МАТЕМАТИКА

УДК 517.584 MSC 33C10
DOI 10.17223/19988621/60/1

А.А. Гималтдинова[1], Е.П. Аносова

О НУЛЯХ КОМБИНАЦИИ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

Исследуются функции, являющиеся суммой или разностью произведений функции Бесселя и модифицированной функции Бесселя с разными индексами. Изучается множество нулей таких функций. С помощью теоремы Штурма о разделении корней дифференциального уравнения доказано, что такая комбинация имеет счетное множество положительных нулей и счетное множество чисто мнимых нулей с положительной мнимой частью.

Ключевые слова: *функция Бесселя, модифицированная функция Бесселя, множество нулей функции, теорема Штурма.*

При исследовании краевых или спектральных задач (например, [1]) для уравнений смешанного типа со степенным вырождением возникает необходимость (при нахождении собственных значений) нахождения нулей функции вида

$$f_\nu(t) = J_\nu(t)I_{-\nu}(t) + I_\nu(t)J_{-\nu}(t),\ 0<\nu<1, \tag{1}$$

при $\operatorname{Re} t > 0$, где $J_\nu(\cdot)$ – функция Бесселя первого рода порядка ν, $I_\nu(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка ν.

Изучению нулей комбинаций произведений цилиндрических функций посвящено относительно небольшое количество исследований. Например, в справочнике [2] приведены таблицы нескольких первых корней уравнения $J_\nu(x)N_\nu(kx) - J_\nu(kx)N_\nu(x) = 0$ для некоторых значений k и ν, а также первых корней уравнения $I_n(x)J_n'(x) - J_n(x)I_n'(x) = 0$ для $n = 0,1,2,3$.

В некоторых случаях комбинации произведений функций Бесселя представляют собой элементарные функции, и тогда вопрос об их корнях решается элементарно, например [3, с. 91]:

$$J_\nu(z)Y_{\nu-1}(z) - Y_\nu(z)J_{\nu-1}(z) = \frac{z}{\pi z},$$

$$I_\nu(z)I_{-\nu+1}(z) - I_{-\nu}(z)I_{\nu-1}(z) = -\frac{2\sin(\nu\pi)}{\pi z}.$$

В книге [4] приведен обзор работ, посвященных изучению нулей функций, содержащих произведения бесселевых функций, но функция (1) или аналогичные ей не исследованы.

[1] Работа первого автора поддержана грантом РФФИ-РБ (проект 17-41-020516).

В большой обзорной статье [5] приведены классические результаты по теории бесселевых функций, основные сведения о нулях функций Бесселя и их производных и методах их вычисления. Описан метод Эйлера вычисления малых нулей функций Бесселя, метод Стокса вычисления больших нулей функций Бесселя, а также другие методы. Отмечено, что можно использовать теорему Штурма [6, с.136] о разделении нулей решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, и показано ее применение для функций Бесселя. Однако там не рассматриваются комбинации вида (1).

В [4, с.336] приведен ряд формул, позволяющих свести произведения бесселевых функций к обобщенной гипергеометрической функции, например

$$J_{-\nu}(z)I_\nu(z)=\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}\,{}_0F_3\left(1;1-\frac{\nu}{2},1+\frac{\nu}{2},\frac{1}{2};-\frac{z^4}{64}\right)-$$
$$-\frac{\sin(\pi\nu)}{2\pi(1-\nu^2)}\,{}_0F_3\left(1;\frac{3-\nu}{2},\frac{3+\nu}{2},\frac{3}{2};-\frac{z^4}{64}\right), \tag{2}$$

где ${}_0F_3(a;b,c,d;z)$ – обобщенная гипергеометрическая функция. С учетом формулы (2) функцию (1) можно привести к виду

$$f_\nu(t)=\frac{2\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}\,{}_0F_3\left(1;1-\frac{\nu}{2},1+\frac{\nu}{2},\frac{1}{2};-\frac{t^4}{64}\right). \tag{3}$$

Однако обобщенная гипергеометрическая функция очень мало изучена, и в литературе нет утверждений о ее нулях.

