УДК 519.171.2 + 519.175

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ГРАФОВ В ВИДЕ ГРУППОИДОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

М. Н. Назаров

Национальный исследовательский университет «МИЭТ», г. Москва, Россия

Рассмотрен альтернативный способ задания графов путём представления множества вершин графа в виде группоида. Для полученных группоидов описаны конгруэнции, идеалы и подалгебры, а также установлено, когда они являются полугруппами. Дополнительно к этому рассмотрено практическое применение группоидов графов для сжатия данных.

Ключевые слова: *алгебраическая теория графов, группоид графа, конгруэнции на графе, идеалы графа, компактное хранение графа.*

DOI 10.17223/20710410/27/11

ON THE REPRESENTATION OF GRAPHS IN THE FORM OF A SPECIAL TYPE OF BINARY ALGEBRA

M. N. Nazarov

National Research University of Electronic Technology, Moscow, Russia

E-mail: Nazarov-Maximilian@yandex.ru

An alternative way to define graphs as binary algebras on a set of vertices is considered. For the resulting algebras, we describe congruences, ideals and subalgebras, and obtain criterion for such a graph algebra to be a semigroup. In addition, we consider a practical application of graph algebras for data compression.

Keywords: *algebraic graph theory, graph algebra, congruence and ideal on graph, compact storage of graphs.*

Введение

Рассмотрим только конечные классические графы, исключая все остальные случаи: ориентированные, кратные, а также графы с петлями и бесконечным числом вершин.

Определение 1. *Классическим графом* (или просто *графом*) будем называть пару $G = (V, E)$, где множество вершин V — любое конечное множество; множество рёбер $E \subseteq V \times V$ — бинарное отношение, для которого выполняется:

1) $\forall a, b \in V \quad ((a, b) \in E \Rightarrow (b, a) \in E)$ — отношение симметрично;
2) $\forall a \in V \quad ((a, a) \notin E)$ — отношение антирефлексивно.

Фактически это означает, что из рассмотрения исключаются рёбра-петли (b, b), а все остальные рёбра $(a, b) \in E$ можно считать неупорядоченными парами.

Определение 2. Пусть $G = (V, E)$ — произвольный[1] граф. Назовём *частичным группоидом* графа множество $(V, \cdot)$, определив операцию как

$$\begin{cases} a \cdot b = a, & \text{если } (a, b) \in E, \\ a \cdot b = \theta, & \text{если } (a, b) \notin E. \end{cases} \tag{1}$$

Группоиды вида (1) впервые предложены в работе [1] в 1983 г. и впоследствии нашли широкое применение на стыке теории графов и других математических дисциплин, таких, как алгебра [2, 3], теория языков и автоматов [4], топология [5]. Однако у данного определения есть ряд недостатков, которые делают его менее ценным с алгебраической точки зрения; в частности, не представляется возможным связать понятие конгруэнции с нетривиальными свойствами структуры графов. Для преодоления этого недостатка предлагается альтернативное определение группоида для классических графов.

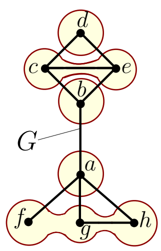
Определение 3. Пусть $G = (V, E)$ — классический граф. Будем называть множество $(V, \circ)$ *группоидом классического графа*, определив операцию как

$$\begin{cases} a \circ b = a, & \text{если } (a, b) \in E, \\ a \circ b = b, & \text{если } (a, b) \notin E. \end{cases} \tag{2}$$

Замечание 1. Отметим, что по группоиду $(V, \circ)$, заданному на основе (2), можно восстановить как граф без петель, так и граф, у которого все вершины имеют петли, так как все вершины являются идемпотентами: $a \circ a = a$. Поскольку рассматриваются только классические графы, случай с петлями $(a, a) \in E$ отбрасывается.

