

УДК 519.628

**РЁБЕРНО-ВЕРШИННЫЕ ИНЦИДЕНТНЫЕ ПАРОСОЧЕТАНИЯ
В ЗАДАЧАХ РАСПИСАНИЙ¹**

А. М. Магомедов, Т. А. Магомедов

Дагестанский государственный университет, г. Махачкала, Россия

С использованием рёберно-вершинных инцидентных паросочетаний решена задача оптимизации расписания, исходные данные для которого представлены графом со степенями вершин не выше трёх.

Ключевые слова: *граф, паросочетание, расписание, оптимизация.*

DOI 10.17223/20710410/27/10

EDGE-VERTEX INCIDENT MATCHINGS IN SCHEDULING

А. М. Magomedov, Т. А. Magomedov

*Dagestan State University, Makhachkala, Russia***E-mail:** magomedtagirl@yandex.ru

The optimization problem for schedules represented by means of graphs with maximal vertex degree 3 is solved by using the edge-vertex incident matchings.

Keywords: *graph matching, scheduling, optimization.*

Введение

Все использованные в данной работе, но не определенные в ней обозначения и понятия соответствуют принятым в [1]. Множества вершин и рёбер графа G будем обозначать $V(G)$ и $E(G)$ соответственно, степень вершины v и максимальную степень вершины графа — $d_G v$ и $\Delta(G)$. Для цикломатического числа $|E(G)| - |V(G)| + 1$ связного графа G примем обозначение $\gamma(G)$.

Разные содержательные аспекты проблемы оптимизации расписания не раз освещались в литературе, начиная с известной NP-полной задачи «Составление учебного расписания» [2, с. 311]. Задача построения безоконных расписаний в общем виде относится к числу NP-полных задач. Принято считать, что существующих в настоящее время методов недостаточно, чтобы выяснить разрешимость NP-полных задач за полиномиальное время; более точно — проверить гипотезу $P \neq NP$. Поэтому выделение нетривиальных частных случаев NP-полных задач, разрешимых за полиномиальное время, заслуживает внимания, особенно когда они имеют практические приложения, как в нашем случае.

Укажем на сравнительно недавние результаты в данном направлении.

Для случая, когда количество занятий в каждом классе равно пяти, а количество занятий каждого учителя — двум, условия существования расписания длины 5

¹Работа поддержана проектом № 2014/33 на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности в рамках базовой части госзадания Минобрнауки России, а также ОМИ ДНЦ РАН.

без окон для учителей получены в [3]. Здесь и далее под *длиной расписания* понимается продолжительность времени (в академических часах) от начала первого занятия до завершения последнего занятия расписания (считается, что продолжительность занятия равна одному академическому часу).

Связный граф G будем называть *примитивом*, если $\gamma(G) \leq 1$ и $\Delta(G) = 3$. Пусть G — связный граф, такой, что $\Delta(G) = 2p + 1$, $p \in \mathbb{Z}^+$. Разбиение графа G на p рёберно-непересекающихся примитивов G_i ($i = 1, \dots, p$) будем называть *сбалансированным разбиением на примитивы*, если для каждой вершины v графа G и для каждого $i = 1, \dots, p$ в примитив G_i включены $\lceil d_G v / p \rceil$ либо $\lfloor d_G v / p \rfloor$ рёбер, инцидентных вершине v . Сбалансированные разбиения на примитивы востребованы в задачах оптимизации расписаний и интервальных раскрасок графов.

Теорема 1 [4]. Пусть G — связный граф, $\Delta(G) = 2p + 1$ ($p \in \mathbb{Z}^+$). Граф G допускает сбалансированное разбиение на примитивы тогда и только тогда, когда для каждого подграфа G' графа G справедливо неравенство

$$|E(G')| \leq p|V(G')|. \quad (1)$$

Теорема 2 [5]. Проверка условий (1) для всех подграфов графа G может быть выполнена за время $O(|V(G)|^3 \log |V(G)|)$.

Из теоремы 1 видна актуальность рассмотрения случая, когда граф G является примитивом. Этому случаю и посвящена настоящая работа. Найдены эффективно проверяемые необходимые и достаточные условия существования безоконного расписания длины 3. Показано применение рёберно-вершинных инцидентных паросочетаний к решению задачи оптимизации расписания.

1. Рёберно-вершинные инцидентные паросочетания и безоконные расписания

Пусть исходные данные к школьному расписанию учебных занятий заданы связным графом G , $\Delta(G) = 3$; каждое ребро e соответствует учителю $t = t(e)$, а концевые вершины ребра e — классам $c_1(t)$ и $c_2(t)$, в каждом из которых учитель t должен провести по одному занятию. Требуется выяснить существование расписания длины 3, в котором учителя и классы не имеют окон.

Инъективное отображение $E(G) \rightarrow V(G)$ множества рёбер графа в множество вершин, такое, что каждое ребро отображается в одну из своих инцидентных вершин, называется *рёберно-вершинным инцидентным паросочетанием* (*p -vip*) графа G . Понятно, что для существования у графа G *p -vip* необходимо выполнение неравенства $|E(G)| \leq |V(G)|$, равносильного, очевидно, неравенству

$$\gamma(G) \leq 1. \quad (2)$$

Другими словами, для существования *p -vip* необходимо, чтобы граф G содержал не более одного цикла. Покажем, что это условие является и достаточным.

Рассмотрим два случая.

