УДК 517.519.7 MSC 34B10, 34A37, 34B37
DOI 10.17223/19988621/60/5

М.Дж. Марданов, Я.А. Шарифов, Ф.М. Зейналлы

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Исследована система обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями и нелокальными условиями. Сначала краевая задача приводится эквивалентному интегральному уравнению. Далее, с использованием теоремы о неподвижных точках, получены условия существования и единственности решения краевой задачи. Установлена также непрерывная зависимость решений от правой части краевых условий.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями, нелокальные краевые условия, существование и единственность решений, непрерывная зависимость решений.*

Многие задачи физики, техники, биологии и экономики описываются дифференциальными уравнениями, решением которых являются функции с разрывами первого рода в фиксированные или нефиксированные моменты времени. Такие дифференциальные уравнения достаточно хорошо изучены в работах [1–8], и их называют дифференциальными уравнениями с импульсным воздействием. В вышеотмеченных работах, в основном, изучались дифференциальные уравнения с локальными условиями. Однако в последние годы повысился интерес к дифференциальным уравнениям с импульсными воздействиями и нелокальными краевыми условиями, которыми описываются многие практические процессы.

К настоящему времени существует большое количество работ, посвященных обыкновенным дифференциальным уравнениям с импульсными воздействиями и нелокальными краевыми условиями, в которых доказаны теоремы существования решений для различных видов нелокальных условий [7–19].

В данной работе исследуется нелокальная краевая задача для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями, краевые условия которых включают точечные и интегральные слагаемые. Отметим, что исследуемая краевая задача является довольно общей. В частных случаях она охватывает задачу Коши и «чистое» интегральное условие. Исследованы вопросы существования и единственности решения краевой задачи, а также непрерывной зависимости решения от правой части краевых условий.

Постановка задачи

Исследуем существование и единственность решения системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \qquad t \in [0, T], t \neq t_i, \qquad i = 1, 2, ..., p, \tag{1}$$

с нелокальными краевыми условиями

$$Ax(0)+\int_0^T n(t)x(t)\,dt = B, \tag{2}$$

при импульсных воздействиях

$$x(t_i^+)-x(t_i)=I_i(x(t_i)), \qquad i=1,2,...,p, \tag{3}$$

где $0=t_0<t_1<...<t_p<t_{p+1}=T$, $A\in R^{n\times n}$, $n(t)\in R^{n\times n}$ – заданные матрицы, причем $\det N\neq 0$, $N=A+\int_0^T n(t)dt$, $f:[0,T]\times R^n\to R^n$, $I_i:R^n\to R^n$ – заданные функции;

$$\Delta x(t_i)=x(t_i^+)-x(t_i^-),$$

где $x(t_i^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}x(t_i+h)$, $x(t_i^-)=\lim\limits_{h\to 0^+}x(t_i-h)=x(t_i)$ – правосторонние и левосторонние пределы функции $x(t)$ в точке $t=t_i$ соответственно.

Вспомогательные факты

Приведем некоторые определения и вспомогательные факты, которые будут использованы далее. Через $C([0,T]:R^n)$ будем обозначать пространство Банаха, которое состоит из непрерывных вектор-функций $x(t)$, определенных на отрезке $[0,T]$, со значениями в R^n и с нормой $\|x\|=\max\limits_{[0,T]}|x(t)|$, где через $|.|$ обозначена норма в R^n.

Через $PC([0,T],R^n)$ обозначим линейное пространство

$$PC([0,T],R^n)=\{x:[0,T]\to R^n;\quad x(t)\in C((t_i,t_{i+1}],R^n),\ i=0,1,...,p;$$

причем $x(t_i^+)$ и $x(t_i^-)$, $i=1,2,...,p$, существуют и конечны; $x(t_i^-)=x(t_i)\}$.

Очевидно, линейное пространство $PC([0,T];R^n)$ – банахово с нормой $\|x\|_{Pc}=\max\left\{\|x\|_{C((t_i,t_{i+1}])},\ i=0,1,...,p\right\}$.

Определим решение краевой задачи (1) – (3) следующим образом.