1. Общие алгебраические свойства группоидов графов

Напомним, что конгруэнцией на группоиде называется такое отношение эквивалентности ρ, которое сохраняет операцию: $\forall a, b, c\ ((a, b) \in \rho \Rightarrow (ac, bc) \in \rho \wedge (ca, cb) \in \rho)$. Классом $[a]$ конгруэнции ρ называется множество $[a] = \{a^* : (a, a^*) \in \rho\}$. Понятие конгруэнции определено для произвольной алгебраической системы; в частности, можно его применить для группоидов $(V, \circ)$. В этом случае конгруэнция ρ задаёт разбиение множества вершин V графа на классы эквивалентности (пример такого разбиения см. на рис. 1).



G	a	b	c	d	e	f	g	h
a	0	**1**	0	0	0	**1**	**1**	**1**
b	**1**	0	**1**	0	**1**	0	0	0
c	0	**1**	0	**1**	**1**	0	0	0
d	0	0	**1**	0	**1**	0	0	0
e	0	**1**	**1**	**1**	0	0	0	0
f	**1**	0	0	0	0	0	0	0
g	**1**	0	0	0	0	0	0	**1**
h	**1**	0	0	0	0	0	**1**	0

Рис. 1. Пример конгруэнции на группоиде графа с классами $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c, e\}$, $\{d\}$, $\{f, g, h\}$

Теорема 1. Пусть $G = (V, E)$ — произвольный классический граф. Тогда для любого элемента $c \in V$ и любого класса $[a]$ произвольной конгруэнции ρ выполняется одно из трёх условий:

1) $c \in [a]$;

[1]Данное определение применимо и для графов с петлями, а также для ориентированных.

2) $(c, a^*) \in E$ для всех $a^* \in [a]$;
3) $(c, a^*) \notin E$ для всех $a^* \in [a]$.

Доказательство. По определению конгруэнции для любых вершин графа выполняется $(a, b) \in \rho \Rightarrow (a \circ c, b \circ c) \in \rho \wedge (c \circ a, c \circ b) \in \rho$. Рассмотрим все варианты значений произведений $a \circ c$ и $b \circ c$ на группоиде графа и проверим, когда эти значения лежат в одном классе конгруэнции ρ.

Случай 1: обе пары вершин связаны рёбрами: $(a, c) \in E$ и $(b, c) \in E$. В этом случае $a \circ c = a$ и $b \circ c = b$, и поскольку $(a, b) \in \rho$, результаты умножения лежат в одном классе без дополнительных ограничений. Если рассмотрим другой элемент $d \in [a]$, то, с одной стороны, при $d \circ c = d$ получим $(d, c) \in E$ без дополнительных условий на ρ. С другой стороны, в случае $d \circ c = c$ получаем, что ρ является конгруэнцией тогда и только тогда, когда $(a \circ c, d \circ c) = (a, c) \in \rho$. Продолжая итерационно процесс для всех элементов класса $[a]$ конгруэнции ρ, получим, что либо на каком-то шаге $c \in [a]$, либо для всех $a^* \in [a]$ выполняется $(c, a^*) \in E$.

Случай 2: $(a, c) \in E$ и $(b, c) \notin E$. Тогда $a \circ c = a$ и $b \circ c = c$. Как следствие, результаты будут в одном классе конгруэнции, только если $(a, c) \in \rho$. По определению получаем, что $c \in [a]$.

Случай 3: $(a, c) \notin E$ и $(b, c) \in E$. Этот вариант полностью аналогичен случаю 2, за тем лишь исключением, что необходимо потребовать, чтобы $(b, c) \in \rho$. Пользуясь транзитивностью отношения ρ, вновь получаем, что $c \in [a]$.

