ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2019 Математика и механика № 60

УДК 517.54 MSC 30C20, 30C30
DOI 10.17223/19988621/60/4

И.А. Колесников

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АКЦЕССОРНЫХ ПАРАМЕТРОВ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ИЗ ВЕРХНЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ НА ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ СЧЕТНОУГОЛЬНИКИ С ДВОЙНОЙ СИММЕТРИЕЙ И КРУГОВЫЕ СЧЕТНОУГОЛЬНИКИ[1]

Решается задача об определении параметров конформного отображения из полуплоскости на многоугольник с бесконечным количеством вершин (счетноугольник). Рассматриваются счетноугольники, обладающие свойством симметрии переноса, с границей, состоящей из дуг окружностей, и счетноугольники обладающие симметрией относительно двух вертикальных прямых $w=iv$, $w=\pi+iv$, $v\in\mathbb{R}$, с границей, состоящей из отрезков прямых. Для определения параметров отображений из полуплоскости на такие области распространяется метод П.П. Куфарева определения параметров в интеграле Шварца – Кристоффеля.

Ключевые слова: *конформное отображение*, *уравнение Шварца*, *интеграл Шварца – Кристоффеля*, *счетноугольник*, *акцессорные параметры*, *метод П.П. Куфарева.*

Область Δ называют областью с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π, если при линейном преобразовании $L(w) = w + 2\pi$ область остается неизменной $L(\Delta) = \Delta$.

Область Δ называют областью типа полуплоскости, если при преобразовании $L(w) = w + 2\pi$ среди всех простых концов границы области Δ в бесконечно удаленной точке неподвижным остается только один простой конец.

Счетноугольником типа полуплоскости называется односвязная область Δ типа полуплоскости, обладающая свойством симметрии переноса вдоль вещественной оси на 2π, и такая, что часть границы области от точки w_0 до точки $w_0+2\pi$ состоит из конечного числа дуг окружностей.

Такую область называют также периодическим многоугольником [1]. Будем использовать термин «счетноугольник», следуя работе [2].

В настоящей статье рассматриваются счетноугольники с границей, состоящей из дуг окружностей (для краткости будем называть их круговыми счетноугольниками), и счетноугольники с границей, состоящей из прямолинейных отрезков, обладающие симметрией относительно вертикальных прямых $w=iv$, $w=\pi+iv$, $v\in\mathbb{R}$ (для краткости будем называть их прямолинейными счетноугольниками с двойной симметрией).

Конформные отображения полуплоскости на счетноугольники, ограниченные дугами окружностей или отрезками прямых, имеют приложения в различных задачах математической физики [3–6]. Численный метод нахождения конформных отображений на счетноугольники предложен в работе [7]. С помощью алгебры

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00190\18.

сверток и теории рядов Фробениуса в работе [1] рассмотрен метод построения конформных отображений на полигональные области, в том числе счетноугольники типа полуплоскости. С помощью параметрического метода Левнера получено дифференциальное уравнение [8] типа дифференциального уравнения Левнера для отображения верхней полуплоскости на области с симметрией переноса на 2π.

В работе [2] с помощью принципа симметрии Римана – Шварца, а в работе [9] с помощью формулы Шварца получен интеграл Шварца – Кристоффеля для отображений верхней полуплоскости на счетноугольники с границей, состоящей из отрезков прямых. Интеграл Шварца – Кристоффеля распространен для отображений из верхней полуплоскости на прямолинейные счетноугольники с двойной симметрией [10]. В работе [11] для отображения из полуплоскости на круговой счетноугольник получено дифференциальное уравнение типа уравнения Шварца.

В следующей теореме представлен классический интеграл Шварца – Кристоффеля [4].

Теорема 1. *Пусть D, $D \in \mathbb{C}$, – многоугольник с вершинами в точках $A_1,\dots,A_n$ и внутренними углами $\alpha_k\pi$, где $\alpha_k \in (0,1)\cup(1,2]$, если A_k конечная, и $\alpha_k \in [-2,0]$, если $A_k = \infty$. Тогда существует конформное однолистное отображение f верхней полуплоскости $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ на D, и любое такое отображение может быть представлено в виде*

$$f(z) = c_1 \int_{z_0}^{z} \prod_{k=1}^{n} (\xi - a_k)^{\alpha_k - 1} d\xi + c_2,$$

где $a_1,\dots,a_n$ – прообразы вершин $A_1,\dots,A_n$; c_1, c_2 – константы.

Для производной Шварца отображения f будем использовать обозначение

$$\{f(z), z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2 .$$

Автором [11] получена следующая теорема.

Теорема 2. *Функция f, однолистно и конформно отображающая верхнюю полуплоскость Π^+ на круговой счетноугольник Δ с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π* так, что $f(\infty) = \infty$, *удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\{f(z), z\} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{L_k}{2}\sin^{-2}\frac{z - a_k}{2} + M_k \operatorname{ctg}\frac{z - a_k}{2}\right) + g(z), \tag{1}$$

где a_k, $k = 1,2,\dots,n$, – прообразы вершин A_k^0 счетноугольника, принадлежащие промежутку [0,2π), *$L_k = \frac{1}{2}\left(1-\alpha_k^2\right)$; $\alpha_k\pi$, $\alpha_k \in [0,2]$, $k = 1,2,\dots,n$, – углы при вершинах A_k^0; M_k, $k = 1,2,\dots,n$, – вещественные константы (называемые акцессорными параметрами), $g = g(z)$ – целая функция.*

Как известно, трудность применения формулы типа Шварца – Кристоффеля заключается в проблеме определения прообразов вершин $a_1,\dots,a_n$ и констант c_1, c_2.

Были разработаны различные эффективные методы для численного нахождения этих параметров [4, 12]. Один из таких методов был предложен П.П. Куфаревым [13] (см. также [14, 15]). Метод сводит задачу определения параметров отображения единичного круга на многоугольник с внутренней нормировкой к задаче решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для частных случаев метод был реализован впервые в работе [16], а затем в [17]. В работе [18], (см. также [19]) метод распространен для отображений с граничной нормировкой. В работах [20, 21] с использованием идеи П.П. Куфарева и аппарата краевой задачи Гильберта предложен новый подход нахождения параметров отображения. В [22] метод обобщается на случай отображений на многолистные многоугольники, содержащие точки ветвления. Автор [23] распространил метод для отображений из полуплоскости на прямолинейные счетноугольники с симметрией переноса. В [24, 25] метод обобщен для решения проблемы определения параметров в дифференциальном уравнении Шварца, представляющего конформное отображение верхней полуплоскости на круговой многоугольник.

Ниже приведем теорему, полученную в работе [18].

Пусть D – многоугольник, ограниченный конечным числом отрезков прямых и лучей. Зафиксируем точку на границе D и из этой точки проведем прямолинейный разрез переменной длины внутрь области D. Обозначим через $\Lambda(t)$ подвижный конец разреза, зависящий от вещественного параметра t. При $t=0$ длина разреза равна нулю, возрастание параметра t соответствует возрастанию длины разреза. Обозначим область с разрезом через $D(t)$, а вершины многоугольника $D(t)$ через $B_1, B_2, ..., B_j, \Lambda(t), B_{j+1}, ..., B_{n+1}$. Пусть $w = w(\chi, t)$ конформно отображает верхнюю полуплоскость Π^+ на $D(t)$ и пусть отображение w удовлетворяет условиям граничной нормировки: $w(\infty, t) = B_1$, $w(0,t) = B_n$, $w(1,t) = B_{n+1}$. С помощью теоремы 1 для любого t можем представить отображение w в виде интеграла типа Шварца – Кристоффеля.