Определение 1. Функция $x\in PC([0,T]:R^n)$ называется решением краевой задачи (1) – (3), если для любого $t\in[0,T]$, $t\neq t_i$, $i=1,2,...,p$,

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t))$$

и для $t=t_i$ $i=1,2,...,p$, $0<t_1<t_2<...<t_p<T$

$$\Delta x(t_i)=x(t_i^+)-x(t_i)=I_i(x(t_i)).$$

Кроме того, функция $x(t)$ удовлетворяет краевому условию (2).

Введем следующую функцию:

$$K(t,\tau)=\begin{cases} N^{-1}(A+\int\limits_0^t n(\tau)\,d\tau), & 0\le\tau\le t,\\ -N^{-1}\int\limits_t^T n(\tau)\,d\tau, & t<\tau\le T.\end{cases}$$

Лемма 1. Пусть $y\in C\left([0,T];R^n\right)$ и $a_i\in R^n$, $i=1,2,...,p$. Тогда дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t)=y(t) \tag{4}$$

с импульсными воздействиями

$$x(t_i^+)-x(t_i)=a_i;\quad i=1,2,...,p,\quad 0<t_1<t_2<...<t_p<T, \tag{5}$$

и нелокальными условиями

$$Ax(0)+\int\limits_0^T n(t)\,x(t)\,dt=B \tag{6}$$

имеет единственное решение $x(t)\in PC\left([0,T],R^n\right)$ и выражается следующей формулой:

$$x(t)=N^{-1}B+\int\limits_0^T K(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau+\sum_{0<t_i<t}K(t,t_i)\,a_i \tag{7}$$

для $t\in(t_i,t_{i+1}]$, $i=0,1,...,p$.

Доказательство. Пусть функция $x(t)\in PC\left([0,T],R^n\right)$ является решением краевой задачи (4) – (6). Тогда, интегрируя уравнение (4) на интервале $t\in(0,t_{i+1})$, получим

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^t y(s)ds=\int\limits_0^t \dot{x}(s)ds=\\&=\left[x(t_1)-x(0^+)\right]+\left[x(t_2)-x(t_1^+)\right]+...+\left[x(t)-x(t_i^+)\right]=\\&=-x(0)-\left[x(t_1^+)-x(t_1)\right]-\left[x(t_2^+)-x(t_2)\right]-...-\\&-\left[x(t_i^+)-x(t_i)\right]+x(t).\end{aligned}$$

Учитывая условие (5) в последнем равенстве, получаем

$$x(t)=x(0)+\int\limits_0^t y(s)ds+\sum_{0<t_i<t}a_i\;. \tag{8}$$

Теперь потребуем, чтобы функция $x(t)\in PC\left([0,T],R^n\right)$, определенная равенством (8), удовлетворяла граничному условию (6):

$$(A+\int\limits_0^T n(t)\,dt)\,x(0)=B-\int\limits_0^T n(t)\int\limits_0^t y(s)\,dsdt-\int\limits_0^T n(t)\sum_{0<t_i<t}a_i dt. \tag{9}$$

Так как $\det N \neq 0$, из (9) имеем

$$x(0) = N^{-1}\left[B - \int_0^T n(t)\int_0^t y(s)\,ds\,dt - \int_0^T n(t)\sum_{0<t_i<t} a_i\,dt\right]. \tag{10}$$

Значение $x(0)$, определяемое равенством (10), учтем в равенстве (9). Тогда

$$x(t) = N^{-1}\left[B - \int_0^T n(t)\int_0^t y(s)\,ds\,dt - \int_0^T n(t)\sum_{0<t_i<t} a_i\,dt\right] + \int_0^t y(s)\,ds + \sum_{0<t_i<t} a_i. \tag{11}$$

Так как имеют место равенства

$$\int_0^T n(t)\int_0^t y(s)\,ds\,dt = \int_0^T\int_t^T n(s)\,ds\,y(t)\,dt,$$

$$\int_0^T n(t)\sum_{0<t_i<t} a_i\,dt = \sum_{0<t_i<T}\int_{t_i}^T n(t)\,dt\,a_i,$$

то из (11) получаем

$$x(t) = N^{-1}B - N^{-1}\int_0^T\int_t^T n(s)\,ds\,y(t)\,dt - N^{-1}\sum_{0<t_i<t}\int_{t_i}^T n(t)\,dt\,a_i + \int_0^t y(s)\,ds + \sum_{0<t_i<t} a_i. \tag{12}$$