Есть ряд работ, посвященных численным алгоритмам вычисления нулей бесселевых функций (например, [7]), однако и в этих работах не рассматриваются комбинации произведений цилиндрических функций. Кроме того, численные методы позволяют найти лишь конечное число нулей какой-либо функции.

Таким образом, в известных нам классических или современных работах нет каких-либо результатов о нулях функции (1).

В настоящей работе при помощи теоремы о разделении корней будет получена теорема о множестве нулей функции более общего вида, чем (1), а также рассмотрены конкретные примеры.

Утверждения о нулях функций

Рассмотрим функцию $f^{(1)}_{\nu,\mu}=J_\nu(t)I_{-\mu}(t)+I_\mu(t)J_{-\nu}(t),\ \nu,\mu\in\mathbf{R},\nu,\mu\notin\mathbf{N}$.

Теорема. *Уравнение*

$$J_\nu(t)I_{-\mu}(t)+I_\mu(t)J_{-\nu}(t)=0 \tag{4}$$

имеет счетное множество действительных положительных корней и счетное множество чисто мнимых корней с положительной мнимой частью. При этом каждый положительный корень находится на интервале между двумя последовательными нулями функции $J_\nu(t)$ (*равно как и между двумя последовательными нулями функции* $J_{-\nu}(t)$), *а каждый чисто мнимый корень – между двумя последовательными нулями функции* $I_\mu(t)$ (*или* $I_{-\mu}(t)$).

Доказательство. 1) Пусть $t=x\in\mathbf{R}_+$. В силу того, что

$$(\forall x>0)(I_\mu(x)>0,\,I_{-\mu}(x)>0),$$

из уравнения (4) получим

$$\frac{J_\nu(t)}{I_\mu(t)} = -\frac{J_{-\nu}(t)}{I_{-\mu}(t)}. \tag{5}$$

При этом функция $\tilde{f}_1(t) = J_\nu(t)/I_\mu(t)$ имеет те же нули, что и функция $J_\nu(t)$, а функция $\tilde{f}_2(t) = -a\,J_{-\nu}(t)/I_{-\mu}(t)$ имеет такие же нули, что и функция $J_{-\nu}(t)$.

Далее применим теорему о разделении корней [6, с.136]. В силу того, что функции $J_\nu(t)$ и $J_{-\nu}(t)$ при нецелом ν являются линейно независимыми решениями уравнения Бесселя, нули функций $J_\nu(t)$ и $J_{-\nu}(t)$ взаимно разделены. Следовательно, и нули функций $\tilde{f}_1$ и $\tilde{f}_2$ также взаимно разделены. Это означает, что между любыми двумя соседними корнями функции $\tilde{f}_1$ найдется ровно один корень функции $\tilde{f}_2$, и наоборот. Отсюда, в силу непрерывности обеих этих функций, получим, что их графики пересекаются ровно в одной точке на каждом интервале между любыми двумя соседними корнями функции $J_\nu(t)$ (а также между любыми двумя соседними корнями функции $J_{-\nu}(t)$).

Это означает, что уравнение (5) имеет счетное множество положительных корней. А зная нули функций $J_\nu(t)$ и $J_{-\nu}(t)$, можно отделить промежутки, на которых находятся корни уравнения (5).

2) Пусть $t = iy \in \mathbf{C}, y \in \mathbf{R}_+$. Рассуждая аналогично, получим, что уравнение $I_\mu(iy)/J_\nu(iy) = -I_{-\mu}(iy)/J_{-\nu}(iy)$ имеет счетное множество чисто мнимых корней. ■

Замечание 1. Остается невыясненным вопрос, имеет ли уравнение (4) другие комплексные корни, отличные от найденных чисто мнимых. Можно предположить, что других комплексных корней нет. Ниже будет разъяснено это предположение.