Теорема 3. *Для любого* $t \in [0, T]$ *параметры* $p_k(t)$, $\lambda_0(t)$, $c_2(t)$ *отображения*

$$w(\chi, t) = c_2(t) \int_0^{\chi} (\xi - \lambda_0(t)) \prod_{k=2}^{n+1} (\xi - p_k(t))^{\delta_k} \, d\xi + A_n, \tag{2}$$

переводящего верхнюю полуплоскость на многоугольник $D(t)$ *с прямолинейным разрезом, удовлетворяет системе дифференциальных уравнений*

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = -\frac{p_k(t)(p_k(t)-1)}{\lambda_0(t) - p_k(t)}, \quad k = 2, ..., n-1; \tag{3}$$

$$\frac{d\lambda_0(t)}{dt} = \lambda_0(t)(\lambda_0(t)-1) \sum_{k=2}^{n+1} \delta_k \frac{1}{\lambda_0(t) - p_k(t)} + 2\lambda_0(t) - 1; \tag{4}$$

$$\frac{d \ln c_2(t)}{dt} = -\sum_{k=2}^{n+1} \delta_k - 2, \tag{5}$$

с начальными условиями

$$p_k(0) = w^{-1}(B_k, 0), \quad k = 2, ..., n-1,$$

$$p_j(0)=p_{j+1}(0)=\lambda_0(0)=w^{-1}(B_j,0),$$

$$c_2(0)=c,$$

где $p_k(t)$ *– прообразы вершин* B_k *многоугольника* $D(t)$, $k=1,...,n+1$, $p_1=\infty$, $p_n=0$, $p_{n+1}=1$; $\lambda_0(t)$ *– прообраз подвижного конца разреза,* $p_1<p_2(t)<...<p_j(t)<\lambda_0(t)<p_{j+1}(t)<...<p_{n-1}(t)<p_n<p_{n+1}$ *при* $t\in(0,T)$; $\delta_k=\beta_k-1$, $\beta_k\pi$ *– углы при вершинах* B_k, $k=1,...,n+1$.

Замечание. Если разрез замыкается на границу многоугольника $D(t)$ при *t*, стремящемся к *T*, то многоугольник $D(t)$ разделяется на два многоугольника, обозначим их D^* и D^{**}. Пусть граница многоугольника D^* содержит отрезки B_1B_{n+1} и B_nB_{n+1}, тогда семейство отображений $w=w(z,t)$ сходится равномерно внутри верхней полуплоскости к отображению $w(z,T)$, переводящему верхнюю полуплоскость Π^+ на D^*, при *t* стремящемся к *T* согласно (обобщенной) теореме Каратеодори [26].

Следующая теорема получена в [8].

Теорема 4. *Пусть* $f=f(z,t)$ *– семейство голоморфных и однолистных отображений* $f:\Pi^+\to D(t)$, $D(t)$ *– семейство односвязных областей типа полуплоскости с симметрией переноса вдоль вещественной оси на* 2π, *получающееся проведением в области* D, *являющейся счетноугольником, разрезов вдоль аналитических кривых* $\gamma_m=\gamma_0+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$, $\gamma_0=\gamma_0(t)$, $0\le t\le T$. *Существует такая параметризация разреза* γ_0, *что*

$$\lim_{\operatorname{Im} z\Rightarrow+\infty}\left(f(z,t)-z\right)=0 \tag{6}$$

и семейство отображений f *удовлетворяет дифференциальному уравнению типа уравнения Левнера*

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t}=\frac{\partial f(z,t)}{\partial z}\operatorname{ctg}\frac{\lambda(t)-z}{2}, \tag{7}$$

где $\lambda(t)$ *– прообраз конца кривой* $\gamma_0(t)$ *при отображении* $f=f(z,t)$. *Предел* (6) *равномерный относительно вещественной части z.*

Заметим, что произвольный круговой счетноугольник Δ можно рассматривать как ядро семейства счетноугольников $D(t)$, $0\le t\le T$, относительно некоторой точки w_0, $\Delta=D(T)$.

В данной работе метод Куфарева определения параметров в интеграле Шварца – Кристоффеля распространяется на случай круговых счетноугольников и прямолинейных счетноугольников с двойной симметрией. Прямолинейные счетноугольники с симметрией переноса рассмотрены в работе автора [23]. В разделе 1 с помощью теоремы 3 получена система обыкновенных дифференциальных уравнений (9), (10) с начальными условиями Коши для определения параметров отображения из полуплоскости на прямолинейный счетноугольник с двойной симметрией. В разделе 2 уточнено (лемма 1) уравнение для отображения из полуплоскости на круговой счетноугольник из [11]. Получена система обыкновенных дифференциальных уравнений (15) – (17) с начальными условиями Коши для определения параметров отображения из полуплоскости на круговой счетноугольник. Методом рядов доказано существование и единственность решения этой системы. Численно найдены параметры отображения из полуплоскости на конкретный круговой счетноугольник.

1. Прямолинейный счетноугольник с двойной симметрией

Пусть Δ – прямолинейный счетноугольник с двойной симметрией – односвязная область типа полуплоскости, обладающая симметрией относительно прямых $w = iv$, $w = \pi + iv$, $v \in \mathbb{R}$, и такая, что часть границы области Δ от точки w_0 до точки $w_0 + 2\pi$ состоит из конечного числа отрезков прямых.

Не умаляя общности, точку множества $\{w \in \mathbb{C} : w = iv, v \in \mathbb{R}\} \bigcap \partial\Delta$ с наибольшей мнимой частью будем считать вершиной счетноугольника Δ; обозначим ее A_1^0. Если вершина A_1^0 принадлежит отрезку границы счетноугольника Δ, то угол при этой вершине равен π. Аналогично, точку A_n^0 множества $\{w \in \mathbb{C} : w = \pi + iv, v \in \mathbb{R}\} \bigcap \partial\Delta$ с наибольшей мнимой частью будем считать вершиной счетноугольника Δ.

Зафиксируем точки $A_*^m = A_*^0 + 2\pi m$ и точки $A_{**}^m = 2\pi(m+1) - \overline{A}_*^0$ на границе счетноугольника Δ, $m \in \mathbb{Z}$, где A_*^0 – точка, лежащая на части границе $\partial\Delta$ от точки A_1^0 до точке A_n^0. Из точек A_*^m и A_{**}^m проведем внутрь области Δ прямолинейные разрезы переменной длины, зависящей от вещественного параметра t, до точек $\Lambda_*^m(t) = \Lambda_*^0(t) + 2\pi m$ и $\Lambda_{**}^m(t) = 2\pi(m+1) - \overline{\Lambda}_*^0(t)$ соответственно, $0 \le t \le T$, $m \in \mathbb{Z}$. Пусть при $t = 0$ длина разреза равна нулю. Обозначим через $\lambda(t)$ прообраз подвижного конца разреза $\Lambda_*^0(t)$, пусть $0 \le \lambda(t) \le \pi$ при $0 \le t \le T$. Область Δ с разрезами обозначим через $\Delta(t)$, область $\Delta(t)$ является счетноугольником с двойной симметрией.

Обозначим $A_1^0, A_2^0, \dots, A_j^0, \Lambda_*^0(t), A_{j+1}^0, \dots, A_{2n-2}^0, A_1^1$, $A_1^1 = A_1^0 + 2\pi$, $1 \le j \le n-1$, вершины счетноугольника $\Delta(t)$, лежащие в полосе $P_{2\pi} = \{w \in \mathbb{C} : 0 \le \operatorname{Re} w \le 2\pi\}$, двигаясь вдоль границы Δ в положительном направлении, и углы при этих вершинах $(2\alpha_1 - 1)\pi, \alpha_2\pi, \alpha_3\pi, \dots, \alpha_j\pi, \pi, \alpha_{j+1}\pi, \dots, \alpha_{n-1}\pi, (2\alpha_n - 1)\pi, \alpha_{n+1}\pi, \dots, \alpha_{2n-2}\pi, (2\alpha_1 - 1)\pi$ соответственно. Вершины A_j^0 и A_{j+1}^0 находятся в точке A_*^0. Заметим, что вершина A_{n-s}^0 симметрична вершине A_{n+s}^0, $s = 1, \dots, n-2$, относительно прямой $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w = \pi\}$, $A_1^0 + 2\pi = A_1^1$ и $\alpha_{n-s} = \alpha_{n+s}$, $s = 1, \dots, n-2$.

Остальные вершины A_k^m определяются сдвигом вершин A_k^0 вдоль вещественной оси: $A_k^m = A_k^0 + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, $k = 1, \dots, 2n-2$. Если какая-либо из вершин счетноугольника лежит в бесконечности, то значение угла при этой вершине равняется нулю и не может принимать других значений.