Здесь проведем некоторые упрощения. Очевидно, что имеют место следующие равенства:

$$\int_0^t y(s)\,ds - N^{-1}\int_0^T\int_t^T n(s)\,ds\,y(t)\,dt =$$

$$= N^{-1}\int_0^t\left(A + \int_0^\tau n(s)\,ds\right)y(\tau)\,d\tau - N^{-1}\int_t^T n(s)\,ds\,y(\tau)\,d\tau; \tag{13}$$

$$\sum_{0<t_i<t} a_i - N^{-1}\sum_{0<t_i<T}\int_{t_i}^T n(t)\,dt\,a_i = N^{-1}\sum_{0<t_i<t}\left(A + \int_0^{t_i} n(t)\,dt\right)a_i - \sum_{t<t_{i+1}<T} N^{-1}\int_{t_i}^T n(t)\,dt\,a_i. \tag{14}$$

Учитывая (13) и (14) в (12), получаем формулу (7).

Замечание. Из формулы (7) следует справедливость следующих утверждений:

(i) Постоянная вектор-функция $x(t) = N^{-1}B$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = 0$$

с нелокальными условиями

$$Ax(0) + \int_0^T n(t)x(t)\,dt = B.$$

(ii) Функция $x(t) = \int_0^T K(t,s)\,y(s)\,d(s)$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = y(t)$$

с нелокальным условием

$$Ax(0)+\int_0^T n(t)x(t)\,dt=0.$$

Здесь матрица функции $K(t,s)$ есть функция Грина данной задачи.

(iii) Кусочно-постоянная функция

$$x(t)=\sum_{0<t_i<t} K(t,t_i)\,a_k, \qquad i=1,2,...,p,$$

является решением дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t)=0$$

с импульсными воздействиями

$$x(t_i^+)-x(t_i)=a_i, \quad i=1,2,...,p.$$

и граничными условием

$$Ax(0)+\int_0^T n(t)x(t)\,dt=0.$$

Лемма 2. Предположим, что $f\in C\left([0,T]\times R^n,R^n\right)$ и $I_i(x)\in C(R^n)$. Тогда функция $x(t)\in PC\left([0,T],R^n\right)$ является решением краевой задачи (1) – (3) тогда и только тогда, когда функция $x(t)\in PC\left([0,T],R^n\right)$ является решением интегрального уравнения с импульсными воздействиями

$$x(t)=N^{-1}B+\int_0^T K(t,s)\,f(s,x(s))\,ds+\sum_{i=1}^{P} K(t,t_i)\,I_i(x(t_i)), \tag{15}$$

для $t\in(t_i,t_{i+1}),\ \ i=0,1,...,p.$

Доказательство. Пусть $x(t)\in PC\left([0,T],R^n\right)$ является решением краевой задачи. Тогда, аналогично лемме 1, можно показать, что функция $x(t)\in PC\left([0,T],R^n\right)$ удовлетворяет интегральному уравнению (15).

Верно и обратное. Прямым вычислением можно убедиться, что решение интегрального уравнения (15) также удовлетворяет уравнению (1), краевому условию (3), а также импульсным условиям (2). Лемма доказана.

Основные результаты

Первый основной результат данного раздела базируется на принципе неподвижной точки Банаха. На основе этого принципа доказана теорема о существовании и единственности решения краевой задачи (1) – (3).

Теорема 1. Предположим, что выполняются следующие условия:

(H1) Существует постоянная $M\ge 0$, такая, что

$$|f(t,x)-f(t,y)|\le M\,|x-y|,$$

для любого $t\in[0,T]$ и для всех $x,y\in R^n$;

(H2) Существуют постоянные $l_i \geq 0, \quad i = 1,2,...,p$, такие, что

$$|I_i(x) - I_i(y)| \leq l_i |x - y|$$

для любых $x, y \in R^n$.

Если
$$L = S\left(MT + \sum_{k=1}^{p} l_k\right) < 1, \tag{16}$$

тогда краевая задача (1) – (3) имеет единственное решение.

Здесь число S определяется равенством

$$S = \max_{0 \leq t,s \leq T} \|K(t,s)\|.$$

Доказательство. Для доказательства используем принцип неподвижной точки Банаха.