Случай 4: $(a, c) \notin E$ и $(b, c) \notin E$. По определению получаем $a \circ c = b \circ c = c$, и так как $(c, c) \in \rho$, не требуется дополнительных ограничений для того, чтобы произведения $a \circ c$ и $b \circ c$ лежали в одном классе конгруэнции. Если рассмотрим другой элемент $d \in [a]$, то, с одной стороны, при $d \circ c = c$ получим $(d, c) \notin E$ без дополнительных условий на ρ. С другой стороны, в случае $d \circ c = d$ получаем, что ρ есть конгруэнция тогда и только тогда, когда $(a \circ c, d \circ c) = (c, d) \in \rho$. Продолжая итерационно процесс для всех элементов класса $[a]$ конгруэнции ρ, получим, что либо на каком-то шаге $c \in [a]$, либо для всех $a^* \in [a]$ имеет место $(c, a^*) \notin E$.

Рассмотрев все четыре возможных значения для произведений $c \circ a$ и $c \circ b$, получим в точности аналогичный результат. ∎

Напомним, что правыми конгруэнциями называются такие отношения эквивалентности ρ, для которых выполняется $\forall a, b, c\ ((a, b) \in \rho \Rightarrow (ac, bc) \in \rho)$, а левыми — такие отношения эквивалентности μ, для которых $\forall a, b, c\ ((a, b) \in \mu \Rightarrow (ca, cb) \in \mu)$.

Следствие 1. На любом группоиде графа все левые конгруэнции являются одновременно правыми, а все правые — левыми.

Доказательство. Результат в доказательстве теоремы 1 получен независимо для случая умножения на c как слева, так и справа. Это означает, что структура классов не зависит от того, является ли конгруэнция правой или левой, а условие теоремы 1 выполняется для обоих типов конгруэнций. ∎

Определение 4. Пусть $G = (V, E)$ — классический граф, а ρ — конгруэнция на его группоиде. Назовём *фактор-графом* по ρ граф $G/\rho = (V_\rho, E_\rho)$, где

1) V_ρ — множество классов конгруэнции ρ;
2) $([a], [b]) \in E_\rho$ тогда и только тогда, когда $(a, b) \in E$.

Пример построения фактор-графа для конгруэнции ρ с классами $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c, e\}$, $\{d\}$, $\{f\}$, $\{h, g, k\}$, $\{l\}$ представлен на рис. 2.

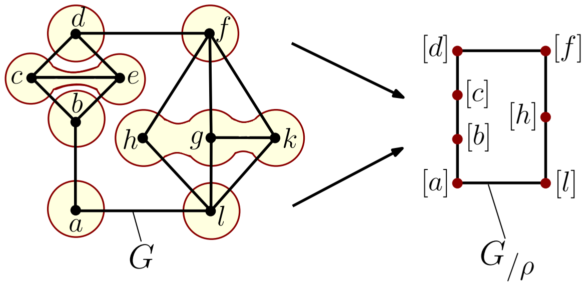


Рис. 2. Пример фактор-графа

Как известно, идеалом на группоиде $(D, \cdot)$ называется такое множество I, для которого любые произведения элементов группоида на элементы идеала лежат в идеале I. Можно по отдельности определить односторонние идеалы:

1) I_L — левый идеал, если $d \cdot i \in I_L$ для любых $d \in D$ и $i \in I_L$;
2) I_R — правый идеал, если $i \cdot d \in I_R$ для любых $d \in D$ и $i \in I_R$.

Понятия левого и правого идеалов можно, в частности, применить для группоидов графов $(V, \circ)$. На рис. 3 представлены примеры левых идеалов на G_1 и правых идеалов на G_2.

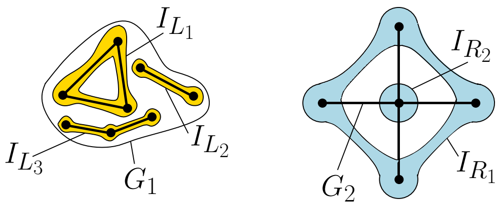


Рис. 3. Примеры левых и правых идеалов на графах

Напомним, что компонентой связности графа $G = (V, E)$ называется такое подмножество вершин $I \subseteq V$, что одновременно выполняются следующие два условия:

— любые две вершины $u, v \in I$ можно соединить путём;
— множество I максимально по включению.

