= e^{D_3+3D_2+3x} - 3e^{D_2+2x} + 3e^x - 1. \end{aligned}$$

Пусть есть функция $f(G)$, ставящая в соответствие каждому графу какое-то число. Для функции выполняются следующие условия:

- 1) значение функции от пустого графа равно 1;
- 2) значение функции от графа, имеющего несколько компонент связности, равно произведению значений функции от компонент связности;
- 3) значение функции не зависит от нумерации вершин, а значит, и от перестановок строк или столбцов в матрице смежности.

Примером такой функции является хроматическая функция [3].

Пусть необходимо найти сумму значений этой функции от всех дольных графов

$$S = \sum_k b_k \sum_{G_k} \frac{1}{|V_1|! \dots |V_k|!} f(G_k(V_1, \dots, V_k)) F_k(1, 2, \dots, k),$$

где суммирование идёт по всем k -дольным графам G_k , разбитым на k непустых долей V_i , а коэффициенты b_k — параметры суммы. Тогда из (12), (13), (15) и (16) следует

$$S = \sum_k b_k \sum_{i \geq 0} {}_kN(i_1, i_2, \dots, i_k) \prod_j \tilde{A}_j^{i_j} = \sum_k b_k \sum_{j=0}^k C_k^j (-1)^j \prod_{i=1}^{k-j} (1 + \tilde{A}_i)^{C_{k-j}^i},$$

где $\tilde{A}_j$ — сумма значений функции от всех наборов связных j -дольных графов: $\tilde{A}_j = e^{\tilde{D}_j} - 1$; $\tilde{D}_j$ — сумма значений функции от всех связных j -дольных графов.

Для $b_k = (-1)^k/k$ (без пустого графа) при учёте (5) и (6) сумма S примет вид

$$S = \sum_{k>0} \sum_{l>0} \frac{(-1)^{k+l-1}}{kl} \tilde{A}_l^k = \sum_{l>0} \frac{(-1)^l}{l} \ln(1 + \tilde{A}_l) = \sum_{l>0} \frac{(-1)^l}{l} \tilde{D}_l, \quad (17)$$

где мы воспользовались разложением в ряд натурального логарифма

$$\ln(1 + x) = \sum_{n>0} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

Таким образом, сумма значений функций от всех дольных графов с коэффициентом $(-1)^k/k$ (k — количество долей графа) равна сумме значений этой функции от всех связных дольных графов с этим же коэффициентом.

Заключение

В работе введён специальный вид экспоненциальной производящей функции последовательности чисел k -дольных графов. Выводится соотношение, являющееся обобщением экспоненциальной теоремы для данного вида экспоненциальных производящих функций. Анализируется полученное выражение. Определена связь между компонентами связности k -дольных графов и покрытиями множеств. Аналогично понятию

k -дольных графов вводится понятие k -дольных гиперграфов и мультиграфов. Делается вывод о возможности обобщения выражения для экспоненциальной производящей функции последовательности чисел k -дольных графов для случая k -дольных гиперграфов и мультиграфов.

Полученные результаты, в частности (16) и (17), могут быть использованы для упрощения оперирования с диаграммами Фейнмана в квантовой теории, диаграммами теории возмущений в теории струн [7] и статистической физике [8–10]. Диаграммы Фейнмана и их аналоги являются по сути k -дольными графами и мультиграфами, что позволяет применять методы теории графов для упрощения выражений и вычисления бесконечных рядов таких диаграмм. Полученные соотношения можно также использовать для анализа схем в схемотехнике, блок-схем в теории информационных систем, структур баз данных с сетевой моделью, криптостойкости алгоритмов в криптологии [11] и т. п.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. М.: Мир, 2005.
2. Харари Ф. Теория графов. М.: УРСС, 2003.
3. Уилсон Р. Введение в теорию графов. М.: Мир, 1977.
4. Ганопольский Р. М. Число неупорядоченных покрытий конечного множества подмножествами фиксированного размера // Прикладная дискретная математика. 2010. № 4(10). С. 5–17.
5. Ганопольский Р. М. Производящие функции последовательности чисел покрытий конечного множества // Прикладная дискретная математика. 2011. № 1(11). С. 5–13.
6. Ганопольский Р. М. Производящие функции последовательности чисел связных покрытий // Прикладная дискретная математика. 2013. № 3(21). С. 5–10.
7. Каку М. Введение в теорию суперструн. М.: Мир, 1999.
8. Фейнман Р. Статистическая механика. Курс лекций. М.: Мир, 1975.
9. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике. М.: Физматгиз, 1962.
10. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Статистическая физика. Ч. 2. М.: Наука, 1978.
11. Фомичев В. М. Методы дискретной математики в криптологии. М.: Диалог-МИФИ, 2010.

REFERENCES

1. Stenli R. Perechislitel'naja kombinatorika. Derev'ja, proizvodjashhie funkicii i simmetricheskie funkicii. Moscow, Mir Publ., 2005. (in Russian)
2. Harary F. Graph Theory. Addison-Wesley, Reading, 1994.
3. Uilson R. Vvedenie v teoriju grafov. Moscow, Mir Publ., 1977. (in Russian)
4. Ganopolsky R. M. Chislo neuporjadochennyh pokrytij konechnogo mnozhestva podmnozhestvami fiksirovannogo razmera. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2010, no. 4(10), pp. 5–17. (in Russian)
5. Ganopolsky R. M. Proizvodjashhie funkicii posledovatel'nosti chisel pokrytij konechnogo mnozhestva. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2011, no. 1(11), pp. 5–13. (in Russian)
6. Ganopolsky R. M. Proizvodjashhie funkicii posledovatel'nosti chisel svjaznyh pokrytij. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2013, no. 3(21), pp. 5–10. (in Russian)
7. Kaku M. Vvedenie v teoriju superstrun. Moscow, Mir Publ., 1999. (in Russian)
8. Fejnman R. Statisticheskaja mehanika. Kurs lekcij. Moscow, Mir Publ., 1975. (in Russian)

9. *Abrikosov A. A., Gor'kov L. P., Dzialoshinskij I. E.* Metody kvantovoj teorii polja v statisticheskoj fizike. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962. (in Russian)
10. *Lifshic E. M., Pitaevskij L. P.* Statisticheskaja fizika. P. 2. Moscow, Nauka Publ., 1978. (in Russian)
11. *Fomichev V. M.* Metody diskretnoj matematiki v kriptologii. Moscow, Dialog-MIFI Publ., 2010. (in Russian)