Определим оператор $F : PC\left([0,T]; R^n\right) \to PC\left([0,T] \times R^n\right)$ из соотношения

$$(Fx)(t) = N^{-1}B + \int_0^T K(t,s)\, f(s, x(s))\, ds + \sum_{k=1}^{P} K(t;t_k)\, I_k\, (x(t_k)) \tag{17}$$

для $t \in (t_i, t_{i+1}), \quad i = 0,1,2,...,p$.

Очевидно, неподвижные точки оператора F являются решениями краевой задачи (1) – (3). С помощью принципа сжимающих операторов покажем, что оператор F , определенный равенством (17), имеет единственную неподвижную точку.

Положим $M_f = \max_{[0,T]} |f(t,0)|$ и $m_I = \max_{k \in \{1,2,...,p\}} |I_k(0)|$. Фиксируем число

$$r \geq \frac{\left\|N^{-1}B\right\| + S\left(M_f T + pm_I\right)}{1 - L}.$$

Покажем, что $FB_r \subset B_r$, где

$$B_r = \left\{x \in PC\left([0,T], R^n\right) : \|x\|_{PC} \leq r\right\}.$$

Для $x \in B_r$ имеем

$$\begin{aligned}\|(Fx)(t)\| &\leq \left\|N^{-1}B\right\| + \max_{[0,T]} \int_0^T |K(t,s)| [|f(s,x(s)) - f(s,0)| + |f(s,0)|]\, ds + \\ &+ \max_{[0,T]} \sum_{k=1}^{P} |K(t;t_k)| [|I_k(x(t_k)) - I_k(0)| + |I_k(0)|] \leq \\ &\leq \left\|N^{-1}B\right\| + S\left[\left(MTr + M_f T\right) + \left(\sum_{k=1}^{p} l_k\right) r + pm_I\right] \leq r.\end{aligned}$$

Пусть $x, y \in PC\left([0,T]; R^n\right)$ – любые фиксированные элементы. Тогда для любого $t \in (t_i, t_{i+1}]$ имеем

$$\begin{aligned}|F(x)(t) - F(y)(t)| &\leq \int_0^T |K(t,s)| \cdot |f(s,x(s)) - f(s,y(s))|\, ds + \\ &+ \sum_{k=1}^{P} |K(t,t_k)| \cdot |I_k(x(t_k)) - I_k(y(t_k))|.\end{aligned}$$

Используя условия (H1), (H2), из последнего неравенства получаем

$$|F(x)(t)-F(y)(t)|\le SMT\|x-y\|+S\sum_{k=1}^{P} l_k\,|x(t_k))-y(t_k)|.$$

Это неравенство можно переписать в следующем виде:

$$|F(x)(t)-F(y)(t)|\le\left[S\left(MT+\sum_{k=1}^{P} l_k\right)\right]\times\|x-y\|_{PC}.$$

Таким образом,

$$\|F(x)(t)-F(y)(t)\|\le L\|x-y\|_{PC}.$$

Здесь, учитывая условие (16), получаем, что оператор F является сжимающим. Согласно принципу о неподвижной точке, можно сделать вывод, что оператор F имеет единственную неподвижную точку. Это эквивалентно тому, что нелокальная краевая задача (1) – (3) имеет единственное решение. Теорема доказана.

Второй результат данного раздела посвящен установлению существования решений краевой задачи (1) – (3), который базируется на неподвижной точке Шауфера.

Теорема 2. Предположим, что выполнены следующие условия:

(H3) Функция $f:[0,T]\times R^n\to R$ непрерывна и существует постоянная $N_1>0$, такая, что

$$|f(t,x)|\le N_1$$

для всех $t\in[0,T]$ и $x\in R^n$;

(H4) Функции $I_k:R^n\to R^n$ непрерывны и существует постоянная $N_2>0$, такая, что

$$\max_{k\in\{1,2,\dots,P\}}|I_k(x)|\le N_2.$$

Тогда краевая задача (1) – (3) имеет хотя бы одно решение на $[0,T]$.

Доказательство. Покажем, что при вышеперечисленных условиях оператор $F(x)(t)$, определенный равенством (17), имеет неподвижные точки. Это будет сделано после определенных шагов.