Теорема 2. Минимальный по включению левый идеал I_L — это компонента связности графа. Любой другой левый идеал является объединением минимальных.

Доказательство. Компонента связности I_L является левым идеалом, так как вершины из I_L не связаны ни с одной другой вершиной графа $G = (V, E)$, и как следствие $V \circ I_L \subseteq I_L$ (примеры: $I_{L_1}, I_{L_2}, I_{L_3}$ на рис. 3). Если допустить, что существует меньший по включению идеал $I_L^* \subset I_L$, то найдётся вершина $u \in I_L \setminus I_L^*$, которая связана ребром с некоторой вершиной i из I_L^*. В результате получим противоречие с определением идеала: $u \circ i = u \notin I_L^*$.

Аналогично доказывается вторая часть теоремы. Если допустить, что произвольный левый идеал I_L — это не объединение компонент связности, то в множестве $V \setminus I_L$ найдётся вершина u, которая связана ребром хотя бы с одной вершиной i из предполагаемого идеала I_L: $u \circ i = u \notin I_L$. ■

Определение 5. Пусть дан граф $G = (V, E)$. Подмножество вершин $I \subset V$ будем называть *долей* графа G, если для любых $i \in I$ и $v \in V \setminus I$ верно, что $(i, v) \in E$.

Теорема 3. Минимальный по включению правый идеал I_R — это доля графа. Любой другой правый идеал является объединением долей графа.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 2. ■

Теорема 4. Любой произвольный левый I_L (правый I_R) идеал на графе является классом некоторой конгруэнции ρ.

Доказательство. В качестве классов конгруэнции ρ рассмотрим I_L, а остальные классы возьмём одноэлементными. Из теоремы 2 следует, что ни одна вершина из множества $V \setminus I_L$ не связана ребром ни с одной вершиной из идеала I_L. В результате получим корректное разбиение на классы, согласно теореме 1, и определяющее условие конгруэнции будет выполнено. Аналогично доказывается утверждение и для случая правых идеалов I_R, за той лишь разницей, что все вершины идеала I_R связаны со всеми вершинами из множества $V \setminus I_R$. ■

Следствие 2. У произвольного графа $G = (V, E)$ не может быть левого идеала $I \neq V$, который одновременно был бы правым.

Доказательство. Если допустить, что такой идеал I существует, то он одновременно является объединением компонент связности и объединением долей. Это возможно только в случае $V \setminus I = \varnothing$. ■

Теорема 5. Группоид графа G является полугруппой тогда и только тогда, когда G — это либо полный граф K_n, либо пустой граф O_n.

Доказательство. Необходимость очевидна, так как для полного графа K_n группоид $(V, \circ)$ является полугруппой левых нулей, а для O_n — полугруппой правых нулей.

Доказательство достаточности проведём перебором всех вариантов произведений для троек вершин a, b, c с проверкой на ассоциативность.

С л у ч а й 1: три вершины не связаны ни одним ребром: $(a, b) \notin E$, $(b, c) \notin E$, $(a, c) \notin E$. Ассоциативность выполняется: $a \circ (b \circ c) = c = (a \circ b) \circ c$.

С л у ч а й 2: три вершины связаны ровно одним ребром: $(a, b) \notin E$, $(b, c) \in E$, $(a, c) \notin E$. Ассоциативность нарушена, так как $a \circ (b \circ c) = c \neq b = (a \circ b) \circ c$.

С л у ч а й 3: три вершины связаны ровно двумя рёбрами: $(a, b) \in E$, $(b, c) \in E$, $(a, c) \notin E$. Ассоциативность также нарушена, так как $a \circ (b \circ c) = a \neq c = (a \circ b) \circ c$.

С л у ч а й 4: три вершины связаны тремя рёбрами: $(a, b) \in E$, $(b, c) \in E$, $(a, c) \in E$. Ассоциативность выполняется: $a \circ (b \circ c) = a = (a \circ b) \circ c$.