Пусть отображение $f = f(z,t)$ переводит верхнюю полуплоскость на счетноугольник $\Delta(t)$ так, что $f(0,t) = A_1^0$, $f(\pi,t) = A_n^0$, $f(z+2\pi,t) = f(z,t)+2\pi$. Используя результат (теорема 2) работы [10], отображение f можем представить в виде

$$f(z,t) = c_1(t)\int_0^z (\lambda(t)-\cos\xi)\prod_{k=1}^{n}(a_k(t)-\cos\xi)^{\sigma_k}\,d\xi + A_1^0\,, \tag{8}$$

где $a_k(t) = \cos z_k^0(t)$, $z_k^0(t)$ – прообразы вершин A_k^0, $k = 1,\dots,n$, лежащие в полосе $P_\pi = \{w \in \mathbb{C} : 0 \le \operatorname{Re} w \le \pi\}$, $z_1^0(t) = 0$, $z_n^0(t) = \pi$; $\arccos\lambda(t)$ – прообраз подвижного конца разреза $\Lambda_*^0(t)$; $\sigma_k = \alpha_k - 1$, $k = 1,\dots,n$.

Для нахождения параметров $a_k^0(t)$, $\lambda(t)$ и $c_1(t)$ отображения $f = f(z,t)$, $f : \Pi^+ \to \Delta(t)$, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Для любого* t, $0 < t < T$, *параметры* $a_k(t)$, $\lambda(t)$, $c_1(t)$ *отображения* f *из верхней полуплоскости на счетноугольник с двойной симметрией удовлетворяют системе дифференциальных уравнений*

$$\frac{da_k(t)}{dt} = \frac{(\lambda(t)-1)\left(a_k^2(t)-1\right)}{2(a_k(t)-\lambda(t))}, \quad k = 2,\dots,n-1; \tag{9}$$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = \frac{\lambda(t)-1}{2}\left(\left(\lambda^2(t)-1\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma_k}{\lambda(t)-a_k(t)} + \lambda(t)\right); \tag{10}$$

$$c_1(t) = \text{const} = c_1,$$

с начальными условиями

$$a_k(0) = \cos f^{-1}\left(A_k^0, 0\right), \quad k = 2,\dots,n-1,$$

$$\lambda(0) = \cos f^{-1}\left(A_j^0, 0\right) = \cos f^{-1}\left(A_{j+1}^0, 0\right).$$

Доказательство. Обозначим полосу $\{w \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} w < \pi\}$ через P'_π. Область $\Delta(t) \cap P'_\pi$ – многоугольник с углами $\left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\right)\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_{n-1}\pi, \left(\alpha_n - \frac{1}{2}\right)\pi, 0$ при вершинах $A_1^0, A_2^0, \dots, A_j^0, \Lambda_*^0(t), A_{j+1}^0, \dots, A_n^0, A_{n+1}^*$ соответственно; A_{n+1}^* – вершина в бесконечности. Рассмотрим композицию $w \circ \chi : \Pi^+ \cap P'_\pi \to \Delta(t) \cap P'_\pi$, где $\chi(z)$ отображает $\Pi^+ \cap P'_\pi$ на Π^+ так, что $\chi(0) = \infty$, $\chi(\pi) = 0$, $\chi(\infty) = 1$, $\chi(z) = -\operatorname{ctg}^2\frac{z}{2}$, и $w(\chi,t)$ отображает верхнюю полуплоскость Π^+ на многоугольник $\Delta(t) \cap P'_\pi$ так, что $w(\infty,t) = A_1^0$, $w(0,t) = A_n^0$, $w(1,t) = A_{n+1}^0$ при $0 \le t \le T$.

Отображение $w\circ\chi:\Pi^+\bigcap P'_\pi\to\Delta\bigcap P'_\pi$ удовлетворяет при каждом $t,\ 0\le t\le T$, условиям граничной нормировки $w(\chi(0),t)=A_1^0$, $w(\chi(\pi),t)=A_n^0$, $w(\chi(\infty),t)=A_{n+1}^*=\infty$, поэтому единственно. Продолжая аналитически отображение $w(\chi(z),t)$ на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с помощью принципа симметрии Римана – Шварца, получим отображение $w\circ\chi:\Pi^+\to\Delta(t)$. Таким образом $w(\chi(z),t)=f(z,t)$ и отображение f единственно.

Отображение $w=w(\chi,t)$ удовлетворяет условиям теоремы 3, если положить $D(t)=\Delta(t)\bigcap P'_\pi$, $B_k=A_k^0$, $k=1,...,n$, $B_{n+1}=A_{n+1}^*$, $\beta_k=\alpha_k$, $k=2,...,n-1$, $\beta_1=\alpha_1-\frac{1}{2}$, $\beta_n=\alpha_n-\frac{1}{2}$, $\beta_{n+1}=0$, следовательно, отображение $w=w(\chi,t)$ может быть представлено интегралом (2), параметры которого $p_k(t)$, $\lambda_0(t)$, $c_2(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (3)–(5) с начальными условиями

$$p_k(0)=f^{-1}\left(A_k^0,0\right),\quad k=2,...,n-1,$$

$$p_j(0)=p_{j+1}(0)=\lambda_0(0)=f^{-1}\left(A_j^0,0\right),$$

$$c_2(0)=c.$$

Заметим, что так как $p_k(t)=\chi(z_k(t))=-\mathrm{ctg}^2\frac{z_k(t)}{2}$, то параметры $p_k(t)$, $k=1,...,n$, отображения $w(\chi,t)$ связаны с параметрами $a_k(t)$ отображения $w(\chi(z),t)$ следующими формулами:

$$p_k(t)=\frac{a_k(t)+1}{a_k(t)-1},\quad k=1,...,n,\tag{11}$$

а также

$$\lambda_0(t)=\frac{\lambda(t)+1}{\lambda(t)-1}.\tag{12}$$

Подставив (11) и (12) в уравнение (3), получим дифференциальные уравнения (9) для $a_k(t)$.

Учитывая, что $\delta_{n+1}=-1$, $p_{n+1}=1$, перепишем уравнение (4) следующим образом:

$$\frac{d\lambda_0(t)}{dt}=\left(\lambda_0(t)\sum_{k=2}^{n}\frac{\delta_k}{\lambda_0(t)-p_k(t)}+1\right)(\lambda_0(t)-1).$$

Подставив (11) и (12) в последнее уравнение, получим

$$\frac{1}{1-\lambda(t)}\frac{d\lambda(t)}{dt}=\frac{\lambda(t)+1}{2}\sum_{k=2}^{n}\delta_k\frac{a_k(t)-1}{a_k(t)-\lambda(t)}+1.$$

Учитывая, что $\delta_k=\sigma_k$, $k=2,...,n-1$, $\delta_n=\beta_n-\frac{3}{2}=\sigma_n-\frac{1}{2}$, последнее уравнение можно записать в виде

$$\frac{1}{1-\lambda(t)}\frac{d\lambda(t)}{dt}=\frac{\lambda(t)+1}{2}\sum_{k=2}^{n}\sigma_k\frac{a_k(t)-1}{a_k(t)-\lambda(t)}+\frac{1}{2},$$

или

$$\frac{1}{1-\lambda(t)}\frac{d\lambda(t)}{dt}=\frac{\lambda(t)+1}{2}\sum_{k=2}^{n}\sigma_k+\frac{\lambda^2(t)-1}{2}\sum_{k=2}^{n}\sigma_k\frac{1}{a_k(t)-\lambda(t)}+\frac{1}{2}.$$

Заметив, что $\sum_{k=2}^{n}\sigma_k=-1-\sigma_1$, окончательно получим (10).

Найдем константу $c_1(t)$. Рассмотрим отображение

$$f(z,t)=f(\chi(z),t)=c_2(t)\int_0^{-\mathrm{ctg}^2\frac{z}{2}}(\xi-\lambda_0(t))\prod_{k=2}^{n+1}(\xi-p_k(t))^{\delta_k}d\xi+A_1^0.$$

В интеграле выполним замену $\xi=-\mathrm{ctg}^2\dfrac{z}{2}$ и подставим (11) и (12) в подынтегральную функцию. После преобразований получим

$$f(z,t)=c_2(t)\frac{i2^{-\sigma_1}}{\lambda(t)-1}\prod_{k=2}^{n}(1-a_k(t))^{-\sigma_k}\int_0^{z}(\lambda(t)-\cos\zeta)\prod_{k=1}^{n}(a_k(t)-\cos\zeta)^{\sigma_k}\,d\zeta+A_1^0.$$

Сравнивая полученное представление для отображения $f=f(z,t)$ и представление (8), видим, что

$$c_2(t)i2^{-\sigma_1}=c_1(t)(\lambda(t)-1)\prod_{k=2}^{n}(1-a_k(t))^{\sigma_k}.$$

Из последнего равенства и уравнения (5) получим дифференциальное уравнение для параметра $c_1(t)$

$$-\frac{d\ln c_1(t)}{dt}=\frac{1}{\lambda(t)-1}\frac{d\lambda(t)}{dt}+\sum_{k=2}^{n}\frac{\sigma_k}{a_k(t)-1}\frac{da_k(t)}{dt}+\sum_{k=2}^{n+1}\delta_k+2. \qquad (13)$$

Подставив в это дифференциальное уравнение (9) и (10), после преобразований получим $\dfrac{d\ln c_1(t)}{dt}=0$. Теорема доказана.