Шаг 1. Оператор F при условиях теоремы непрерывен в $PC([0,T];R^n)$. Пусть $\{x_n\}$ – функциональная последовательность в пространстве $PC([0,T];R^n)$ и $x_n\to x$ $x\in PC([0,T];R^n)$. Тогда для любого $t\in(t_i,t_{i+1}]$, и $i=0,1,\dots,p$

$$|F(x_n)(t)-F(x)(t)|\le\int_0^T|K(t,s)|\cdot|f(s,x_n(s))-f(s,x(s))|\,ds+$$
$$+\sum_{k=1}^{P}|K(t,t_k)|\cdot|I_k(x_n(t_k))-I_k(x(t_k))|.$$

Здесь, учитывая условия (H3), (H4), имеем

$$|F(x_n)(t)-F(x)(t)|\le ST\max_{S\in[0,T]}|f(s,x_n(s))-f(s,x(s))|+$$
$$+S\sum_{k=1}^{P}|I_k(x_n(t_k))-I_k(x(t_k))|.$$

Так как функции f и $I_k, k = 1, 2, ..., p,$ непрерывны, то имеем

$$\|F(x_n)(t) - F(x)(t)\|_{PC} \to 0$$

при $n \to \infty$.

Шаг 2. Отображение F является ограниченным в пространстве $PC\left([0,T]; R^n\right)$. Это эквивалентно тому, что мы должны показать, что для любого $\eta > 0$, существует $l > 0$, такое, что для любого

$$x \in B_\eta = \left\{x \in PC\left([0,T]; R^n\right) : \|x\| \le \eta\right\}$$

имеет место

$$\|F(x(\cdot))\| \le l.$$

Применяя неравенство треугольника и используя предположения (H3) и (H4) для $t \in (t_i, t_{i+1}]$, получаем

$$|F(x)(t)| \le \left|N^{-1}B\right| + \int_0^T |K(t,s)| \cdot |f(s, x(s))|\, ds + \sum_{i=1}^{P} |K(t,t_i)| \cdot |I_i(x(t_i))|.$$

Таким образом,

$$\|F(x)(t)\| \le \left|N^{-1}B\right| + S[TN_1 + pN_2] = l$$

Шаг 3. Оператор F отображает ограниченное множество в равностепенно непрерывное подмножество пространства $PC\left([0,T]; R^n\right)$. Пусть $\tau_1, \tau_2 \in (t_i, t_{i+1}]$ и $\tau_1 < \tau_2$. B_η – ограниченное множество в шаге 2 и пусть $x \in B_\eta$.

Тогда имеем

$$F(x)(\tau_2) - F(x)(\tau_1) =$$

$$= N^{-1} \int_0^{\tau_2} \left(A + \int_0^s n(\tau)\, d\tau \right) f(s, x(s))\, ds - N^{-1} \int_{\tau_2}^T \int_s^T n(\tau) d\tau f(s, x(s))\, ds -$$

$$- N^{-1} \int_0^{\tau_1} \left(A + \int_0^s n(\tau)\, d\tau \right) f(s, x(s))\, ds + N^{-1} \int_{\tau_1}^T \int_s^T n(\tau) d\tau f(s, x(s))\, ds =$$

$$= N^{-1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(A + \int_0^s n(\tau)\, d\tau \right) f(s, x(s)\, ds + N^{-1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_s^T n(\tau) d\tau f(s, x(s)\, ds =$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(s, x(s)\, ds.$$

Отсюда получим

$$|F(x)(\tau_1) - F(x)(\tau_2)| \le \int_{\tau_1}^{\tau_2} |f(s, x(s))|\, ds.$$

При $\tau_1 \to \tau_2$ правая сторона предыдущего неравенства стремится к нулю. Учитывая, что отображение F непрерывно и равностепенно непрерывно, приходим к выводу, что отображение

$$F : PC\left([0,T]; R^n\right) \to PC\left([0,T]; R^n\right)$$

вполне непрерывно.