Таким образом, для любых трёх вершин графа для выполнения условия ассоциативности они должны быть либо соединены тремя рёбрами друг с другом, либо не соединены ни одним ребром. Подобное условие верно для всех вершин только в случае, если граф G является полным K_n либо пустым O_n. ■

Класс группоидов классических графов можно задать аксиоматически. Для этого достаточно потребовать выполнения следующих трёх аксиом:

аксиома 1: $\forall a \quad (a^2 = a)$ (идемпотентность);

аксиома 2: $\forall a, b \quad (a \neq b \Rightarrow ab \neq ba)$ (антикоммутативность);

аксиома 3: $\forall a, b \quad (ab = a \vee ab = b)$.

Продемонстрируем, что если группоид $(V_s, \circ)$ удовлетворяет аксиомам 1–3, то он порождает некоторый граф $G_s = (V_s, E_s)$. Для этого нужно гарантировать однозначное восстановление множества рёбер E_s на основе множества с операцией $(V_s, \circ)$.

Определение 6. Назовём граф $G_s = (V_s, E_s)$ *порождённым* на основе группоида $(V_s, \circ)$, если его множество рёбер E_s задано по правилу

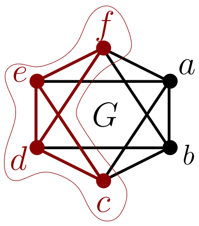
$$\forall a \quad ((a, a) \notin E_s(G)) \wedge (\forall b \neq a \quad (a, b) \in E_s(G) \Leftrightarrow a \circ b = a)\,.$$

Достаточно показать, что определение порождённого графа корректно при условии, что группоид V_s удовлетворяет аксиомам 1–3. Пусть $a \circ b = a$, тогда по аксиомам 2 и 3 получим $b \circ a = b$, а ребро будет задано корректно для классического графа: $(a, b) \in E_s$ и $(b, a) \in E_s$. Аналогично рассматривается случай $a \circ b = b$.

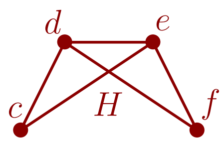
В свою очередь, аксиома 1 позволяет гарантировать, что у итогового графа все вершины не имеют петель в соответствии с замечанием 1 к определению 3.

Напомним, что в теории универсальных алгебр многообразием называется такой класс алгебр, который замкнут относительно взятия подалгебр, фактор-алгебр и прямого произведения алгебр. Под прямым произведением двух группоидов $D_1 \times D_2 = \{(d_1, d_2) : d_1 \in D_1, d_2 \in D_2\}$ подразумевается группоид, для которого умножение определено покомпонентно для всех его элементов $(d_1, d_2) \cdot (e_1, e_2) = (d_1 e_1, d_2 e_2)$ через умножения на D_1 и D_2. Отметим, что полученный на основе аксиом 1–3 класс объектов не является многообразием, так как он замкнут только относительно подалгебр и фактор-алгебр, а прямое произведение в классическом смысле не определено для графов. Действительно, если допустить, что у некоторых двух графов $ab = a$ для $a, b \in V(G_1)$ и $cd = d$ для $c, d \in V(G_2)$, то для прямого произведения получим $(a, c) \cdot (b, d) = (a, d)$, что является нарушением аксиомы 3.

В теории графов понятие подграфа вводится двумя разными способами. Подграфом в слабом смысле $G_s \subseteq G$ называется такой граф, для которого $V_s \subseteq V$ и $E_s \subseteq E$. Подграфом в сильном смысле называется такой подграф, для которого дополнительно требуется, чтобы E_s было максимальным по включениям, т. е. содержало бы все рёбра, которые соединяют вершины из $V_s \subseteq V$ в исходном графе G (пример на рис. 4).