Обозначим длину разреза через $\left|A_*^0,\Lambda_*^0(\tau)\right|$. Для определения значения τ параметра t, при котором проводится интегрирование системы (3)–(5), в работе [18] получено следующее соотношение:

$$\left|A_*^0,\Lambda_*^0(\tau)\right|=\int_0^{\tau}\left|c_2(t)\lambda_0(t)(1-\lambda_0(t))\prod_{k=2}^{n+1}(\lambda_0(t)-p_k(t))^{\delta_k}\right|dt.$$

Подставляя $(11)-(13)$ и учитывая, что $p_{n+1}=1$, $\delta_k=\sigma_k$, $k=2,...,n-1$, $\delta_n=\sigma_n-\dfrac{1}{2}$, после преобразований получим

$$\left|A_*^0, \Lambda_*^0(\tau)\right| = \frac{1}{2}\int_0^\tau \left| c_1(\lambda(t)-1)\left(1-\lambda^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{k=1}^n (a_k(t)-\lambda(t))^{\sigma_k} \right| dt.$$

Для нахождения значения τ параметра t, при котором нужно интегрировать систему (9), (10), можно также использовать соотношение

$$\left|A_*^0, \Lambda_*^0(\tau)\right| = \left| c_1 \int_{a_j(\tau)}^{\lambda(\tau)} (\lambda(\tau)-\cos\xi) \prod_{k=1}^n (a_k(\tau)-\cos\xi)^{\sigma_k} d\xi \right|,$$

где $a_j(\tau)$ – прообраз вершины A_j^0, предшествующей вершине $\Lambda_*^0(\tau)$.

2. Круговой счетноугольник

Лемма 1. *Пусть в условиях теоремы 2 функция* f *удовлетворяет нормировке* (6), *тогда* $g(z) \equiv 0$ *и*

$$\sum_{k=1}^n M_k = 0 . \tag{14}$$

Доказательство. Из нормировки (6) следует, что $\lim\limits_{\operatorname{Im} z \Rightarrow +\infty} \{f(z), z\} = 0$. Вычисляя предел правой части равенства (1) при $\operatorname{Im} z \Rightarrow +\infty$, получаем $g(z) = \frac{i}{16}\sum_{k=1}^n M_k$. Так как M_k вещественные постоянные, то целая функция g тождественно равна мнимой константе. Отображение f переводит отрезок вещественной оси (a_k, a_{k+1}) в дугу окружности, поэтому сужение отображения f на этот отрезок можно записать $f(x) = w_0 + r\,\mathrm{e}^{i\varphi(x)}$, и производная Шварца $\{f(z), z\}$ принимает вещественные значения для вещественных z, $z \neq a_k$. Следовательно, g принимает вещественные значения на вещественной оси, но тогда $g(z) \equiv 0$. *Лемма доказана.*

Рассмотрим семейство счетноугольников $D(t)$, $0 \le t \le T$, получающееся из счетноугольника $D(0)$ проведением разрезов $\Lambda^m(t) = \Lambda^0(t) + 2\pi m$, $0 \le t \le T$, $m \in \mathbb{Z}$, по дугам окружностей. Точки $\Lambda^0(0) + 2\pi m$ принадлежат границе $D(0)$. При t изменяющимся от 0 до T траектория $\Lambda^0(t)$ описывает дугу окружности. Обозначим через λ прообраз подвижного конца разреза $\Lambda^0(t)$. Занумеруем прообразы вершин на промежутке $[0, 2\pi)$ так, что $0 \le a_{k+1}(t) < \ldots < a_n(t) < a_0(t) < a_1(t) < \ldots < a_k(t) < 2\pi$, $0 \le t \le T$, где $a_0 = \lambda$. Соответствующие углы при вершинах обозначим $\alpha_{k+1}\pi, \ldots, \alpha_n\pi, \alpha_0\pi, \alpha_1\pi, \ldots, \alpha_k\pi$, $\alpha_0 = 2$.

Теорема 6. *При* $0 \le t \le T$, *параметры* $a_k(t)$, $M_k(t)$, $k = 0,1,\ldots,n$, $a_0 = \lambda$, *отображения f из верхней полуплоскости* Π^+ *на круговой счетноугольник* $D(t)$ *удовлетворяют системе дифференциальных уравнений*

$$\frac{da_k(t)}{dt} = \operatorname{ctg}\mu_k(t), \quad k = 1,\dots,n; \tag{15}$$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -2M_0(t); \tag{16}$$

$$\frac{dM_k(t)}{dt} - \frac{1}{2}\frac{M_k - L_k \operatorname{ctg}\mu_k(t)}{\sin^2\mu_k(t)} = 0, \quad k = 1,\dots,n, \tag{17}$$

где $\mu_k(t) = \dfrac{a_k(t) - \lambda(t)}{2}$.

Доказательство. В силу уравнения (7) производная Шварца $\{f(z,t),z\}$ отображения *f* удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial\{f(z,t),z\}}{\partial t} + \frac{\partial\{f(z,t),z\}}{\partial z}\operatorname{ctg}\frac{z-\lambda(t)}{2} =$$
$$= \sin^{-2}\frac{z-\lambda(t)}{2}\left(\{f(z,t),z\} + \frac{3}{4}\sin^{-2}\frac{z-\lambda(t)}{2} - \frac{1}{2}\right). \tag{18}$$

Согласно теореме 2 и лемме 1, производная Шварца отображения *f* имеет вид

$$\{f(z,t),z\} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{L_k}{2}\sin^{-2}\frac{z-a_k(t)}{2} + M_k\operatorname{ctg}\frac{z-a_k(t)}{2}.$$

Подставляя производную Шварца $\{f(z,t),z\}$ в (18), получим

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{L_k}{2}\sin^{-3}\frac{z-a_k(t)}{2}\cos\frac{z-a_k(t)}{2}\frac{da_k(t)}{dt} +$$
$$+M_k(t)\frac{da_k(t)}{dt}\sin^{-2}\frac{z-a_k(t)}{2} + 2\frac{dM_k(t)}{dt}\operatorname{ctg}\frac{z-a_k(t)}{2} -$$
$$-\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{L_k}{2}\sin^{-3}\frac{z-a_k(t)}{2}\cos\frac{z-a_k(t)}{2} + M_k(t)\sin^{-2}\frac{z-a_k(t)}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{z-\lambda(t)}{2} =$$
$$= \sin^{-2}\frac{z-\lambda(t)}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{L_k}{2}\sin^{-2}\frac{z-a_k(t)}{2} + M_k(t)\operatorname{ctg}\frac{z-a_k(t)}{2}\right) + \frac{3}{2}\sin^{-2}\frac{z-\lambda(t)}{2} - 1\right).$$

Раскладывая в ряд Лорана левую и правую части этого равенства в окрестности точки $a_k(t)$ и приравнивая коэффициенты при $(z-a_k(t))^{-3}$, $(z-\lambda(t))^{-3}$ и $(z-a_k(t))^{-1}$, получаем соответственно (15), (16) и (17). *Теорема доказана.*

Проинтегрируем систему (15)–(17) методом рядов. Перейдем к параметру $x = \sqrt{t}$, $x \in \left[0, \sqrt{T}\right]$, тогда

$$a_k(t(x)) = \tilde{a}_k(x),\ M_k(t(x)) = \tilde{M}_k(x),\ k = 1,\dots,n,\ \lambda_k(t(x)) = \tilde{\lambda}_k(x),$$
$$M_0(t(x)) = \tilde{M}_0(x)$$