Шаг 4. Покажем, что множество

$$\Delta = \left\{x \in PC\left([0,T] : R^n\right) : x = \lambda F(x)\right\}$$

для некоторого $0 < \lambda < 1$ ограничено. Пусть для некоторого $0 < \lambda < 1$ равенство $x = \lambda(Fx)$ выполняется. Тогда для любого $t \in (t_i, t_{i+1}]$, $i = 0,1,...,p$,

$$x(t) = \lambda\left[N^{-1}B + \int_0^T K(t,s)\, f(s,x(s))\, ds + \sum_{k=1}^{P} K(t_i,t_k)\, I_n\left(x(t_k)\right)\right].$$

Отсюда, учитывая предположения (Н3) и (Н4) (как и на шаге 2) для любого $t \in [0,T]$, имеем

$$|F(x)(t)| \le \left|N^{-1}B\right| + [N_1T + pN_2]S.$$

Следовательно, мы получаем

$$\|x\|_{PC} \le \left|N^{-1}B\right| + [N_1T + pN_3]S = R\ .$$

Это показывает, что множество Δ ограничено. Значит, выполняются все условия теоремы о неподвижной точке Шауфера. Отсюда следует, что оператор F имеет неподвижные точки, которые являются решениями краевой задачи (1) – (3).

Теорема доказана.

Теперь покажем непрерывную зависимость решений задачи (1) – (3) от правой части (2).

Теорема 3. Пусть выполняются условия (Н1), (Н2) и $L < 1$. Тогда для любых $B_1, B_2 \in R^n$ и для соответствующих решений x_1, x_2 следующих краевых задач

$$\dot{x}_j(t) = f(t, x_j(t)),\ \ t \in [0,T], t \ne t_i,\ \ i = 1,2,...,p\ ; \tag{18}$$

$$Ax_j(0) + \int_0^T n(t)\, x_j(t)\, dt = B_j\ ; \tag{19}$$

$$x_j(t_i^+) - x_j(t_i) = I_i(x_j(t_i)), \qquad i = 1,2,...,p, j = 1,2, \tag{20}$$

выполняется оценка

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \le (1-L)^{-1}\left\|N^{-1}\right\|\|B_1 - B_2\|.$$

Доказательство: Пусть $B_1, B_2 \in R^n$ – любые точки и x_1, x_2 – соответствующие решения задачи (18) – (20). Тогда мы имеем

$$x_1(t) - x_2(t) = N^{-1}[B_1 - B_2] +$$

$$+\int_0^T K(t,s)[f(s,x_1(s)) - f(s,x_2(s))]ds + \sum_{k=1}^{P} K(t,t_k)[I_k(x_1(t_k)) - I_k(x_2(t_k))]. \tag{21}$$

Теперь, используя условия (Н1) и (Н2), из (21) получаем

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le \left\|N^{-1}[B_1 - B_2]\right\| + SM\int_0^T |x_1(\tau) - x_2(\tau)| d\tau + S\sum_{i=1}^{p} l_i\, |x_1(t_k) - x_2(t_k)|\ .$$

Отсюда

$$\|x_1(t)-x_2(t)\| \le \left\|N^{-1}\right\| \|B_1-B_2\| + S\left(MT+\sum_{i=1}^{p} l_i\right)\|x_1(t)-x_2(t)\|.$$

Так как $L<1$, из последнего неравенства следует, что

$$\|x_1(t)-x_2(t)\| \le (1-L)^{-1}\left\|N^{-1}\right\|\|B_1-B_2\|.$$

Теорема доказана.