G	a	b	c	d	e	f
a	a	a	a	d	a	a
b	b	b	b	b	e	b
c	c	c	c	c	c	c
d	a	d	d	d	d	d
e	e	b	e	e	e	e
f	f	f	c	f	f	f



H	c	d	e	f
c	c	c	c	c
d	d	d	d	d
e	e	e	e	e
f	c	f	f	f

Рис. 4. Пример подграфа $H \subset G$ в сильном смысле

Теорема 6. Для любого графа $G = (V, E)$ и любого непустого подмножества вершин $V_s \subseteq V$ верно:

1) $(V_s, \circ)$ — подгруппоид исходного группоида $(V, \circ)$;
2) граф $G_s = (V_s, E_s)$, порождённый $(V_s, \circ)$, является подграфом в сильном смысле для G.

Доказательство. Для группоида $(V, \circ)$ выполняются аксиомы 1–3. Поскольку они определены для всех элементов $a, b \in V$, они также выполняются и на произвольном подмножестве $V_s \subseteq V$. Аксиома 3 гарантирует, что при умножении элементов выйти за пределы V_s не получится, а значит, V_s замкнут относительно операции, и как следствие — это подгруппоид для V.

Порождённым графом на основе $(V_s, \circ)$ по определению 6 является такой граф $G_s = (V_s, E_s)$, у которого рёбра заданы правилом: $(a, b) \in E_s \Leftrightarrow a \circ b = a$. Очевидно, что данный граф является подграфом в сильном смысле графа G, так как он содержит все рёбра, которые соединяют вершины из V_s в исходном графе G. ■

2. Практическое приложение группоидов графов

Наиболее часто для представления графов в памяти компьютера используется матрица смежности для вершин графа. Напомним, что матрицей смежности графа G называется такая булева матрица $A_{n\times n}$, которая индексирована множеством вершин $V(G)$ и для которой $A(x,y)=1 \Leftrightarrow (x,y)\in E(G)$. С точки зрения компактного хранения данный способ является сильно избыточным. В первую очередь это связано с тем, что матрица смежности любого классического графа симметрична, а на её главной диагонали стоят только нули. Однако даже хранение только верхней части матрицы избыточно, так как хранить в общем случае имеет смысл только реально существующие рёбра $(x,y)\in E(G)$, для которых $A(x,y)=1$, а остальные по умолчанию можно считать отсутствующими ($A(x,y)=0$). Это подводит нас к рассмотрению первого примера реализации компактного хранения.

Пример 1. Вводим на множестве вершин $V(G)$ любой линейный порядок $(V,<)$, например, перейдя к канонической форме графа $\mathrm{Canon}(G)$ или любым другим методом [6]. Для компактного хранения в память заносим список рёбер E_m, пользуясь правилом $(x,y)\in E_m \Leftrightarrow ((x,y)\in E(G)\,\wedge\, x<y)$. В результате в память будут занесены все рёбра графа G, и каждое ровно по одному разу.

Отметим, что способ примера 1 не позволяет полностью избавиться от избыточности в хранении графа. В частности, вершина с первым номером будет многократно повторена в записи $(x,y_1),\ldots,(x,y_k)$. Более экономично указывать её один раз, а затем перечислять все связанные с ней вершины.

Пример 2. Вводим на множестве вершин графа $V(G)$ ($|V|=n$) любую взаимно-однозначную индексацию $N: V\to\{1,\ldots,n\}$. Для компактного хранения будем последовательно заносить в память двойки $(x_i, U(x_i))$ следующего вида:

$$x_i : N(x_i)=i,\quad U(x_i)=\{y:(x,y)\in E(G)\,\wedge\,\forall j<i\ (y\notin U(x_j))\}\,.$$

Для дополнительной экономии при хранении графа можно оборвать запись в память на первой паре $(x_i,U(x_i))$, для которой $U(x_i)=\varnothing$.

От элементарных примеров сжатия данных для графов перейдём непосредственно к приложению конгруэнций и фактор-графов для компактного хранения графов. Общая идея заключается в том, чтобы вместо самого графа G хранить фактор-граф G/ρ по максимальной нетривиальной конгруэнции ρ, а также все нетривиальные (содержащие больше одной вершины) классы $[a]$ конгруэнции ρ как подграфы G.