и система примет вид

$$\frac{d\tilde{a}_k(x)}{dx} = 2x\operatorname{ctg}\frac{\tilde{a}_k(x) - \tilde{\lambda}(x)}{2}, \quad k = 1,\dots,n,$$

$$\frac{d\tilde{\lambda}(x)}{dx} = -4x\tilde{M}_0(x), \tag{19}$$

$$\frac{d\tilde{M}_k(x)}{dx} - x\left(\tilde{M}_k - L_k \operatorname{ctg}\frac{\tilde{a}_k(x)-\tilde{\lambda}(x)}{2}\right)\sin^{-2}\frac{\tilde{a}_k(x)-\tilde{\lambda}(x)}{2} = 0, \quad k = 1,\dots,n.$$

Будем искать решение этой системы в виде рядов:

$$\begin{aligned}
&\tilde{a}_0(x) = \tilde{\lambda}(x) = \sigma + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots,\\
&\tilde{a}_k(x) = a_{k0} + a_{k1}x + a_{k2}x^2 + \dots, \quad k = 1,\dots,n,\\
&\tilde{M}_k(x) = m_{k0} + m_{k1}x + m_{k2}x^2 + \dots, \quad k = 2,\dots,n-1,\\
&\tilde{M}_k(x) = \frac{m_{k,-1}}{x} + m_{k0} + m_{k1}x + m_{k2}x^2 + \dots, \quad k = 0,1,n.
\end{aligned} \tag{20}$$

Коэффициенты $\sigma, a_{10} = a_{n0} = \sigma, a_{k0}, m_{k0}$, $k = 2,\dots,n-1$, рядов (20) известны, если известно отображение $f = f(z,0)$. Найдем остальные коэффициенты.

Согласно выбранной нумерации, $\tilde{a}_n < \tilde{\lambda} < \tilde{a}_1$ при малых значениях x, поэтому $a_{n1} < \lambda_1 < a_{11}$. Подставляя ряды (20) в уравнения (19) и равенство (14) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем для определения коэффициентов рядов λ_1, a_{k1}, $k = 1,\dots,n$, m_{k1}, $k = 2,\dots,n-1$, $m_{k,-1}$, $k = 0,1,n$, систему алгебраических уравнений

$$a_{11} = \frac{4}{a_{11}-\lambda_1},\ a_{n1} = \frac{4}{a_{n1}-\lambda_1},\ a_{k1} = 0,\ k = 2,\dots,n-1,\ \lambda_1 = -4m_{0,-1},$$

$$4\left(4+a_{11}^2\right)m_{1,-1} = a_{11}^3\left(1-\alpha_1^2\right),\ 4\left(4+a_{n1}^2\right)m_{n,-1} = a_{n1}^3\left(1-\alpha_n^2\right),$$

$$m_{k1} = 0,\ k = 2,\dots,n-1,\ m_{0,-1} + m_{1,-1} + m_{n,-1} = 0,$$

которая при $\alpha_1, \alpha_n \neq 0,2$ имеет единственное вещественное решение

$$\begin{aligned}
&a_{11} = 2\sqrt{\frac{\alpha_n}{\alpha_1}}, \quad a_{n1} = -2\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_n}}, \quad \lambda_1 = a_{11} + a_{n1}, \quad a_{k1} = 0, \quad k = 2,\dots,n-1,\\
&m_{0,-1} = -\frac{\lambda_1}{4}, \quad m_{1,-1} = \frac{L_1}{2}\frac{a_{11}^3}{4+a_{11}^2}, \quad m_{n,-1} = \frac{L_n}{2}\frac{a_{n1}^3}{4+a_{n1}^2}, \quad m_{k1} = 0, \quad k = 2,\dots,n-1,
\end{aligned} \tag{21}$$

удовлетворяющее условию $a_{n1} < \lambda_1 < a_{11}$.

Для $2n+2$ коэффициентов λ_2, a_{k2}, $k = 1,\dots,n$, m_{k2}, $k = 2,\dots,n-1$, $m_{k,0}$, $k = 0,1,n$, получаем систему из $2n+2$ линейно-независимых уравнений, которая имеет решение

$$a_{12} = \frac{a_{11}^2}{a_{11}^2+8}\lambda_2,\ a_{n2} = \frac{a_{n1}^2}{a_{n1}^2+8}\lambda_2,\ a_{k2} = \operatorname{ctg}\frac{a_{k0}-\sigma}{2},\ k = 2,\dots,n-1,$$

$$\lambda_2 = \frac{2}{3}\frac{(2\alpha_1+\alpha_n)(2\alpha_n+\alpha_1)}{\alpha_1\alpha_n\left((\alpha_1+\alpha_n)^2-1\right)}\sum_{k=2}^{n-1} m_{k0},$$

$$m_{00}=-\frac{\lambda_2}{2},\ m_{10}=L_1\lambda_2 a_{11}^2\frac{12+a_{11}^2}{\left(4+a_{11}^2\right)\left(8+a_{11}^2\right)},\ m_{n0}=L_n\lambda_2 a_{n1}^2\frac{12+a_{n1}^2}{\left(4+a_{n1}^2\right)\left(8+a_{n1}^2\right)},\tag{22}$$

$$m_{k2}=\frac{1}{2}\sin^{-2}\frac{a_{k0}-\sigma}{2}\left(m_{k0}-L_k\operatorname{ctg}\frac{a_{k0}-\sigma}{2}\right),\ k=2,...,n-1.$$

Уравнения (19) и равенство (14) дают $2n+1$ линейно-независимых уравнений для определения $2n+2$ коэффициентов λ_3, a_{k3}, $k=1,...,n$, m_{k3}, $k=2,...,n-1$, $m_{k,1}$, $k=0,1,n$. Выразим коэффициенты a_{13}, a_{n3}, m_{01}, m_{11}, m_{n1} через λ_3 и найдем a_{k3}, m_{k3}, $k=2,...,n-1$, получим

$$a_{13}=\frac{48}{3}\frac{a_{11}^3\lambda_2^2}{\left(a_{11}^2+8\right)^2\left(a_{11}^2+12\right)}+\frac{3a_{11}^3\lambda_3-16}{3a_{11}\left(a_{11}^2+12\right)},$$

$$a_{n3}=\frac{48}{3}\frac{a_{n1}^3\lambda_2^2}{\left(a_{n1}^2+8\right)^2\left(a_{n1}^2+12\right)}+\frac{3a_{n1}^3\lambda_3-16}{3a_{n1}\left(a_{n1}^2+12\right)},$$

$$m_{01}=-\frac{3}{4}\lambda_3,\ m_{11}=\frac{3}{2}L_1\frac{a_{11}^4}{a_{11}^4-16}\lambda_3,\ m_{n1}=\frac{3}{2}L_n\frac{a_{n1}^4}{a_{n1}^4-16}\lambda_3,\tag{23}$$

$$a_{k3}=\frac{\lambda_1}{3}\sin^{-2}\frac{a_{k0}-\sigma}{2},$$

$$m_{k3}=\frac{\lambda_1}{6}\sin^{-2}\frac{a_{k0}-\sigma}{2}\left(2m_{k0}\operatorname{ctg}\frac{a_{k0}-\sigma}{2}-L_k\left(1+3\operatorname{ctg}^2\frac{a_{k0}-\sigma}{2}\right)\right),\ k=2,...,n-1.$$

Коэффициенты $a_{j,k}$, $m_{j,k}$, $j=2,...,n-1$, определяются через коэффициенты $a_{j,k-2}$, $m_{j,k-2}$, $j=2,...,n-1$, и λ_{k-2}, $k=3,4,...$, поэтому достаточно рассмотреть уравнения относительно коэффициентов λ_k, a_{1k}, a_{nk}, $m_{j,k-2}$, $j=0,1,n$. Определитель системы линейных уравнений на коэффициенты λ_k, a_{1k}, a_{nk}, $m_{j,k-2}$, $j=0,1,n$, $k=3,4,...$, имеет вид

$$\mathrm{Det}_k=\begin{vmatrix}-a_{11}^2 & a_{11}^2+4k & 0 & 0 & 0 & 0\\ -a_{n1}^2 & 0 & a_{n1}^2+4k & 0 & 0 & 0\\ k & 0 & 0 & 4 & 0 & 0\\ -L_1 & L_1 & 0 & 0 & \left(a_{11}^2-4(k-2)\right)\frac{8}{a_{11}^4}\frac{a_{11}^2+4}{a_{11}^2+12} & 0\\ -L_n & 0 & L_n & 0 & 0 & \left(a_{n1}^2-4(k-2)\right)\frac{8}{a_{n1}^4}\frac{a_{n1}^2+4}{a_{n1}^2+12}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}.$$

Определитель $\mathrm{Det}_k=64k(k+1)(k-3)\dfrac{(\alpha_1+\alpha_n)^2\left((k-1)^2-(\alpha_1+\alpha_n)^2\right)}{(3\alpha_1+\alpha_n)(\alpha_1+3\alpha_n)}$ равен нулю для допустимых k только при $k=3$. Таким образом, коэффициенты λ_k, a_{1k},

a_{nk}, $m_{j,k-2}$, $j=0,1,n$, при $k=4,5,...$ определяются однозначно.