Замечание 2. Аналогично можно получить утверждение о счётности множества нулей функции $f^{(2)}_{\nu,\mu} = J_\nu(t)I_{-\mu}(t) - I_\mu(t)J_{-\nu}(t).$

Пример 1. Пусть требуется найти положительные нули функции

$$f_{1/2}(x) = J_{1/2}(x)I_{-1/2}(x) + I_{1/2}(x)J_{-1/2}(x).$$

На основании доказанной теоремы (где $\nu = \mu = 1/2$) можем утверждать, что функция имеет счетное множество положительных нулей. Из известных представлений [2, с. 198] бесселевых функций с полуцелым индексом в виде элементарных функций:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,\; J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\,,$$

можем выписать неотрицательные корни функции $J_{1/2}(x)$ и $J_{-1/2}(x)$: πk и $\pi/2 + \pi k$ соответственно, где $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Тогда первый положительный нуль функции $f_{1/2}(t)$ будет находиться на интервале $(\pi/2, \pi)$, второй – на интервале $(3\pi/2, 2\pi)$, …, k-й корень – на интервале $((k-1/2)\pi, k\pi)$.

С другой стороны, учитывая представления для модифицированных функций $I_{1/2}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\,\mathrm{sh}\,x$, $I_{-1/2}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\,\mathrm{ch}\,x$, функцию $f_{1/2}(x)$ можем записать в виде $f_{1/2}(x)=\dfrac{2}{\pi x}(\sin x\cdot\mathrm{ch}\,x+\cos x\cdot\mathrm{sh}\,x)$, то есть для нахождения нулей этой функции следует решить уравнение $\mathrm{tg}\,x=-\,\mathrm{th}\,x$. Корни последнего уравнения найдены в работе [8]:

$$x=0,\quad x=\pm\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k+O(e^{-2\pi k})\right),\ k\in\mathbf{N},$$

$$x=\pm i\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k+O(e^{-2\pi k})\right),\ k\in\mathbf{N}.$$

Итак, положительные нули функции $f_{1/2}(x)$ задаются формулой

$$x=-\frac{\pi}{4}+\pi k+O(e^{-2\pi k}).$$

Также в работе [8] доказано, что нет других комплексных корней, кроме найденных чисто мнимых. Учитывая, что для частного случая функции (1) – функции $f_{1/2}(x)$ – нет других комплексных корней, можно предположить, что их не будет и в общем случае для функции $f^{(1)}_{\nu,\mu}(t)$.

Замечание 3. Полученные в примере 1 результаты о нулях функции $f_{1/2}(x)$ дают новые сведения и об обобщенной гипергеометрической функции (3) при $\nu=1/2$.

Пример 2. Аналогично можно найти положительные нули функции

$$\hat{f}_{1/2}(x)=J_{1/2}(x)I_{-1/2}(x)-I_{1/2}(x)J_{-1/2}(x).$$

Преобразуем функцию к виду $\hat{f}_{1/2}(x)=\dfrac{2}{\pi x}(\sin x\cdot\mathrm{ch}\,x-\cos x\cdot\mathrm{sh}\,x)$, тогда на основании результатов работы [9] можем записать положительные нули функции $\hat{f}_{1/2}(x)$: $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k+O(e^{-2\pi k})$.

Пример 3. Оценить первый положительный корень функции

$$f_{1/4}(x)=J_{1/4}(x)I_{-1/4}(x)+I_{1/4}(x)J_{-1/4}(x).$$

Используя таблицу значений функций $J_{1/4}(x)$ и $J_{-1/4}(x)$, можно убедиться, что первый положительный корень функции $f_{1/4}(x)$ находится в интервале (2;2,7). В этом случае более точную оценку можно найти только с помощью численных алгоритмов.

Выводы

Показано применение теоремы Штурма о разделении нулей к исследованию функции, являющейся комбинацией произведений функций Бесселя. Отмечено, как можно отделить промежутки нахождения нулей такой функции. Это позволит вместе с применением численных алгоритмов провести более полное изучение функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гималтдинова А.А.* Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями перехода в прямоугольной области // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2014. № 19 (190). С. 5–16.
2. *Янке Е.*, *Эмде Ф.*, *Лёш Ф.* Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1977. 344 с.
3. *Бейтмен Г.*, *Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974. 296 с.
4. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980. 608 с.
5. *Керимов М.К.* Исследования о нулях специальных функций Бесселя и методах их вычисления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. № 9. С. 1387–1441. DOI: 10.7868/S004446614090087
6. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. М.: ИЛ, 1962. 352 с.
7. *Алгазин С.Д.* О табулировании с высокой точностью нулей функции Бесселя // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2013. Вып. 1. С. 132–141.
8. *Гималтдинова А.А.* Задача Дирихле для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области // Докл. АН. 2015. Т. 460. № 3. С. 260–265. DOI: 10.7868/S0869565215030056.
9. *Гималтдинова А.А.* Задача Неймана для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области // Докл. АН. 2016. Т. 466. № 1. С. 7–11. DOI: 10.7868/S0869565216010059.

