* *
*

УДК 537.874.3 DOI: 10.17223/00213411/62/5/54

В.В. ФИСАНОВ[1,2,3]

ФОРМУЛИРОВКА ЗАКОНОВ СНЕЛЛИУСА – ДЕКАРТА В ТЕРМИНАХ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ[*]

Даётся формулировка законов отражения и преломления оптических лучей поверхностью раздела двух изотропных сред с использованием математического аппарата геометрической алгебры. Рассмотрены случаи зеркального отражения, положительного и отрицательного преломления, преломления в присутствии метаповерхности.

Ключевые слова: *изотропные среды, метаматериалы, прямые и обратные волны, отражение, преломление, геометрическая алгебра.*

Закон зеркального отражения и закон преломления световых лучей гладкой поверхностью раздела двух изотропных сред (законы Снеллиуса – Декарта) в скалярном варианте были предложены в середине XVII в., их математические формулировки являются общеизвестными и широко применяются. Менее известна векторная формулировка этих законов, которая используется для трассировки лучей, например в компьютерной графике. Она до сих пор сохраняет актуальность и обсуждается не только в педагогическом отношении (например, [1–6]), но и в связи с новыми волновыми эффектами (отрицательное преломление, отражение и преломление в присутствии метаматериалов и метаповерхностей) [7–9]. В литературе встречаются также формулировки этих законов с использованием иных математических средств [10], в том числе геометрической алгебры [11–13]. Цель данной работы – предложить и обобщить формулировки законов Снеллиуса – Декарта в терминах геометрической алгебры, пригодные для применения при наличии электромагнитных метаматериалов.

Геометрическая алгебра $\mathcal{G}_3$ трёхмерного физического (Евклидова) пространства $\mathbb{R}^3$ происходит от разработанной в середине XIX в. алгебры Клиффорда. Хотя У. Клиффорд уже пользовался термином «геометрическая алгебра», её подлинным создателем и активным пропагандистом является Д. Хестенес [14, 15]. Геометрическая алгебра удивительным образом объединяет алгебру комплексных чисел, кватернионов и векторное исчисление, она изящно описывает операции отражения и вращения. В последнее время геометрическая алгебра приобретает всё бóльшую популярность в сообществе физиков и инженеров в области радиоэлектроники и информатики (см., например, [16–22]). Литература на русском языке по геометрической алгебре пока невелика [23–26].

З а к о н о т р а ж е н и я. Векторный закон отражения в геометрической оптике выражается формулами [10]

$$\hat{\boldsymbol{q}} \times \hat{\boldsymbol{s}}_i = \hat{\boldsymbol{q}} \times \hat{\boldsymbol{s}}_r ; \tag{1}$$

$$\hat{\boldsymbol{q}} \cdot \hat{\boldsymbol{s}}_i = -\hat{\boldsymbol{q}} \cdot \hat{\boldsymbol{s}}_r , \tag{2}$$

где единичные векторы $\hat{\boldsymbol{q}}$, $\hat{\boldsymbol{s}}_i$, $\hat{\boldsymbol{s}}_r$ определяют направление нормали к отражающей поверхности, направление падающего луча и направление отражённого луча соответственно. Используя связь между векторным (знак «$\times$») и свойственным геометрической алгебре внешним (знак «$\wedge$») произведениями векторов вида $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -i\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$, где символ i обозначает единичный тривектор (мультивектор 3-го ранга), который в $\mathcal{G}_3$ является псевдоскаляром, перепишем (1) в виде

$$\hat{\boldsymbol{q}} \wedge \hat{\boldsymbol{s}}_i = \hat{\boldsymbol{q}} \wedge \hat{\boldsymbol{s}}_r . \tag{3}$$

Формула (3) имеет ясный геометрический смысл: она утверждает равенство бивекторов падающей и отражённой волн. Как известно [1], формула (1) должна быть дополнена формулой (2), для того чтобы выделить правильное направление отражённого луча. Скалярное произведение векторов

[*] Работа поддержана Программой повышения конкурентоспособности Томского государственного университета среди ведущих мировых научно-образовательных центров.