

УДК 336:51

Г.А. Медведев

**О ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЕ ДОХОДНОСТИ.  
6. ТРЕХФАКТОРНЫЕ МОДЕЛИ**

Исследуются модели Даффи – Кана, описывающие динамику краткосрочной процентной ставки в случае, когда состояние финансового рынка характеризуется не только уровнем самой процентной ставки, но и еще двумя изменяющимися во времени параметрами. Рассматривается три версии расширения однофакторной модели до трехфакторной, позволяющие получать аффинную временную структуру доходности. Эти версии предполагают, что параметры однофакторной модели – уровень возвращения процентной ставки и ее волатильность – являются не постоянными величинами, а диффузионными процессами. В первой версии волатильность процесса уровня возвращения процентной ставки не зависит от самого уровня и является стохастической. Во второй версии процесс уровня возвращения процентной ставки является процессом «с квадратным корнем». В третьей версии волатильность процесса уровня возвращения процентной ставки не зависит от самого уровня и является детерминированной. Основное внимание уделяется свойствам кривой доходности и форвардной кривой, когда динамика краткосрочной процентной ставки описывается описанными трехфакторными моделями.

**Ключевые слова:** *процентные ставки доходности, аффинная модель, функции временной структуры, трехфакторные модели.*

Напомним, что для  $n$ -факторной модели аффинной доходности предполагается, что вектор состояния финансового рынка  $X(t) = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$  следует однородному по времени марковскому процессу, порождаемому стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX(t) = \mu(X(t)) dt + \sigma(X(t)) dW(t)$$

с  $n$ -вектором дрейфа  $\mu(x)$ ,  $(n \times m)$ -матрицей волатильности  $\sigma(x)$ , и  $m$ -вектором  $W(t)$  независимых стандартных винеровских процессов [1]. При этом вектор дрейфа  $\mu(x)$  и матрица диффузии  $\sigma(x)\sigma(x)^T$  должны быть аффинными функциями относительно переменных  $x$ , а рыночные цены риска такими, что  $\sigma(x)\lambda(x)$  –  $n$ -вектор с аффинными компонентами относительно переменных  $x$ :

$$\mu(x) = K(\theta - x), \quad \sigma(x)\sigma(x)^T = \alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i, \quad \sigma(x)\lambda(x) = \xi + \sum_{i=1}^n \eta_i x_i. \quad (1)$$

Здесь  $K$ ,  $\alpha$  и  $\beta_i$  –  $(n \times n)$ -матрицы;  $\theta$ ,  $\xi$  и  $\eta_i$  –  $n$ -векторы,  $x_i$  – компоненты вектора  $x$ . Эти свойства для  $n$ -факторной модели аффинной доходности приводят к следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям для функции  $A(\tau)$  и компонент вектора  $B(\tau) = (B_1(\tau), B_2(\tau), \dots, B_n(\tau))$ ,  $\tau$  – срок до погашения:

$$A'(\tau) = (\xi - K\theta)^T B(\tau) + B(\tau)^T \alpha B(\tau) / 2, \quad A(0) = 0; \quad (2)$$

$$B_i'(\tau) = \phi_i - B(\tau)^T (\eta_i + K_i) - B(\tau)^T \beta_i B(\tau) / 2, \quad B_i(0) = 0. \quad (3)$$

В уравнении для  $B_i(\tau)$  символ  $K_i$  обозначает  $i$ -й столбец матрицы  $K$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Кри-

вая доходности  $y(\tau, x)$  и форвардная кривая  $f(\tau, x)$  определяется через функции  $A(\tau)$  и  $B(\tau)$  по формулам

$$y(\tau, x) = \frac{x^T B(\tau) - A(\tau)}{\tau}, \quad f(\tau, x) = x^T \frac{dB(\tau)}{d\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau}.$$

Отправным пунктом нашего анализа является однофакторная модель Даффи – Кана [2]:

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sqrt{2kD \frac{r(t) - x}{\theta - x}} dW(t), \quad r(0) > x, \quad (4)$$

в которой параметры  $\theta$  и  $D$  будут предполагаться диффузионными процессами  $\theta(t)$  и  $D(t)$ .

### 1. Стохастическая волатильность процесса $\theta(t)$

В этом случае уровень  $\theta$ , к которому возвращается процентная ставка  $r(t)$  (в однофакторной модели он совпадает с ее стационарным средним), рассматривается как стохастический процесс диффузионного типа  $\theta(t)$ , подобный процессу краткосрочной ставки одномерной модели  $r(t)$ , но с фиксированным уровнем возвращения  $\theta_0$  и волатильностью, зависящей только от стохастической дисперсии  $D(t)$ . Процентная ставка  $r(t)$  имеет волатильность, также пропорциональную  $D(t)$ . Поскольку процессы  $r(t)$  и  $\theta(t)$  в этом случае не являются процессами «с квадратным корнем», то их нижняя граница не определяется (или, что эквивалентно, нижняя граница этих процессов удаляется в минус бесконечность).

$$dr(t) = k_r(\theta(t) - r(t))dt + \sqrt{2k_r D(t)} dW_r(t); \quad (5)$$

$$d\theta(t) = k_\theta(\theta_0 - \theta(t))dt + \sigma\sqrt{2k_\theta D(t)} dW_\theta(t); \quad (6)$$

$$dD(t) = k_D(V - D(t))dt + \sqrt{2k_D S \frac{D(t) - x}{V - x}} dW_D(t), \quad D(0) > x \geq 0. \quad (7)$$

Здесь  $x$  – нижняя граница для процесса дисперсии  $D(t)$  процентной ставки;  $V$  – стационарное среднее процесса дисперсии  $D(t)$ , а  $S$  – стационарная дисперсия процесса дисперсии  $D(t)$ . Для удобства записи в дальнейшем изложении удобно ввести обозначение  $\delta = k_D S / (V - x)$ .