Отметим, что схему, предложенную в данной работе, можно успешно применять в более сложных краевых задачах с импульсными воздействиями. Например, для краевой задачи, когда (2) сохраняет в себе двухточечные или многоточечные и интегральные слагаемые.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самойленко А.М.*, *Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища Школа, 1987. 287 с.
2. *Халанай А.*, *Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971. 309 с.
3. *Perestyk N.A.*, *Plotnikov V.A.*, *Samoilenko A.M.*, *Skripnik N.V.* Differential equations with impulse effect: multivalued right-hand sides with discontinuities // DeGruyter Stud. Math. Berlin: Walter de Gruter Co., 2011. V. 40.
4. *Samoilenko A.M.*, *Perestyk N.A.* Impulsive differential equations. Singapore: World Sci., 1995.
5. *Lakshmikantham V.*, *Bainov D.D.*, *Simeonov P.S.* Theory of impulsive differential equations. Singapore: World Scientific, 1989. 434 p.
6. *Boichuk A.A.*, *Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and fredholm boundary-value problems. Utrecht: Brill, 2004.
7. *Boichuk A.A.*, *Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2nd ed.). Berlin; Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2016. 314 p.
8. *Benchohra M.*, *Henderson J.*, *Ntouyas S.K.* Impulsive differential equations and inclusions. Contemporary mathematics and its application. New York: Hindawi Publishing Corporation, 2006.
9. *Mardanov M.J.*, *Sharifov Yagub A.*, *Molaei Habib H.* Existence and uniqueness of solutions for first-order nonlinear differential equations with two-point and integral boundary conditions // Electronic J. Differential Equations. 2014. No. 259. P. 1–8
10. *Annamalai Anguraj*, *Mani Mallika Arjunan*. Existence and uniqueness of mild and classical solutions of impulsive evolution equations // Elect. J. Differential Equations. 2005. No. 111. P. 1–8.
11. *Ji Sh.*, *Wen Sh.* Nonlocal cauchy problem for impulsive differential equations in Banach spaces // International J. Nonlinear Science. 2010. V. 10. No. 1. P. 88–95.
12. *Li M.*, *Han M.* Existence for neutral impulsive functional differential equations with nonlocal conditions // Indagationes Mathematicae. 2009. V. 20. No. 3. P. 435–451.
13. *Bin L.*, *Xinzhi L.*, *Xiaoxin L.* Robust global exponential stability of uncertain impulsive systems // Acta Mathematika Scientia. 2005. V. 25 B(1). P. 161–169.
14. *Шарифов Я.А.* Задача оптимального управления для систем с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2013. № 4(33). С. 34–45.
15. *Шарифов Я.А.* Оптимальное управление для систем с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях // Изв. вузов. Математика. 2013. № 2. С. 75–84.
16. *Ashyralyev A.*, *Sharifov Y.A.* Optimal control problems for impulsive systems with integral boundary conditions // EJDE. 2013. No. 80. P. 1–11.

17. *Sharifov Y.A.*, *Mammadova N.B.* Optimal control problem described by impulsive differential equations with nonlocal boundary conditions // Differential equations. 2014. V. 50. No. 3. P. 403–411.
18. *Sharifov Y.A.* Conditions optimality in problems control with systems impulsive differential equations under non-local boundary conditions // Ukrainian Mathematical Journal. 2012. V. 64. No. 6. P. 836–847.
19. *Ashyralyev A.*, *Sharifov Y.A.* Existence and uniqueness of solutions for nonlinear impulsive differential equations with two-point and integral boundary conditions // Advances in Difference Equations. 2013. 2013:173.

Статья поступила 27.04.2019 г.

Mardanov M.J., Sharifov Ya.A., Zeynally F.M. (2019) EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS FOR NONLINEAR IMPULSIVE DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS . *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 60. pp. 61–72

DOI 10.17223/19988621/60/5

Keywords: nonlocal boundary conditions, impulsive systems, existence and uniqueness of solutions, continuous dependence of the solutions.

In this paper, we aim to study differential equations

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \qquad t \in [0,T], t \neq t_i, \qquad i = 1,2,...,p,$$

with nonlocal boundary conditions

$$Ax(0) + \int_0^T n(t)x(t)dt = B,$$

and subject to impulsive conditions

$$x(t_i^+) - x(t_i) = I_i(x(t_i)), \qquad i = 1,2,...,p,$$

where $0 = t_0 < t_1 < ... < t_p < t_{p+1} = T$, $A \in R^{n\times n}$, $n(t) \in R^{n\times n}$ known matrices such that $\det N \neq 0$, $N = A + \int_0^T n(t)dt$; $f : [0,T] \times R^n \to R^n$ and $I_i : R^n \to R^n$ are given functions; $\Delta x(t_i) = x(t_i^+) - x(t_i^-)$, where $x(t_i^+) = \lim_{h\to 0^+} x(t_i + h)$, $x(t_i^-) = \lim_{h\to 0^+} x(t_i - h) = x(t_i)$ are right- and left-hand limits of $x(t)$ at $t = t_i$, respectively.

The Green function is constructed and the considered problem is reduced to an equivalent integral equation. The existence and uniqueness of the solutions for the given problem are analyzed using the Banach contraction principle. The Schaefer fixed point theorem is then used to prove the existence of the solutions. The continuous dependence of the solutions on the right side of the boundary conditions is also established.