Рассмотрим вопрос о сходимости рядов (20). Перейдем в системе (19) к новым переменным y_k, v_k, $k=0,1,...,n$,

$$y_k(x)=-\frac{2}{a_{11}-\lambda_1}+x\operatorname{ctg}\frac{\tilde{a}_1(x)-\tilde{\lambda}(x)}{2},\ k=1,n,$$

$$y_k(x)=-\operatorname{ctg}\frac{a_{k0}-\sigma}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\tilde{a}_k(x)-\tilde{\lambda}(x)}{2},\ k=2,...,n-1,$$

$$y_0(x)=\tilde{\lambda}(x)-\sigma,\ v_k(x)=x\tilde{M}_k(x)-m_{k,-1},\ k=0,1,n,\ v_k(x)=\tilde{M}_k(x)-m_{k,0},$$
$$k=2,...,n-1.$$

Заметим, что функции y_k, v_k, $k=0,1,...,n$, раскладываются в ряды вида

$$y_k(x)=y_{k1}x+y_{k2}x^2+...,\ v_k(x)=v_{k1}x+v_{k2}x^2+...,\ k=0,1,...,n.$$

Система (19) после преобразований примет вид

$$x\dot{y}_k(x)+\frac{2}{\alpha_k}y_k(x)+2\frac{2-\alpha_k}{\alpha_k}v_0(x)=Q_k(x,y_k,v_0),\ k=1,n,$$

$$x\dot{y}_k(x)=\frac{\lambda_1}{2}\sin^{-2}\frac{a_{k0}-\sigma}{2}x+Q_k(x,y_k,v_0),\ k=2,...,n-1,$$

$$x\dot{v}_k(x)-\frac{2}{\alpha_k}v_k(x)+L_k\frac{2-\alpha_k}{\alpha_k}(\alpha_k+1)y_k(x)=P_k(x,y_k,v_k),\ k=1,n, \tag{24}$$

$$x\dot{v}_k(x)=x^2P_k(y_k,v_k),\ k=2,...,n-1,$$

$$x\dot{v}_0(x)-v_0-L_1\frac{\alpha_n}{\alpha_1}(\alpha_1+1)y_1(x)-L_n\frac{\alpha_1}{\alpha_n}(\alpha_n+1)y_n(x)+\frac{\alpha_n}{\alpha_1}v_1(x)+\frac{\alpha_1}{\alpha_n}v_n(x)=$$
$$=P_0(x,y_1,...,y_n,v_1,...,v_n).$$

Правые части уравнений представляют собой полиномы относительно переменных, указанных в качестве аргументов. Уравнение для y_0 в систему (24) не включено, так как y_0 ни в одно из уравнений системы не входит. Функцию y_0 можно определить из уравнения $\dot{y}_0(x)=-4v_0+\lambda_1$.

Система (24) является частным случаем системы дифференциальных уравнений вида

$$x\dot{u}_k(x)+\sum_{j=1}^{n}c_{kj}u_j(x)=g_k(x,u_1(x),...,u_n(x)),\ k=1,...,n,$$

где $g_k(x,u_1,...,u_n)$ – голоморфные в полицилиндре $|x|<r_0$, $|u_k|<r_k$, $k=1,...,n$, функции

$$g_k(x,u_1,...,u_n)=b^{(k)}_{10...0}x+b^{(k)}_{20...0}x^2+b^{(k)}_{110...0}xu_1+...+b^{(k)}_{10...01}xu_k+...+b^{(k)}_{020...0}u_1^2+...,$$

разложение которых в ряд Тейлора не содержит членов нулевого и первого измерения относительно переменных u_k, $k=1,...,n$. В [14] показано, что если искать решение этой системы в виде рядов $u_k(x)=\sum_{j=1}^{\infty}u_{kj}x^j$, $k=1,...,n$, и определитель системы уравнений для нахождения коэффициентов u_{kj} не равен нулю, начиная с некоторого *k*, то система (24) имеет решение $u_1(x),...,u_n(x)$, обращающееся в нуль при $x=0$. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 7. *Система* (19) *при* $\alpha_1,\alpha_n\neq 0,2$ *имеет на сегменте* $[0,T]$ *единственное относительно параметра* $x=\sqrt{t}$ *решение* (20), *удовлетворяющее начальным условиям* (21), (22) *и* (23).

Чтобы систему (19) проинтегрировать численно, можно перейти к новым переменным по формулам

$$x^3\hat{\lambda}(x)=\lambda(x)-\sigma-\lambda_1x-\lambda_2x^2,\ x^3\hat{a}_k(x)=a_k(x)-a_{k0}-a_{k1}x-a_{k2}x^2,\ k=1,...,n,$$

$$x\hat{M}_k(x)=M_k(x)-\frac{m_{k,-1}}{x}-m_{k0},\ k=0,1,n,$$

$$x^3\hat{M}_k(x)=M_k(x)-m_{k0}-m_{k1}x-m_{k2}x^2,\ k=2,...,n-1.$$

Начальные условия для системы относительно функций $\hat{\lambda}(x)$, $\hat{M}_0(x)$, $\hat{a}_k(x)$, $\hat{M}_k(x)$, $k=1,...,n$, будут иметь вид $\hat{\lambda}(0)=\lambda_3$, $\hat{a}_k(0)=a_{k3}$, $k=1,...,n$, $\hat{M}_k(0)=m_{k1}$, $k=0,1,n$, $\hat{M}_k(0)=m_{k3}$, $k=2,...,n-1$.

Теоремы 6 и 7 позволяют найти параметры отображения $f=f(z,t,\lambda_3)$, переводящего верхнюю полуплоскость на круговой счетноугольник с разрезами $\Lambda^m(t)=\Lambda^0(t)+2\pi m$, $0\le t\le T$, $m\in\mathbb{Z}$. Параметр *t* связан с длиной подвижной дуги $\Lambda^0(t)$, параметр λ_3 – с кривизной этой дуги.

Проинтегрировав уравнение (19), найдем f_* – одно из решений уравнения (1). Отображение f_* связано с искомым отображением $f=f(z,t,\lambda_3)$ дробно-линейным преобразованием, коэффициенты которого можно определить из условий нормировки $\lim\limits_{\operatorname{Im}z\Rightarrow+\infty}\{f(z),z\}=0$, $f(a_k)=A_k$, $f(a_k+2\pi)=A_k+2\pi$. Таким образом, параметр λ_3 можно определить численным методом из условия

$$|f(z,\lambda_3,t)-\omega|=r,\quad 0<t<T, \tag{25}$$

где ω – центр окружности, по которой проводится разрез $\Lambda^0(t)$, *r* – ее радиус. Значение параметра *t*, соответствующее нужной длине разреза, удобно находить (численно) после того, как найден параметр λ_3.

Пример. Построим отображение f из полуплоскости Π^+ на счетноугольник с вершинами в точках 0, $i\pi(\sqrt{2}-1)$, π на основном периоде и углами при этих вершинах $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$ соответственно. Часть границы счетноугольника от вершины 0 до вершины $i\pi(\sqrt{2}-1)$ и от вершины π до вершины 2π – отрезки прямых, от вершины $i\pi(\sqrt{2}-1)$ до вершины π – дуга окружности с центром в точке $-i\pi$

радиуса $\pi\sqrt{2}$. В качестве начального отображения возьмем отображение f_0 из полуплоскости Π^+ на Δ_0 – верхнюю полуплоскость с разрезами вдоль отрезков $\left\{w : w = u + iv, u = 2\pi k, 0 < v < \pi\left(\sqrt{2}-1\right)\right\}$,

$$f_0(z) = -2\arcsin\left(\cosh h \sin\frac{z+c}{2}\right) + \pi .$$

Здесь $h = \pi\left(\sqrt{2}-1\right)$, $c = 2\arcsin\dfrac{1}{\cosh h}$. Прообразы вершин счетноугольника Δ_0 с углами $\dfrac{\pi}{2}$, 2π, $\dfrac{\pi}{2}$ на основном периоде находятся в точках $a_{30} = 0$, $a_{10} = \pi - c$, $a_{20} = 2(\pi - c)$. Акцессорные параметры M_{k0}, соответствующие точкам a_{k0}, можно определить из равенства $M_{k0} = \lim\limits_{z\to a_{k0}} \dfrac{d}{dz}\left(\{f_0(z), z\}(z-a_{k0})^2\right)$, $k = 1,2,3$.