Уравнения (2), (3) в этом случае приобретают вид

$$A'(\tau) = -k_\theta \theta_0 B_\theta(\tau) - (k_D V + 2\lambda_D x \delta) B_D(\tau) - \delta x B_D(\tau)^2, \quad A(0) = 0;$$

$$B_r'(\tau) = \phi_r - k_r B_r(\tau), \quad B_r(0) = 0;$$

$$B_\theta'(\tau) = \phi_\theta + k_r B_r(\tau) - k_\theta B_\theta(\tau), \quad B_\theta(0) = 0;$$

$$B_D'(\tau) = - (k_D + 2\lambda_D \delta) B_D(\tau) - 2\lambda_r k_r B_r(\tau) - 2\sigma \lambda_\theta k_\theta B_\theta(\tau) - k_r B_r(\tau)^2 - \sigma k_\theta B_\theta(\tau)^2 - \delta B_D(\tau)^2, \quad B_D(0) = 0.$$

Заметим, что функция  $A(\tau)$  не зависит от функции  $B_r(\tau)$  и определяется интегрированием, если функции  $B_\theta(\tau)$  и  $B_D(\tau)$  будут найдены. Второе и третье уравнения для  $B_r(\tau)$  и  $B_\theta(\tau)$  легко решаются:

$$B_r(\tau) = \phi_r (1 - e^{-k_r \tau}) / k_r; \quad B_r(\tau) \rightarrow \phi_r / k_r \text{ при } \tau \rightarrow \infty.$$

$$B_\theta(\tau) = \frac{1}{k_\theta} + \frac{\phi_r}{k_r - k_\theta} e^{-k_r \tau} + \frac{k_r - \phi_\theta k_\theta}{k_\theta (k_\theta - k_r)} e^{-k_\theta \tau}; \quad B_\theta(\tau) \rightarrow 1/k_\theta \text{ при } \tau \rightarrow \infty. \quad (8)$$

При получении этих решений было учтено, что из экономических соображений [5] весовой коэффициент  $\phi_D$  должен быть равен нулю,  $\phi_D = 0$ , а  $\phi_r + \phi_\theta = 1$ . Что касается уравнения для  $B_D(\tau)$ , то оно является уравнением Риккати с переменным свободным коэффициентом, что не позволяет выразить его решение в аналитическом виде и его приходится решать численно. Однако предельное значение функции  $B_D(\tau)$  при  $\tau \rightarrow \infty$  может быть выражено аналитически в виде

$$B_D(\infty) = \frac{-(k_D + 2\lambda_D\delta) + \sqrt{(k_D + 2\lambda_D\delta)^2 - 4\delta(2\lambda_r\phi_r + \phi_r^2/k_r + 2\sigma\lambda_\theta + \sigma/k_\theta)}}{2\delta}.$$

Заметим, что этот предел будет существовать только в том случае, если параметры модели удовлетворяют неравенству

$$(k_D + 2\lambda_D\delta)^2 \geq 4\delta(2\lambda_r\phi_r + \phi_r^2/k_r + 2\sigma\lambda_\theta + \sigma/k_\theta). \quad (9)$$

Если это неравенство не выполняется, функция  $B_D(\tau)$  будет неограниченно убывать, что приведет к попаданию доходности в отрицательную область при некотором конечном  $\tau$ . Фактически неравенство (9) определяет область значений параметра  $\delta$ , определяющего волатильность процесса  $D(t)$  в уравнении (7), при которых существует предельное значение  $B_D(\infty)$ .

Кривые доходности  $y(\tau, r, \theta, D)$  и форвардные кривые  $f(\tau, r, \theta, D)$  определяются через функции  $A(\tau)$ ,  $B_r(\tau)$ ,  $B_\theta(\tau)$  и  $B_D(\tau)$  по формулам

$$y(\tau, r, \theta, D) \equiv Y(B_r(\tau), B_\theta(\tau), B_D(\tau)) = k_r[A(\tau) - rB_r(\tau) - \theta B_\theta(\tau) - DB_D(\tau)]/\ln[1 - k_r B_r(\tau)/\phi_r]; \quad (10)$$

$$f(\tau, r, \theta, D) \equiv F(B_r(\tau), B_\theta(\tau), B_D(\tau)) = r\phi_r + \theta\phi_\theta - (r - \theta + 2\lambda_r D)k_r B_r(\tau) - (\theta - \theta_0 + 2\sigma\lambda_\theta D)k_\theta B_\theta(\tau) + [(k_D(D - V) + 2\lambda_D\delta(D - x)]B_D(\tau) - k_r DB_r(\tau)^2 - \sigma k_\theta DB_\theta(\tau)^2 - \delta(D - x)B_D(\tau)^2. \quad (11)$$