С л у ч а й 1: связный граф G содержит единственный цикл C .

Сориентировав рёбра цикла C , получим ориентированный цикл, для которого сохраним обозначение C . Каждой дуге цикла C сопоставим её концевую вершину, после чего удалим из G все такие вершины цикла C , для которых $d_G v = 2$.

Если граф G является циклом, искомое *p -vip* построено. В противном случае рассмотрим лес T , который получится после процедуры удаления. Заметим, что каждое

из деревьев t , образующих лес T , имеет точно одну вершину r_t , общую с циклом C ; выбрав r_t в качестве корня дерева t , сориентируем рёбра дерева так, чтобы получить ориентированное корневое дерево; затем каждой дуге сопоставим её концевую вершину. В результате получим искомое p -вин.

С л у ч а й 2: связный граф G является деревом. Для построения p -вин достаточно применить к G рассуждения, приведённые в предыдущем абзаце для дерева t .

Замечание 1. За исключением тривиального случая, когда G является деревом, построенное отображение является биекцией: в нём участвует не только каждая дуга, но и каждая вершина.

Таким образом, доказано следующее

Утверждение 1. Условие (2) необходимо и достаточно для существования p -вин у графа G .

Замечание 2. Заметим, что ограничение $\Delta(G) = 3$ в доказательстве утверждения не использовано; другими словами, утверждение 1 справедливо для любого $\Delta(G)$. Вопросы существования p -вин и других близких по смыслу паросочетаний рассмотрены в [1, с. 93–94].

Набор пар вида «учитель–класс», индуцированный построенным p -вин, составляет второе по порядку из трёх занятий искомого расписания; во втором занятии задействованы все учителя и все классы (кроме тривиального исключения; см. замечание 1).

Любая корректная достройка построенной части расписания до всего расписания приведёт к искомому расписанию без окон. Для выполнения достройки заметим, что в результате упомянутых выше ориентаций рёбер у каждой невисячей вершины орграфа G имеются либо два потомка («левый» и «правый»), либо единственный потомок («левый»). Рассмотрим класс c , соответствующий вершине u : если вершина v — левый потомок вершины u , то в качестве первого занятия классу c назначим занятие с учителем $a = (u, v)$; если вершина u обладает также и правым потомком w , то в качестве третьего занятия назначим классу c занятие с учителем $b = (u, w)$. Таким образом, доказана следующая

Теорема 3. Для существования беззаконного расписания длины 3, соответствующего связному графу G с $\Delta(G) = 3$, необходимо и достаточно выполнение условия $\gamma(G) \leq 1$.

Следствие 1. Пусть условие (2) выполнено. Если G не является деревом, то существует беззаконное расписание длины 3, во втором занятии которого задействованы не только все учителя (для беззаконного расписания длины 3 с двумя занятиями у каждого учителя это свойство, очевидно, всегда выполнено), но и все классы. Если G — дерево, v_0 — произвольно выбранная вершина G , а c_0 — класс, соответствующий вершине v_0 , то существует беззаконное расписание длины 3, во втором занятии которого задействованы все учителя и все классы, отличные от c_0 .

Следствие 2. Если условие (2) выполнено, то существует беззаконное расписание длины 3, где третье занятие проводится лишь в тех классах, которые соответствуют вершинам степени 3.

Заключение

Условия существования p -вин получены новым (по сравнению с [1]) способом. В теореме 3 выявлена связь p -вин с существованием беззаконного расписания длины 3. Дополнение теорем 1 и 2 теоремой 3 открывает перспективы для исследования условий существования беззаконных расписаний (нечётной длины) в общем случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Оре О.* Теория графов. М.: Наука, 1980.
2. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
3. *Магомедов А. М., Магомедов Т. А.* Интервальная на одной доле правильная рёберная 5-раскраска двудольного графа // Прикладная дискретная математика. 2011. № 5. С. 85–91.
4. *Магомедов А. М., Сапоженко А. А.* Условия существования непрерывных расписаний длительности пять // Вестник МГУ. Сер. Вычислительная математика и кибернетика. 2010. № 1. С. 39–44.
5. *Магомедов А. М., Магомедов Т. А.* О приложении алгоритма вычисления подграфа максимальной плотности к задаче оптимизации расписания // Матзаметки. 2013. Т. 93. № 2. С. 313–315.

REFERENCES

1. *Ore O.* Teorija grafov. Moscow, Nauka Publ., 1980. (in Russian)
2. *Geri M., Johnson D.* Vychislitel'nye mashiny i trudnoreshaemye zadachi. Moscow, Mir Publ., 1982. (in Russian)
3. *Magomedov A. M., Magomedov T. A.* Interval'naja na odnoj dole pravil'naja rjobernaja 5-raskraska dvudol'nogo grafa. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2011, no. 5, pp. 85–91. (in Russian)
4. *Magomedov A. M., Sapozhenko A. A.* Uslovija sushhestvovanija nepreryvnyh raspisanij dlitel'nosti pjat'. Vestnik MSU. Ser. Vychislitel'naya Matematika i Kibernetika, 2010, no. 1, pp. 39–44. (in Russian)
5. *Magomedov A. M., Magomedov T. A.* O prilozhenii algoritma vychislenija podgrafa maksimal'noj plotnosti k zadache optimizacii raspisanija. Matzametki, 2013, vol. 93, no. 2, pp. 313–315. (in Russian)