Пусть $\Delta_1(t)$ – счетноугольник Δ_0 с разрезом вдоль дуги окружности $\Lambda(x)$, выходящим из точки $i\pi\left(\sqrt{2}-1\right)$ под углом $\dfrac{\pi}{2}$ к мнимой оси. Отображение $f_1 : \Pi^+ \to \Delta_1(t)$, $f_1 = f_1(z,x)$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{f_1'''(z,x)}{f_1'(z,x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f_1''(z,x)}{f_1'(z,x)}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{4}\left(\frac{1-\alpha_k^2}{4\sin^2\dfrac{z-a_k(x)}{2}} + M_k(x)\operatorname{ctg}\frac{z-a_k(x)}{2}\right),$$

где $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dfrac{1}{2}$, $\alpha_4 = \dfrac{3}{2}$, $a_0(0) = a_1(0) = a_4(0) = a_{10}$, $a_2(0) = a_{20}$, $a_3(0) = a_{30}$.

Дуге $\Lambda(x)$ окружности радиуса $\pi\sqrt{2}$ соответствует $\lambda_3 = 3.43916$ (найдено численно из условия (25)). При x, стремящемся к $X = 0.61691$, разрез $\Lambda(x)$ замыкается на точку π. Решаем численно задачу Коши (19) при найденных λ_3, X, получаем, что f, $f(z) = f_1(z, X)$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{4}\left(\frac{1-\delta_k^2}{4\sin^2\dfrac{z-a_k(X)}{2}} + M_k(X)\operatorname{ctg}\frac{z-a_k(X)}{2}\right),$$

где $\delta_2 = \dfrac{3}{4}$, $\delta_3 = \alpha_3$, $\delta_4 = \alpha_4$,

$$a_0(X) = a_1(X) = a_2(X) = 4.90679,\ a_3(X) = 0,\ a_4(X) = 0.80422,$$

$$M_2(X) = -0.03595,\ M_3(X) = -0.36547,\ M_4(X) = 0.40142.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hussenpflug W.S.* Elliptic integrals and the Schwarz-Christoffel transformation // Computers Math. Applic. 1997. V. 33. No. 12. pp. 15–114. https://doi.org/10.1016/S0898-1221(97)00091-6.
2. *Александров И.А.* Конформные отображения полуплоскости на области с симметрией переноса // Изв. вузов. Матем. 1999. № 6(445). С. 15–18.
3. *Verbitskii I.L.* Quasistatic green function method as a powerful tool of diffraction problems solving // Materials of the VI International conference "Mathematical methods in electromagnetic theory". Lviv, Ukraine, 1996. P. 358–361. https://doi.org/10.1109/MMET.1996.565733.
4. *Driscoll T.A.*, *Trefethen L.N.* Schwarz-Christoffel mapping // Cambridge Monographs on Applied and Comput. Math. Vol. 8. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
5. *Brady M.*, *Pozrikidis C.* Diffusive transport across irregular and fractal walls // Proceedings the royal of society A. 1993. V. 442. No. 1916. P. 571–583. https://doi.org/10.1098/rspa.1993.0122.
6. *Tsarin Yu.A.* Conformal mapping technique in the theory of periodic structures // Microwave and Optical Technology Letters. 2000. V. 26. No. 1. P. 57–61. https://doi.org/10.1002/(SICI)1098-2760(20000705)26:1<57::AID-MOP18>3.0.CO;2-Q.
7. *Floryan J.M.* Conformal mapping based coordinate generation method for flows in periodic configurations // J. Computational Physics. 1986. V. 62. No 1. P. 221–247. https://doi.org/10.1016/0021-9991(86)90108-7.
8. *Александров И.А.*, *Копанева Л.С.* Левнеровские семейства отображений полуплоскости на области с симметрией переноса // Вестн. Томск. ун-та. 2004. № 284. С. 5–7.
9. *Копанев С.А.*, *Копанева Л.С.* Формула типа формулы Кристоффеля-Шварца для счетноугольника // Вестн Том. гос. ун-та. Матем. и мех. 2003. № 280. С. 52–54.
10. *Колесников И.А.*, *Копанева Л.С.* Конформное отображение на счетноугольник с двойной симметрией // Изв. вузов. Матем. 2014. № 12. С. 37–47.
11. *Колесников И.А.* Отображение на круговой счетноугольник с симметрией переноса // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2013. № 2(22). С. 33–43.
12. *Wegmann R.* Methods for numerical conformal mapping // Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory. V. 2. Amsterdam: Elsevier, 2005.
13. *Куфарев П.П.* Об одном методе численного определения параметров в интеграле Шварца – Кристоффеля // ДАН СССР. 1947. Т. 57. №. 6. С. 535–537.
14. *Александров И.А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976.
15. Труды П.П. Куфарева. К 100-летию со дня рождения / под общ. ред. И.А. Александрова. Томск: Изд-во НТЛ, 2009.
16. *Чистяков Ю.В.* Численный метод определения функции, конформно отображающей круг на многоугольники: дис. ... к.ф.-м.н. Томский гос. ун-т, 1953.
17. *Hopkins T.R.*, *Roberts D.E.* Kufarev's method for determining the Schwarz-Christoffel parameters // Numer. Math. 1979. No. 33. P. 353–365. https://doi.org/10.1007/BF01399319.
18. *Гутлянский В.Я.*, *Зайдан А.О.* О конформных отображениях полигональных областей // Укр. матем. журн. 1993. Т. 45. № 11. С. 1464–1467.
19. *Гутлянский В.Я.*, *Рязанов В.И.* Геометрическая и топологическая теория функций и отображений. Киев: Наукова думка, 2011.
20. *Насыров С.Р.*, *Низамиева Л.Ю.* Определение акцессорных параметров в смешанной обратной краевой задаче с полигональной известной частью границы // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Матем. Мех. Инф. 2011. Т. 11. № 4. С. 34–40.
21. *Низамиева Л.Ю.* Нахождение акцессорных параметров в интеграле Кристоффеля–Шварца методом движущегося разреза // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Казань: Казан. матем. о-во, 2009. Т. 38. С. 192–194.
22. *Накипов Н.Н.*, *Насыров С.Р.* Параметрический метод нахождения акцессорных параметров в обобщенных интегралах Кристоффеля–Шварца // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2016. Т. 158. № 2. С. 202–220.

23. *Колесников И.А.* Определение акцессорных параметров для отображения на счетноугольник. // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2014. №. 2(28). С. 18–28.
24. *Байбарин Б.Г.* Об одном численном способе определения параметров производной Шварца для функции, конформно отображающей полуплоскость на круговые области. // Труды Томского гос. ун-та, 1966. Т. 189. С. 123–136.
25. Kolesnikov I.A. On the problem of determining parameters in the Schwarz equation // Probl. Anal. Issues Anal. 2018. V. 7(25). No. 2. P. 50–62. https://doi.org/10.15393/j3.art.2018.5411.
26. *Насыров С.Р.* Геометрические проблемы теории разветвленных накрытий римановых поверхностей. Казань: Магариф, 2008.

Статья поступила 07.02.2019 г.

Kolesnikov I. A. (2019) DETERMINING PARAMETERS OF CONFORMAL MAPPINGS FROM THE UPPER HALF-PLANE ONTO STRAIGHT-LINE PERIODIC POLYGONS WITH DOUBLE SYMMETRY AND ONTO CIRCULAR PERIODIC POLYGONS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 60. pp. 42–60

DOI 10.17223/19988621/60/4

Keywords: conformal mapping, Schwarz equation, Schwarz-Christoffel integral, periodic polygon, accessory parameters, Kufarev's method.