Предельные свойства этих кривых такие:

при  $\tau \rightarrow 0$  обе кривые стремятся к одинаковому пределу

$$y(0, r, \theta, D) = f(0, r, \theta, D) = r\phi_r + \theta\phi_\theta;$$

при  $\tau \rightarrow +\infty$  обе кривые также стремятся к общему пределу

$$y(\infty, r, \theta, D) = f(\infty, r, \theta, D) = \theta_0 + k_D(V - x)B_D(\infty) - x(2\lambda_r\phi_r + \phi_r^2/k_r + 2\sigma\lambda_\theta + \sigma/k_\theta).$$

Для того чтобы предельные значения кривых при  $\tau \rightarrow +\infty$  были положительными, должно выполняться неравенство

$$\theta_0 - x(2\lambda_r\phi_r + \phi_r^2/k_r + 2\sigma\lambda_\theta + \sigma/k_\theta) > -k_D(V - x)B_D(\infty),$$

или

$$\frac{\theta_0 - x(2\lambda_r\phi_r + \phi_r^2/k_r + 2\sigma\lambda_\theta + \sigma/k_\theta)}{2k_D(2\lambda_r\phi_r + \phi_r^2/k_r + 2\sigma\lambda_\theta + \sigma/k_\theta)} > \frac{V - x}{(k_D + 2\lambda_D\delta) + \sqrt{(k_D + 2\lambda_D\delta)^2 - 4\delta(2\lambda_r\phi_r + \phi_r^2/k_r + 2\sigma\lambda_\theta + \sigma/k_\theta)}}. \quad (12)$$

Это неравенство также следует рассматривать как условие, накладываемое на параметры уравнения (7), чтобы обеспечить разумные результаты для долгосрочных доходностей. В этом случае в качестве варьируемого параметра модели можно выбрать стационарное среднее  $V$  процесса  $D(t)$ . Когда при описании динамики процентной ставки используется нейтральная к риску вероятностная мера ( $\lambda_r = 0$ ,  $\lambda_\theta = 0$ ,  $\lambda_D = 0$ ), неравенства (9) и (12) существенно упрощаются:

$$\delta \equiv \frac{k_D S}{V - x} \leq \frac{1}{4} \frac{k_D^2}{\phi_r^2 / k_r + \sigma / k_\theta};$$

$$V < x + \left( \frac{\theta_0}{\phi_r^2 / k_r + \sigma / k_\theta} - x \right) \left( \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\delta}{k_D^2} \left( \frac{\phi_r^2}{k_r} + \frac{\sigma}{k_\theta} \right)} \right).$$

Заметим, что при определении области пространства параметров  $\{S, V\}$ , обеспечивающих существование положительных предельных значений доходностей, участвуют все параметры модели.

На рис. 1 представлены графики функций  $Y(B_r)$  и  $F(B_r)$ , вычисленные по формулам (10) и (11), характеризующие доходности трехфакторной модели (5) – (7) с ключевыми параметрами, соответствующими найденным Д. Аном и Б. Гао [6], приспособившим модель Даффи – Кана для описания динамики процесса годовой ставки доходности одномесячных бумаг Казначейства США для периода наблюдения с января 1960 г. по февраль 1991 г..

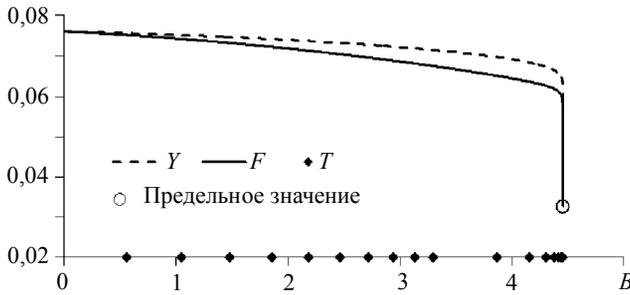


Рис. 1. Кривые доходностей  $Y(B)$  (штриховые линии) и форвардные кривые  $F(B)$  (сплошные линии) в случае, когда параметры принимали следующие значения:  $k_r = 0,1347$ ;  $k_\theta = 0,01347$ ;  $k_D = 0,1$ ;  $\theta_0 = 0,0762$ ;  $V = 0,002892$ ;  $\sigma = 0,1$ ;  $x = x_D = 0,0001$ ;  $S = 6 \times 10^{-6}$ ;  $\lambda_r = 0,1$ ;  $\lambda_\theta = 0,1$ ;  $\lambda_D = 0,1$ ;  $\phi_r = 0,6$ ;  $\phi_\theta = 0,4$ .  $r = 0,08$ ;  $\theta = 0,07$ ;  $D = 0,0028$ ;  $B_{\max} = B_r(\infty) = 4,454$ . Круглый маркер показывает предельное значение, одинаковое для обеих кривых. Ромбовидные маркеры показывают метки реального времени  $T$  через каждый год для первых 10 лет, а далее – через 5 лет