AMS Mathematical Subject Classification**:** 34B10, 34A37, 34B37.

MARDANOV Misir J. (Corr.-member of ANAS, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Institute Mathematics and Mechanics of ANAS, Baku, Azerbaijan). E-mail: misirmardanov@yahoo.com

SHARIFOV Yagub A. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Baku State University, Baku, Azerbaijan). E-mail: farahzeynalli@rambler.ru

ZEYNALLY Farah M. (Doctoral student Ganja State University, Ganja, Azerbaijan). E-mail: sharifov22@rambler.ru

REFERNCES

1. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. (1987) Differentsial'nyye uravneniya s impul'snym vozdeystviyem [Differential equations with impulse effect]. Kiev: Vishcha Shkola, 287 p.
2. Halanay A., Wexler D. (1971) *Qualitative theory of impulse systems*. Moscow: Mir. 309 p. (in Russian)
3. Perestyuk N.A., Plotnikov V.A., Samoilenko A.M., Skripnik N.V. (2011) Differential equations with impulse effect: multivalued right-hand sides with discontinuities. *DeGruyter Stud. Math. V. 40*. Berlin: Walter de Gruyter & Co.
4. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. (1995) *Impulsive differential equations*. Singapore: World Sci.
5. Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S.(1989) *Theory of Impulsive Differential Equations*. Singapore: World Scientific. https://doi.org/10.1142/0906.
6. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* (2004) *Generalized inverse operators and fredholm boundary-value problems*. Utrecht: Brill.
7. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. (2016) *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems* (2nd ed.). Berlin; Boston: Walter de Gruyter GmbH.
8. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S.K. (2006). *Impulsive differential equations and inclusions. Contemporary mathematics and its application*. New York: Hindawi Publishing Corporation.
9. Mardanov M. J., Sharifov Yagub A., Molaei Habib H. (2014) Existence and uniqueness of solutions for first-order nonlinear differential equations with two-point and integral boundary conditions. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2014(259). pp. 1–8.
10. Anguraj A., Mallika Arjunan M. (2005) Existence and uniqueness of mild and classical solutions of impulsive evolution equations. *Elect. J. Differential Equations*, 2005(111). pp. 1–8.
11. Ji S., Wen S. (2010) Nonlocal Cauchy Problem for Impulsive Differential Equations in Banach Spaces. *International Journal of nonlinear Science*. 10(1). P. 88–95.
12. Li M., Han M. (2009) Existence for neutral impulsive functional differential equations with nonlocal conditions. *Indagationes Mathematicae*. 20(3). pp. 435–451. doi.org/10.1016/S0019-3577(09)80017-7.
13. Liu B., Liu X., Liao X. (2005) Robust global exponential stability of uncertain impulsive systems. *Acta Mathematica Scientia*. 25 B(1). pp. 161–169. doi.org/10.1016/S0252-9602(17)30273-4.
14. Sharifov Y.A. (2013) Optimal control problem for the impulsive differential equations with non-local boundary conditions. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*. 4(33). pp. 34– 45. doi.org/10.14498/vsgtu1134.
15. Sharifov Y.A. (2013) Optimal control of impulsive systems with nonlocal boundary conditions. *Russian Mathematics*. 57(2). pp. 65–72. doi.org/10.3103/S1066369X13020084.
16. Ashyralyev A., Sharifov Y.A. (2013) Optimal Control Problems for Impulsive Systems with Integral Boundary Conditions. *EJDE*. 2013(80). pp. 1–11. DOI: 10.1063/1.4747627.
17. Sharifov Y.A., Mammadova N.B. (2014) Optimal control problem described by impulsive differential equations with nonlocal boundary conditions. *Differential equations*. 50(3). pp. 403–411. doi.org/10.1134/S0012266114030148.
18. Sharifov Y.A. (2012) Conditions optimality in problems control with systems impulsive differential equations under non-local boundary conditions. *Ukrainian Mathematical Journal*. 64(6). P. 836–847. doi.org/10.1007/s11253-012-0691-4.
19. Ashyralyev A., Sharifov Y.A. (2013) Existence and uniqueness of solutions for nonlinear impulsive differential equations with two-point and integral boundary conditions. *Advances in difference equations*. 173. doi.org/10.1186/1687-1847-2013-173.

Received: April 27, 2019