The paper solves the problem of constructing conformal mappings from the half-plane onto a periodic polygon. A periodic polygon Δ is a simply connected domain with symmetry of translation, i.e. it has the property $L(\Delta) = \Delta$, where $L(w) = w + 2\pi$. We consider a polygon with a boundary consisting of a countable number of circular arcs. Moreover, it has a unique prime end at infinity, fixed under the shift $L(w)$. We use a Schwarz-type differential equation for the representation of the mapping. There is a classical problem of determining parameters for equations of this type. They are the preimages of polygon's vertices under the mapping and additional accessory parameters. To determine these parameters, we generalize Kufarev's method. It was proposed for solving the problem of finding parameters in the Schwarz–Christoffel integral. The method, based on Loewner's differential equation, reduces the problem to the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations. There is a differential equation of the Loewner type for periodic polygon. Separately, we consider periodic polygons that have mirror symmetry with respect to a couple of vertical lines; their boundaries consist of straight line segments. We give an example of mapping of the half-plane onto a specified periodic polygon with a boundary consisting of circular arcs and determine its parameters using Kufarev's method.

AMS Subject Classification: 30C20, 30C30

Financial support. This work was supported by RFBR according to the research project № 18-31-00190\18

KOLESNIKOV Ivan Aleksandrovich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ia.kolesnikov@mail.ru

REFERENCES

1. Hussenpflug W.S. (1997) Elliptic integrals and the Schwarz–Christoffel transformation. *Computers Math. Appl*. 33(12). pp. 15–114. https://doi.org/10.1016/S0898-1221(97)00091-6.
2. Aleksandrov I.A. (1999) Conformal Mappings of a Half-Plane onto Domains with Transfer Symmetry. *Russian Mathematics* (*Iz. VUZ*). 43(6). pp. 13–16.
3. Verbitskii I.L. (1996) Quasistatic Green function method as a powerful tool of diffraction problems solving. *Materials of the VI international conference "Mathematical methods in electromagnetic theory"*. Lviv, Ukraine. pp. 358–361. https://doi.org/10.1109/MMET.1996.565733

4. Driscoll T.A., Trefethen L.N. (2002) Schwarz–Christoffel mapping. *Cambridge Monographs on Applied and Comput. Math. Vol. 8*. Cambridge: Cambridge University Press.
5. Brady M., Pozrikidis C. (1993) Diffusive transport across irregular and fractal walls. *Proceedings the royal of society A*. 442(1916). pp. 571–583. https://doi.org/10.1098/rspa.1993.0122.
6. Tsarin Yu.A. (2000) Conformal mapping technique in the theory of periodic structures. *Microwave and Optical Technology Letters.* 26(1). pp. 57–61. https://doi.org/10.1002/(SICI)1098-2760(20000705)26:1<57::AID-MOP18>3.0.CO;2-Q.
7. Floryan J.M. (1986) Conformal mapping based coordinate generation method for flows in periodic configurations // Journal of Computational Physics. 62(1). pp. 221–247. https://doi.org/10.1016/0021-9991(86)90108-7.
8. Aleksandrov I.A., Kopaneva L.S. (2004) Levnerovskie semeystva otobrazheniy poluploskosti na oblasti s simmetriey perenosa [Loewner's sets of mappings of a half-plane on domains with symmetry of translation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 284. pp. 5–7.
9. Kopanev S.A., Kopaneva L.S. (2003) Formula tipa formuly Kristoffelya – Shvartsa dlya schetnougol'nika [The Christoffel–Schwarz type formula for a polygon with the countable number of vertices]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 280. pp. 52–54.
10. Kolesnikov I.A., Kopaneva L.S. (2014) Conformal mapping onto numerable polygon with double symmetry. *Russian Mathematics*. 58(12). pp. 32–40. https://doi.org/10.3103/S1066369X14120044.
11. Kolesnikov I.A. (2013) Otobrazheniye na krugovoy schetnougol'nik s simmetriey perenosa [Mapping onto a circular numerable polygon with the symmetry of translation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 2(22). pp. 33–43.
12. Wegmann R. (2005) Methods for numerical conformal mapping. *Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory. V. 2.* Amsterdam: Elsevier.
13. Kufarev P.P. (1947) Ob odnom metode chislennogo opredeleniya parametrov v integrale Shvartsa – Kristoffelya [On a method of numerical determination of the parameters in the Schwarz–Christoffel integral]. *Doklady Acad. Nauk SSSR*. 57(6). pp. 535–537.
14. Aleksandrov I.A. (1976) Parametricheskie prodolzheniya v teorii odnolistnykh funktsiy [Parametrical Extensions in the Theory of Univalent Functions]. Moscow: Nauka,. (In Russian)
15. Aleksandrov I.A. (Ed.) (2009) *Trudy P.P. Kufareva. K 100-letiyu so dnya rozhdeniya* [Works of P.P. Kufarev: on the occasion of centenary of the birth]. Tomsk: Publishing House NTL.
16. Chistyakov Yu.V. (1953) *Chislennyy metod opredeleniya funktsii, konformno otobrazhayushchey krug na mnogougol'niki*: diss. for the degree of Ph.D. Tomsk State University.
17. Hopkins T.R., Roberts D.E. (1979) Kufarev's method for determining the Schwarz–Christoffel parameters. *Numer. Math.* 33. pp. 353–365. https://doi.org/10.1007/BF01399319.
18. Gutlyansky V.Ya., Zaidan A.O. (1993) O konformnykh otobrazheniyakh poligonal'nykh oblastey [On conformal mapping of polygonal regions]. *Ukrainian Math. Journal*. 45(11). pp. 1464–1467.
19. Gutlyansky V.Ya., Ryazanov V.I. (2011) *Geometricheskaya i topologicheskaya teoriya funktsiy i otobrazheniy* [The Geometric and Topological Theory of Functions and Mappings]. Kiev: Naukova Dumka.
20. Nasyrov S.R., Nizamieva L.Yu. (2011) Opredelenie aktsessornyh parametrov v smeshannoy obratnoy kraevoy zadache s poligonal'noy izvestnoy chast'yu granitsy [Determination of accessory parameters in the mixed inverse boundary-value problem with a polygonal known part of the boundary]. *Izv. Sarat. univ-ta. New series. Series Mat. Mech. Comp. science.* 11(4). pp. 34–40.
21. *Nizamieva L.Yu.* (2009) Nakhozhdenie aktsessornykh parametrov v integrale Kristoffelya – Shvartsa metodom dvizhushchegosya razreza [Finding accessory parameters in the Schwarz–Christoffel integral by the moving slit method]. *Proc. 9th Int. Kazan. Summer Sci. Sch.-Conf.*

“Theory of Functions, *Its Applications*, *and Related Problems”*. Kazan: Kazan. Math society. 38. pp. 192–194.
22. Nakipov N.N., Nasyrov S.R. (2016) Parametricheskiy metod nakhozhdeniya aktsessornykh parametrov v obobshchennykh integralakh Kristoffelya–Shvartsa [A parametric method of finding accessory parameters for generalized Schwarz–Christoffel integrals]. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki.* 158(2). pp. 202–220.
23. Kolesnikov I.A. (2014) Opredelenie aktsessornykh parametrov dlya otobrazheniya na schetnougol’nik [Determination of accessory parameters for mapping onto a numerable polygon]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(28). pp. 18–28.
24. Baybarin B.G. (1966) Ob odnom chislennom sposobe opredeleniya parametrov proizvodnoy Shvartsa dlya funktsii, konformno otobrazhayushchey poluploskost' na krugovye oblasti [On a numerical way for the determination of Schwarz derivative parameters for a function conformally mapping the half-plane onto circular domains]. *Trudy Tomskogo gos. universiteta*. 189. pp. 123–136.
25. Kolesnikov I.A. On the problem of determining parameters in the Schwarz equation (2018). *Probl. Anal. Issues Anal*. 7(25). 2. pp. 50–62. DOI: 10.15393/j3.art.2018.5411.
26. Nasyrov S.R. (2008) *Geometricheskie problemy teorii razvetvlennykh nakrytiy rimanovykh poverkhnostey* [Geometric Problems in the Theory of Ramified Coverings of Riemann Surfaces]. Kazan: Magarif. (In Russian)

Received: February 7, 2019