### 2. Процесс $\theta(t)$ с квадратным корнем

В этом случае уровень  $\theta$ , к которому возвращается процентная ставка  $r(t)$ , рассматривается как стохастический процесс  $\theta(t)$  диффузионного типа, подобный процессу краткосрочной ставки одномерной модели  $r(t)$ , с фиксированным уровнем возвращения  $\theta_0$  и волатильностью, пропорциональной квадратному корню из  $\theta(t) - x_\theta$ , где  $x_\theta$  – нижняя граница уровня возвращения. Оба других уравнения системы (5) остаются прежними. Определенная таким образом трехфакторная модель по своей структуре близка к модели Чена [3] в интерпретации Дзя и Синглтона [4].

$$dr(t) = k_r(\theta(t) - r(t))dt + \sqrt{2k_r D(t)} dW_r(t); \tag{13}$$

$$d\theta(t) = k_\theta(\theta_0 - \theta(t))dt + \sigma \sqrt{2k_\theta \frac{\theta(t) - x_\theta}{\theta_0 - x_\theta}} dW_\theta(t), \theta(0) > x_\theta \geq 0; \tag{14}$$

$$dD(t) = k_D(V - D(t))dt + \sqrt{2k_D S \frac{D(t) - x_D}{V - x_D}} dW_D(t), \quad D(0) > x_D \geq 0. \quad (15)$$

Заметим, что в этой модели процессы  $\theta(t)$  и  $D(t)$  являются независимыми диффузионными процессами «с квадратным корнем». Свойства таких процессов подробно исследованы в литературе. Для того чтобы нижние границы  $x_\theta$  и  $x_D$  процессов  $\theta(t)$  и  $D(t)$  были недостижимыми, т.е. чтобы эти процессы не принимали отрицательных значений, необходимо выполнение условий Феллера  $(\theta_0 - x_\theta)^2 > \sigma^2$  и  $(V - x_D)^2 > S$ .

Уравнения для функций временной структуры  $A(\tau)$ ,  $B_r(\tau)$ ,  $B_\theta(\tau)$  и  $B_D(\tau)$  в этом случае составляют систему

$$A'(\tau) = -(k_\theta \theta_0 + 2\lambda_\theta \gamma x_\theta) B_\theta(\tau) - (k_D V + 2\lambda_D \delta x_D) B_D(\tau) - \delta x_D B_D(\tau)^2 - \gamma x_\theta B_\theta(\tau)^2, \quad A(0) = 0;$$

$$B_r'(\tau) = \phi_r - k_r B_r(\tau), \quad B_r(0) = 0;$$

$$B_\theta'(\tau) = \phi_\theta + k_r B_r(\tau) - (k_\theta + 2\lambda_\theta \gamma) B_\theta(\tau) - \gamma B_\theta(\tau)^2, \quad B_\theta(0) = 0; \quad (16)$$

$$B_D'(\tau) = -(k_D + 2\lambda_D \delta) B_D(\tau) - 2\lambda_r k_r B_r(\tau) - k_r B_r(\tau)^2 - \delta B_D(\tau)^2, \quad B_D(0) = 0, \quad (17)$$

где для краткости обозначено  $\delta = k_D S / (V - x_D)$ ,  $\gamma = k_\theta \sigma^2 / (\theta_0 - x_\theta)$ .

Решение уравнения для функции  $B_r(\tau)$  найти легко:

$$B_r(\tau) = \phi_r (1 - e^{-k_r \tau}) / k_r; \quad B_r(\tau) \rightarrow \phi_r / k_r \text{ при } \tau \rightarrow \infty.$$

Функции  $A(\tau)$ ,  $B_\theta(\tau)$  и  $B_D(\tau)$  могут быть определены только численно. Заметим, что функция  $A(\tau)$  не зависит от  $B_r(\tau)$ . Предельные значения функций  $B_\theta(\tau)$  и  $B_D(\tau)$  определяются выражениями

$$B_\theta(\infty) = \frac{2}{\sqrt{(k_\theta + 2\gamma\lambda_\theta)^2 + 4\gamma + (k_\theta + 2\gamma\lambda_\theta)}},$$

$$B_D(\infty) = -\frac{2(2\lambda_r \phi_r + \phi_r^2 / k_r)}{\sqrt{(k_D + 2\delta\lambda_D)^2 - 4\delta(2\lambda_r \phi_r + \phi_r^2 / k_r) + (k_D + 2\delta\lambda_D)}}. \quad (17)$$

Для того чтобы предельное значение  $B_D(\infty)$  существовало, необходимо, чтобы параметры модели удовлетворяли неравенству

$$(k_D + 2\lambda_D \delta)^2 \geq 4\delta(2\lambda_r \phi_r + \phi_r^2 / k_r). \quad (18)$$