Шаг 1: пользуясь результатом теоремы 1, ищем максимальную по включениям конгруэнцию ρ, исключая тривиальный случай разбиения на один класс $[a]=V$;

Шаг 2: определяем, какие из классов состоят более чем из одного элемента;

Шаг 3: для всех нетривиальных классов $[a]$, определённых на шаге 2, рассматриваем подграфы $G_1,\ldots,G_k\subset G$, порождённые группоидами $([a],\circ)$;

Шаг 4: в каждом классе $[a]$ конгруэнции ρ выбираем произвольного представителя $a^*\in[a]$;

Шаг 5: вводим новый граф $G^*/\rho=(V^*_\rho,E^*_\rho)$, заменяя в фактор-графе G/ρ классы вершин $[a]$ на представителей a^*, выбранных на шаге 4;

Шаг 6: заменяем исходный граф G полученным набором графов $(G^*/\rho, G_1,\ldots,G_k)$.

Согласно теореме 1, исходный граф G можно однозначно восстановить на основе $(G^*/\rho,G_1,\ldots,G_k)$. Наличие ребра в G^*/ρ между двумя представителями a^* и b^* разных классов означает, что все элементы из класса $[a^*]$ попарно смежны со всеми элементами из класса $[b^*]$. Аналогично, если ребра между a^* и b^* нет в G^*/ρ, то классы $[a^*]$ и $[b^*]$ также не связаны друг с другом ни одним ребром. Сжатие данных при этом достигается за счёт удаления из рассмотрения всех «лишних» рёбер, которые связывают элементы различных классов (остаётся лишь один экземпляр такого ребра). Естественно, что положительный результат с точки зрения сжатия достигается лишь в том случае, если для хранения $(G^*/\rho, G_1, \ldots, G_k)$ использован способ примера 1 или примера 2.

Пример работы алгоритма сжатия представлен на рис. 5. Важно отметить, что в общем случае если исходный граф G связный, то граф G^*/ρ также связный. Однако при этом подграфы $G_1, \ldots, G_k$, которые соответствуют нетривиальным классам конгруэнции ρ, вполне могут получиться несвязными (см. в качестве примера G_1 на рис. 5).

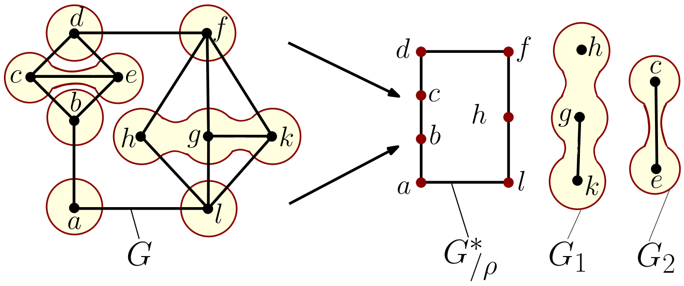


Рис. 5. Пример использования алгоритма сжатия графов

Замечание 2. Применение алгоритма сжатия для несвязных графов является нецелесообразным. Это связано с тем, что компоненты связности, согласно теоремам 2 и 4, являются классами конгруэнций, так же как и объединение компонент связности.

Заключение

Предложенный способ описания графов может быть также полезен при решении других задач теории графов. Например, его можно использовать для оптимизации решения задачи о клике. В классической постановке данной задачи необходимо найти внутри произвольного графа G максимальный полный подграф K_n. Согласно теореме 6, группоид для такого подграфа является полугруппой, а значит, можно воспользоваться для его поиска тестами на ассоциативность (тестами Лайта или их вероятностными модификациями [7]). Можно также переформулировать задачу о восстановлении графа по подграфам на языке алгебры, что потенциально может упростить её решение (см. подробнее о задаче восстановления в [8]).