Статья поступила 09.10. 2018 г.

Gimaltdinova A.A., Anosova E.P. (2019) ON ZEROS OF THE COMBINATION OF PRODUCTS OF BESSEL FUNCTIONS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 60. pp. 5–10

DOI 10.17223/19988621/60/1

Keywords: Bessel function, modified Bessel function, set of zeros of the function, Sturm theorem.

In this paper, the function $f_\nu(t) = J_\nu(t)I_{-\nu}(t) + I_\nu(t)J_{-\nu}(t), 0 < \nu < 1,$ $\mathrm{Re}\, t > 0$, is investigated. Such functions were little studied in the literature. It is proved that more general functions $f_{\nu,\mu}^{(1),(2)}(t) = J_\nu(t)I_{-\mu}(t) \pm I_\mu(t)J_{-\nu}(t)$ have a countable set of real zeros and a countable set of pure imaginary zeros. The proof uses the well-known Sturm theorem for second-order differential equations. The statement is applied to specific examples. In the case $\nu = 1/2$, the function $f_{1/2}(x) = J_{1/2}(x)I_{-1/2}(x) + I_{1/2}(x)J_{-1/2}(x)$ is reduced to an elementary function $f_{1/2}(x) = \dfrac{2}{\pi x}(\sin x \cdot \cosh x + \cos x \cdot \sinh x)$, and an asymptotic formula for its positive zeros $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k + O(e^{-2\pi k})$ is found. Function $\hat{f}_{1/2}(x) = J_{1/2}(x)I_{-1/2}(x) - I_{1/2}(x)J_{-1/2}(x)$ has the following positive zeros: $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k + O(e^{-2\pi k})$.

AMS Mathematical Subject Classification: 33C10

Financial support. The work is supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant no. 17-41-020516).

GIMALTDINOVA Alfira Avkalevna (Candidate of Physics and Mathematics, Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russian Federation) E-mail: aa-gimaltdinova@mail.ru

ANOSOVA Elizaveta Petrovna (Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russian Federation) E-mail: ae0809@mail.ru

REFERENCES

1. Gimaltdinova A.A. (2014) Zadacha Dirikhle dlya uravneniya smeshannogo tipa s dvumya perpendikulyarnymi liniyami perekhoda v pryamougolnoy oblasti [Dirichlet problem for a mixed-type equation with two perpendicular transition lines in a rectangular domain]. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Fizika.* 19(190). pp. 5–16.
2. Jahnke E., Emde F., Lösch F. (1960) *Tafeln höhere Funktionen.* Stuttgart. 344 p.
3. Bateman H., Erdelyi A. (1953) *Higher Transcendental Functions. V.2*. New York. 296 p.
4. Luke Y.L. (1975) *Mathematical functions and their approximations.* New York: Academic Press Inc.
5. Kerimov M.K. (2014) Studies on the zeros of Bessel functions and methods for their computation. *Computational mathematics and mathematical physics*. 54(9). pp. 1337–1388. DOI: 10.1134/S0965542514090073.
6. Tricomi F.G. (1961) *Differential equations*. Blackie & son Limited. 352 p.
7. Algazin S.D. (2013) O tabulirovanii s visokoy tochnost'yu nuley funktsii Besselya [About tabulating the zeros of the Bessel functions with high precision]. *Izvestija Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki.* 1. pp. 132–141.
8. Gimaltdinova A.A. (2015) The Dirichlet problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation with two type-change lines in a rectangular domain. *Doklady Mathematics.* 91(1). pp. 41–46. DOI: 10.1134/S1064562415010147.
9. Gimaltdinova A.A. (2016) Neumann problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation with two type-change lines in a rectangular domain. *Doklady Mathematics*. 93(1). pp. 1–5. DOI: 10.1134/S1064562416010038.

Received: October 9, 2018