Кривые доходности  $y(\tau, r, \theta, D)$  и форвардные кривые  $f(\tau, r, \theta, D)$  определяются через функции  $A(\tau)$ ,  $B_r(\tau)$ ,  $B_\theta(\tau)$  и  $B_D(\tau)$  по формулам

$$y(\tau, r, \theta, D) \equiv Y(B_r(\tau), B_\theta(\tau), B_D(\tau)) =$$

$$= k_r [A(\tau) - r B_r(\tau) - \theta B_\theta(\tau) - D B_D(\tau)] / \ln[1 - k_r B_r(\tau) / \phi_r]; \quad (19)$$

$$f(\tau, r, \theta, D) \equiv F(B_r(\tau), B_\theta(\tau), B_D(\tau)) = r\phi_r + \theta\phi_\theta - (r - \theta + 2\lambda_r D) k_r B_r(\tau) -$$

$$- [k_\theta(\theta - \theta_0) + 2\gamma\lambda_\theta(\theta - x_\theta)] B_\theta(\tau) - [(k_D(D - V) + 2\lambda_D \delta(D - x_D))] B_D(\tau) -$$

$$- k_r D B_r(\tau)^2 - \gamma(\theta - x_\theta) B_\theta(\tau)^2 - \delta(D - x_D) B_D(\tau)^2. \quad (20)$$

Предельные свойства этих кривых такие:

при  $\tau \rightarrow 0$  обе кривые стремятся к одинаковому пределу

$$y(0, r, \theta, D) = f(0, r, \theta, D) = r\phi_r + \theta\phi_\theta;$$

при  $\tau \rightarrow +\infty$  обе кривые также стремятся к общему пределу

$$y(\infty, r, \theta, D) = f(\infty, r, \theta, D) =$$

$$= k_\theta(\theta_0 - x_\theta) B_\theta(\infty) + k_D(V - x) B_D(\infty) + x_\theta - x_D(2\lambda_r \phi_r + \phi_r^2 / k_r).$$

Для того чтобы этот предел был положительным, необходимо выполнение неравенства

$$k_\theta(\theta_0 - x_\theta)B_\theta(\infty) + x_\theta - x_D(2\lambda_r\phi_r + \phi_r^2/k_r) > -k_D(V - x)B_D(\infty). \quad (21)$$

Неравенства (18) и (21) определяют область значений параметров  $\{S, V\}$  уравнения (15), гарантирующих существование и положительность предельных значений доходностей при  $\tau \rightarrow +\infty$ . К сожалению, запись этих неравенств в явной форме довольно громоздка, поэтому приведем явную форму только для случая, когда при описании динамики процентной ставки используется нейтральная к риску вероятностная мера ( $\lambda_r = 0, \lambda_\theta = 0, \lambda_D = 0$ )

$$\delta \equiv \frac{k_D S}{V - x_D} \leq \frac{k_r k_D^2}{4\phi_r^2};$$

$$V < x_D + \left( x_\theta + \frac{2k_\theta(\theta_0 - x_\theta)}{k_\theta + \sqrt{k_\theta^2 + 4\gamma}} - x_D \frac{\phi_r^2}{k_r} \right) \left( \frac{k_r(k_D + \sqrt{k_D^2 - 4\delta\phi_r^2/k_r})}{2k_D\phi_r^2} \right).$$

На рис. 2 представлены графики функций  $Y(B_r)$  и  $F(B_r)$ , вычисленные по формулам (19) и (20), характеризующие доходности трехфакторной модели (13) – (15) с ключевыми параметрами, соответствующими найденным Д. Аном и Б. Гао [6].

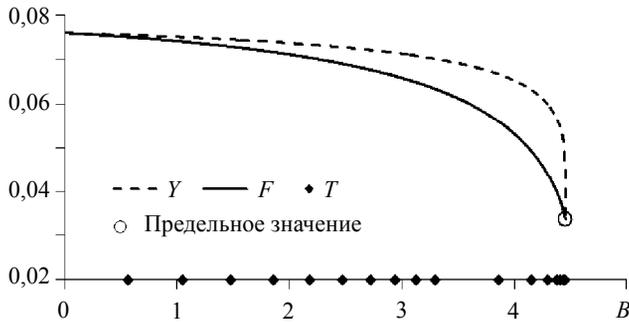


Рис. 2. Кривые доходностей  $Y(B)$  (штриховые линии) и форвардные кривые  $F(B)$  (сплошные линии) в случае, когда параметры принимали те же значения, что и на рис. 1, и дополнительно  $x_\theta = 0,033$ . Круглый маркер показывает предельное значение, одинаковое для обеих кривых. Ромбовидные маркеры показывают метки реального времени  $T$  через каждый год для первых 10 лет, а далее – через 5 лет

### 3. Гауссовский процесс $\theta(t)$

Такая модель близка к модели BDFS [7], где уровень  $\theta$ , к которому возвращается процентная ставка  $r(t)$ , рассматривается как стохастический процесс  $\theta(t)$  диффузионного типа, подобный процессу краткосрочной ставки одномерной модели  $r(t)$ , с фиксированным уровнем возвращения  $\theta_0$  и фиксированной волатильностью. Оба другие уравнения системы (5) остаются прежними:

$$Dr(t) = k_r(\theta(t) - r(t))dt + \sqrt{2k_r D(t)} dW_r(t); \quad (22)$$

$$d\theta(t) = k_\theta(\theta_0 - \theta(t))dt + \sqrt{2k_\theta \sigma^2} dW_\theta(t); \quad (23)$$

$$dD(t) = k_D(V - D(t))dt + \sqrt{2k_D S \frac{D(t) - x_D}{V - x_D}} dW_D(t), \quad D(0) > x_D \geq 0. \quad (24)$$