В работе [9] предложен способ задания метрических пространств (D, ρ_R) и (D, ρ_L) на основе бинарной операции на группоиде D. Метрические пространства, которые получены с помощью определения из [9], для рассмотренных в данной работе группоидов графов обладают следующим свойством: если две вершины графа автоморфны $(x \sim y)$, то для любой другой вершины z расстояния до x и y совпадают: $\rho_R(x,z) = \rho_R(y,z)$ и $\rho_L(x,z) = \rho_L(y,z)$. В результате по отношению к группоидам графов сформулирована следующая гипотеза.

Гипотеза 1. Если применить к группоидам графов алгоритм поиска метрики, изложенный в работе [9], то две вершины графа автоморфны тогда и только тогда, когда для любой вершины z выполняется $\rho_R(x,z) = \rho_R(y,z) \wedge \rho_L(x,z) = \rho_L(y,z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *McNulty G. F. and Shallon C. R.* Inherently nonfinitely based finite algebras // Universal algebra and lattice theory. Lecture Notes in Math. 1983. V. 1004. P. 206–231.
2. *Lee S. M.* Simple graph algebras and simple rings // Southeast Asian Bull. Math. 1991. V. 15. P. 117–121.
3. *Oates-Williams S.* On the variety generated by Murskii's algebra // Algebra Universalis. 1984. V. 18(2). P. 175–177.
4. *Kelarev A. V., Miller M., and Sokratova O. V.* Languages recognized by two-sided automata of graphs // Proc. Estonian Acad. Sci. 2005. V. 54(1). P. 46–54.
5. *Trent Y.* Groupoid models for the $C*$-algebras of topological higher-rank graphs // J. Operator Theory. 2006. No. 4. P. 95–120.
6. *Назаров М. Н.* Альтернативные подходы к описанию классов изоморфных графов // Прикладная дискретная математика. 2014. № 3. С. 86–97.
7. *Rajagopalan S. and Schulman L. J.* Verification of identities // SIAM J. Comput. 2000. V. 29. P. 1155–1163.
8. *Harary F.* A survey of the reconstruction conjecture // Graphs and Combinatorics. Lecture Notes in Math. 1974. V. 406. P. 18–28.
9. *Назаров М. Н.* Собственная метрика на группоидах и её приложение к анализу межклеточных взаимодействий в биологии // Фундамент. и прикл. матем. 2013. № 3. С. 149–160.

REFERENCES

1. *McNulty G. F. and Shallon C. R.* Inherently nonfinitely based finite algebras. Universal algebra and lattice theory. Lecture Notes in Math., 1983, vol. 1004, pp. 206–231.
2. *Lee S. M.* Simple graph algebras and simple rings. Southeast Asian Bull. Math., 1991, vol. 15, pp. 117–121.
3. *Oates-Williams S.* On the variety generated by Murskii's algebra. Algebra Universalis, 1984, vol. 18(2), pp. 175–177.
4. *Kelarev A. V., Miller M., and Sokratova O. V.* Languages recognized by two-sided automata of graphs. Proc. Estonian Acad. Sci., 2005, vol. 54(1), pp. 46–54.
5. *Trent Y.* Groupoid models for the $C*$-algebras of topological higher-rank graphs. J. Operator Theory, 2006, no. 4, pp. 95–120.
6. *Nazarov M. N.* Al'ternativnye podhody k opisaniju klassov izomorfnyh grafov. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2014, no. 3, pp. 86–97. (in Russian)
7. *Rajagopalan S. and Schulman L. J.* Verification of identities. SIAM J. Comput., 2000, vol. 29, pp. 1155–1163.
8. *Harary F.* A survey of the reconstruction conjecture. Graphs and Combinatorics. Lecture Notes in Math., 1974, vol. 406, pp. 18–28.
9. *Nazarov M. N.* Sobstvennaja metrika na gruppoidah i ejo prilozhenie k analizu mezhkletochnyh vzaimodejstvij v biologii. Fundament. i Prikl. Matem., 2013, no. 3, pp. 149–160. (in Russian)