УДК 514.8

М.Н. БОЛДЫРЕВА, А.А. МАГАЗЕВ

СИММЕТРИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ТРЕХМЕРНЫХ E(3)-ПОДГРУПП*

Приводится классификация электромагнитных полей, инвариантных относительно трехмерных E(3)-подгрупп. Для каждого электромагнитного поля из полученной классификации вычисляются все операторы первого порядка, коммутирующие с оператором нестационарного уравнения Шредингера.

Ключевые слова: *нестационарное уравнение Шредингера, оператор симметрии, группа инвариантности электромагнитного поля.*

Введение

Систематическое изучение симметрий нестационарного уравнения Шредингера, по-видимому, началось с цикла работ У. Нидерера [1–3], в которых исчерпывающим образом была исследована группа симметрии уравнения Шредингера с произвольным скалярным потенциалом. Примерно в то же время В. Н. Шаповалов и Н. Б. Сухомлин получили полную классификацию всех электромагнитных потенциалов, в которых нестационарное уравнение Шредингера допускало полные наборы операторов симметрии, обеспечивающие возможность разделения переменных [4]. Дальнейшие исследования в этой области носили экстенсивный характер и по существу сводились к поиску потенциалов (в основном, скалярных), в которых нестационарное уравнение Шредингера допускает симметрию в том или ином классе операторов (см., в этой связи, обзорные монографии [5, 6]). Как правило, подобный поиск осуществлялся с позиций того или иного подхода к интегрированию уравнения Шредингера, в подавляющем большинстве случаев сводящегося к разделению переменных.

В отличие от скалярного случая, ситуация с более общими электромагнитными потенциалами до сих пор полностью не исследована даже в классе дифференциальных операторов симметрии первого порядка. Известны лишь алгебры симметрии нестационарного уравнения Шредингера для некоторых частных типов электромагнитных полей (см., например, [7, 8]). Вместе с тем знание этих алгебр представляет интерес с точки зрения построения новых классов электромагнитных потенциалов, допускающих точное интегрирование уравнения Шредингера. Использование операторов симметрии первого порядка особенно важно в методе некоммутативного интегрирования, где с их помощью осуществляется эффективная редукция исходного уравнения к уравнению с меньшим числом независимых переменных [9].

Как известно, максимальная алгебра операторов, коммутирующих с оператором нестационарного свободного уравнения Шредингера, – это 11-мерная алгебра Баргмана, порождаемая генераторами сдвигов P_a и вращений J_a, а также генераторами галилеевских «бустов» $G_a = t\,\partial_a - m\,x_a$, генератором $T = \partial_t$ и скалярным оператором массы. Ясно, что при включении внешнего электромагнитного поля наличие данной алгебры симметрии уже нельзя гарантировать, однако определенная симметрия у уравнения все же может существовать. К сожалению, механизм нарушения симметрии здесь довольно сложный: в общем случае алгебра симметрии уравнения Шредингера в электромагнитном поле является не подалгеброй алгебры Баргмана, а ее некоторой *деформацией*. Указанный факт значительно затрудняет симметрийный анализ нестационарного уравнения Шредингера, в отличие от аналогичной задачи для релятивистских уравнений Клейна – Гордона и Дирака.

В настоящей работе мы вычисляем алгебры симметрии нестационарного уравнения Шредингера для класса внешних электромагнитных полей, инвариантных относительно трехмерных подгрупп группы движений евклидова пространства E(3). Отметим, что такие поля представляют зна-

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 18-07-00526 А).