Модель (22) – (24) фактически является частным случаем модели (13) – (15), когда нижняя граница процесса  $\theta(t)$  удаляется на  $-\infty$ ,  $x_\theta \rightarrow -\infty$ . При этом  $\gamma \rightarrow 0$ ,  $\gamma x_\theta \rightarrow -k_\theta \sigma^2$ . Если учесть эти изменения, то получается следующая система уравнений для функций временной структуры  $A(\tau)$ ,  $B_r(\tau)$ ,  $B_\theta(\tau)$  и  $B_D(\tau)$ :

$$A'(\tau) = -k_\theta(\theta_0 - 2\lambda_\theta \sigma^2)B_\theta(\tau) - (k_D V + 2\lambda_D \delta x_D)B_D(\tau) - \delta x_D B_D(\tau)^2 + k_\theta \sigma^2 B_\theta(\tau)^2, \\ A(0) = 0; \tag{25}$$

$$B_r'(\tau) = \phi_r - k_r B_r(\tau), \quad B_r(0) = 0;$$

$$B_\theta'(\tau) = \phi_\theta + k_r B_r(\tau) - k_\theta B_\theta(\tau), \quad B_\theta(0) = 0;$$

$$B_D'(\tau) = - (k_D + 2\lambda_D \delta)B_D(\tau) - 2\lambda_r k_r B_r(\tau) - k_r B_r(\tau)^2 - \delta B_D(\tau)^2, \quad B_D(0) = 0.$$

Второе и третье уравнения решаются аналитически, как это показано выше; их решения представляются формулами (8). Предельное значение решения третьего уравнения при  $\tau \rightarrow +\infty$  существует, если выполняется неравенство (18). Особенность этой модели состоит в том, что процесс  $\theta(t)$  является гауссовским и порождается уравнением, совпадающим с тем, которое известно как модель Васичека. Поэтому все особенности этой модели проявляются здесь. В частности, последнее слагаемое в правой части уравнения (25) для  $A(\tau)$  оказывается положительным и возрастающим с увеличением  $\tau$ , так что при  $\tau \rightarrow +\infty$  производная  $A'(\tau)$  может стать тоже положительной. Но поскольку предельные доходности определяются именно производной функции  $A(\tau)$ , так как  $y(\infty, r, \theta, D) = f(\infty, r, \theta, D) = -A'(\infty)$ , они могут стать отрицательными, что будет противоречить экономическому смыслу доходности. Отсюда возникает еще одно ограничение на волатильность процесса  $\theta(t)$  для этой модели:

$$\sigma^2 < k_\theta[\theta_0 + (k_D V + 2\lambda_D \delta x_D)B_D(\infty) + \delta x_D B_D(\infty)^2]/(1 + 2k_\theta \lambda_\theta). \tag{26}$$

Кривые доходности  $y(\tau, r, \theta, D)$  и форвардные кривые  $f(\tau, r, \theta, D)$  определяют через функции  $A(\tau)$ ,  $B_r(\tau)$ ,  $B_\theta(\tau)$  и  $B_D(\tau)$  по формулам

$$y(\tau, r, \theta, D) \equiv Y(B_r(\tau), B_\theta(\tau), B_D(\tau)) = \\ = k_r[A(\tau) - rB_r(\tau) - \theta B_\theta(\tau) - DB_D(\tau)]/\ln[1 - k_r B_r(\tau)/\phi_r]; \tag{27}$$

$$f(\tau, r, \theta, D) \equiv F(B_r(\tau), B_\theta(\tau), B_D(\tau)) = \\ = r\phi_r + \theta\phi_\theta - k_r(r - \theta + 2\lambda_r D)B_r(\tau) - k_\theta(\theta - \theta_0 + 2\lambda_\theta \sigma^2)B_\theta(\tau) - \\ - [(k_D(D - V) + 2\lambda_D \delta(D - x_D))B_D(\tau) - k_r DB_r(\tau)^2 - k_\theta \sigma^2 B_\theta(\tau)^2 - \delta(D - x_D)B_D(\tau)^2]. \tag{28}$$

Предельные свойства этих кривых такие:

при  $\tau \rightarrow 0$  обе кривые стремятся к одинаковому пределу

$$y(0, r, \theta, D) = f(0, r, \theta, D) = r\phi_r + \theta\phi_\theta;$$

при  $\tau \rightarrow +\infty$  обе кривые также стремятся к общему пределу

$$y(\infty, r, \theta, D) = f(\infty, r, \theta, D) = \theta_0 + k_D(V - x_D)B_D(\infty) - x_D \phi_r (\phi_r + 2k_r \lambda_r)/k_r.$$

Здесь величина  $B_D(\infty)$  вычисляется по формуле (17). Поскольку  $B_D(\infty)$  – величина отрицательная, для достижения положительной доходности необходимо также, чтобы выполнялось следующее неравенство, ограничивающее сверху стационарную дисперсию  $V$  процесса  $D(t)$ :

$$k_D(V - x_D)|B_D(\infty)| < \theta_0 - x_D \phi_r (\phi_r + 2k_r \lambda_r)/k_r. \tag{29}$$

Выполнение перечисленных условий обеспечивает существование положительных предельных значений кривых  $y(\tau)$  и  $f(\tau)$  при  $\tau \rightarrow +\infty$ . Вместе с тем значения параметров модели будут обеспечивать ее работоспособность в полной мере, если будут выполняться также неравенства  $y(\tau) > 0$  и  $f(\tau) > 0$  для любых  $\tau > 0$ . К сожа-

лению, записать эти неравенства в явной форме не удастся, поскольку аналитический вид функции  $B_D(\tau)$  не определяется. Однако можно сказать, что для выполнения неравенств  $y(\tau) > 0$  и  $f(\tau) > 0$  для любых  $\tau > 0$  нужно ограничить сверху волатильность процесса  $D(t)$ , иначе говоря, установить верхнюю границу для параметра  $S$ , что удается сделать только численно.

На рис. 3 представлены графики функций  $Y(B_r)$  и  $F(B_r)$ , вычисленные по формулам (27) и (28), характеризующие доходности трехфакторной модели (22) – (24) с ключевыми параметрами, соответствующими найденным Д. Аном и Б. Гао [6].

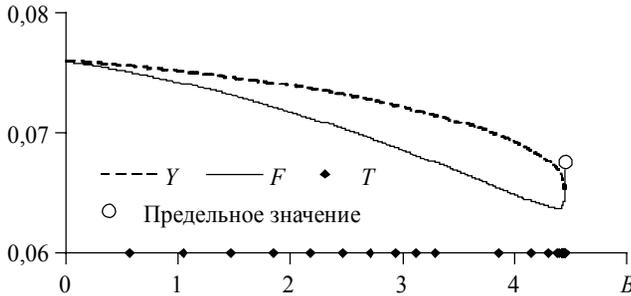


Рис. 3. Кривые доходностей  $Y(B)$  (штриховые линии) и форвардные кривые  $F(B)$  (сплошные линии) в случае, когда параметры принимали те же значения, что и на рис. 1, и дополнительно  $\sigma = 0,003$ . Круглый маркер показывает предельное значение, одинаковое для обеих кривых. Ромбовидные маркеры показывают метки реального времени  $T$  через каждый год для первых 10 лет, а далее – через 5 лет.

### Заключение

Здесь, а также в предыдущих статьях [3, 5], последовательно рассмотрены модели аффинных доходностей с различным числом факторов. С увеличением числа факторов модели и их анализ существенно усложняются, и получение результатов в аналитической форме становится невозможным. Численный анализ также усложняется, поскольку число параметров моделей растет. Поэтому всестороннего сравнения моделей, их преимуществ и недостатков в рамках статьи осуществить не удастся. Приводится только характер доходностей для одного набора параметров, найденных Д. Аном и Б. Гао [6] при обработке реальных финансовых данных. Более широкое сравнение моделей предстоит еще сделать в будущем. В табл. 1 сведены данные о том, какие и сколько параметров используется для построения рассмотренных моделей. Тип модели обозначен двумя цифрами: первая

Таблица 1

Параметры, использующиеся в моделях с различным числом факторов

Тип модели	Факторы	Параметры										Количество параметров
		$k_r$	$\theta_0$	$D_r$	$x_r$	$k_\theta$	$D_\theta$	$k_D$	$V$	$S$	$x_D$	
1_1	$r$	+	+	+	+							4
2_1	$r, \theta$	+	+	+	+	+	+					6
2_2	$r, D$	+	+					+	+	+	+	6
3_1	$r, \theta, D$	+	+			+	+	+	+	+	+	8
3_2	$r, \theta, D$	+	+		+	+	+	+	+	+	+	9
3_3	$r, \theta, D$	+	+			+	+	+	+	+	+	8

цифра означает число факторов, а вторая – номер раздела соответствующей статьи, в котором эта модель анализируется. Плюс обозначает использование параметра в соответствующей модели.

В интервале изменения времени до погашения  $\tau$  от нуля до бесконечности кривые доходности  $y(\tau, r, \theta, D)$  и форвардные кривые  $f(\tau, r, \theta, D)$  для всех моделей стартуют из общей точки – текущего значения спот-ставки  $r(t) = r$  и стремятся к соответствующим пределам, зависящим от параметров модели, но не зависящим от значений текущего уровня переменных состояния  $r, \theta, D$ . Эти предельные значения в общем случае определяются не только параметрами, указанными в таблице, но и наборами весовых коэффициентов  $\{\phi\}$  и параметров цен риска  $\{\lambda\}$ , что заметно усложняет формулы. Однако если считать, что краткосрочная ставка доходности актива определяется только спот-ставкой  $r$  (т.е.  $\phi_r = 1, \phi_\theta = 0, \phi_D = 0$ ), стохастические процессы  $r(t), \theta(t)$  и  $D(t)$  нейтральны к риску (т.е.  $\lambda_r = 0, \lambda_\theta = 0, \lambda_D = 0$ ), а нижние границы для процентной ставки и ее дисперсии равны нулю ( $x_r = 0, x_D = 0$ ), то формулы для вычисления доходностей сильно упрощаются. В табл. 2 приводятся их явные аналитические выражения при этих предположениях. В первой строке табл. 2 приводятся обозначения моделей, во второй – формулы для соответствующих предельных доходностей, а в третьей строке – результаты вычислений по этим формулам для оценок параметров, найденных в [6].

Таблица 2

## Предельные значения доходностей

1	2_1	2_2	3_1	3_2	3_3
$k_r B_r(\infty)\theta_0$	$k_\theta B_\theta(\infty)\theta_0$	$\theta_0 - k_D  B_D(\infty) V$	$\theta_0 - k_D  B_D(\infty) V$	$k_\theta B_\theta(\infty)\theta_0 - k_D  B_D(\infty) V$	$\theta_0 - k_D  B_D(\infty) V$
0,061991	0,051994	0,053899	0,031849	0,021274	0,049687

Заметим, что предельные значения доходностей могут рассматриваться как доходности долгосрочных ценных бумаг и что они не зависят от текущего значения переменных состояния  $r, \theta, D$ , а зависят только от параметров модели. Заметим также, что функции  $B_\theta(\tau)$  и  $B_D(\tau)$  для различных моделей вычисляются по различным формулам и имеют различные предельные значения  $B_\theta(\infty)$  и  $B_D(\infty)$ . Из табл. 2 видно, что для рассмотренного числового примера предельные значения доходностей уменьшаются с увеличением числа факторов. Более обоснованные выводы могут быть сделаны после исследования доходностей во всей допустимой области десятимерного пространства параметров. Кроме того, предстоит сравнительное исследование взаимного поведения кривых доходностей и форвардных кривых во всем интервале  $0 < \tau < \infty$  сроков до погашения актива во всей допустимой области параметров.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Медведев Г.А.* О временной структуре доходности. 1. Модель Васичека // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 1(18). С. 102–111.
2. *Медведев Г.А.* О временной структуре доходности. 3. Однофакторная модель Даффи – Кана // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 3 (20). С. 71–80.
3. *Chen L.* A Three Factor of the Affine Term Structure of Interest Rates and its Application to the Pricing of Interest Rate Derivatives. N.Y.: Blackwell Publishers, 1996.

4. *Dai Q., Singleton K.* Specification analysis of affine term structure models // *J. Finance.* 2000. V. 55(5). P. 1943–1978.
5. *Медведев Г.А.* О временной структуре доходности. 4. Двухфакторные модели Даффи – Кана // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика.* 2012. № 4 (21). С. 89–99.
6. *Ahn D.-H., Gao B.* A parametric nonlinear model of term structure dynamics // *The Review of Financial Studies.* 1999. V. 12. No. 4. 721–762.
7. *BDFS: Balduzzi P., Das S., Foresi S., Sundaram R.* A simple approach to three factor affine term structure models // *J. Fixed Income.* 1996. V. 6. P. 43–53.

*Медведев Геннадий Алексеевич*

Белорусский государственный университет

E-mail: MedvedevGA@cosmostv.by

Поступила в редакцию 30 июня 2012 г.

*Medvedev Gennady A.* (Belarusian State University). **On term structure of yield rates. 6. The three factor model.**

Keywords: yield interest rates, affine model, yield curve, forward curve, three factor model.

Models of Duffie – Kan, describing dynamics of a short-term interest rate in a case when the condition of the financial market is characterized not only level of the most interest rate, but also two more the time variable parameters are investigated. Three versions of expansion of one-factor model to three-factor, allowing to get affine term structure of yield are considered. These versions assume that parameters of one-factor model – level of return of an interest rate and its volatility – are not constants, and diffusion processes. In the first version volatility of process of level of return of an interest rate doesn't depend on the level and is stochastic. In the second version process of level of return of an interest rate is process «with a square root». In the third version volatility of process of level of return of an interest rate doesn't depend on the level and is determined. The main attention is given to properties of the yield curve and the forward curve when dynamics of a short-term interest rate is described by the described three-factor models.

With increase in number of factors of model, their analysis essentially become complicated, and receiving of results in an analytical form becomes impossible. The numerical analysis also becomes complicated, as the number of parameters of models grows. Therefore it is not possible to carry out all-round comparison of models, their advantages and lacks in a volume of article. Properties of yields for one set of the parameters found D. An and B. Gao at processing of real financial data is given only. Wider comparison of models should be made in the future. Data on what and how many parameters are used for creation of the considered models are provided.

In the interval of time to maturity change from zero to indefinitely the yield curves and the forward curves for all models start from the single points – the current value a spot rate and converge to the corresponding limits depending on parameters of model, but not depending on values of the current level of state variables. These limiting values generally are defined not only model parameters, but also sets of weight factors and parameters of the prices of risk that considerably complicates formulas. However if to consider that the short-term rate of yield of an asset is defined only a spot rate, stochastic processes of a rate and its instant variance are neutral to risk, and the bottom borders for an interest rate and its variance are equal to zero, formulas for calculation of yield strongly become simpler. Their explicit analytical expressions are given at these assumptions.

Limiting values of yield can be considered as yield of long-term securities. They don't depend on the current value of state variables, and depend only on model parameters. For the considered numerical example the limiting values of yields decrease with increase in number of factors. More valid conclusions can be made after research of yield in all admissible area of ten-measured space of parameters. Comparative research of mutual behavior of yield curves and forward curves in all intervals of terms to maturities asset in all admissible area of parameters is necessary.