

ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE

Научный журнал

2019

№ 46

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере
массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-29497 от 27 сентября 2007 г.)

Подписной индекс в объединённом каталоге «Пресса России» 44031

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук»,
Высшей аттестационной комиссии

Founder – Tomsk State University

EDITORIAL BOARD

Alexander Gortsev – Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. Tel: +73822529599
Valery Smagin – Deputy Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof. of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. Tel: +73822529599
Lyudmila Nezhelskaya – Executive Editor, Doctor. of Sc., Prof. of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Sergey Vorobeychikov – Doctor of Sc., Prof. of the Higher Mathematics and Mathematical Modeling Department Tomsk State University
Vladimir Vishnevsky – Doctor of Sc., Prof. Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).
Gennady Koshkin – Doctor of Sc., Prof. of the Theoretical Cybernetics Department Tomsk State University
Yury Kostyuk – Doctor of Sc., Prof. of the Theoretical Informatics Department Tomsk State University
Anjela Matrosova – Doctor of Sc., Prof. of the Programming Department Tomsk State University
Anatoly Nazarov – Doctor of Sc., Prof., Head of the Probability Theory and Mathematical Statistics Department Tomsk State University
Konstantin Samouylov – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied Probability and Informatics Department RUDN University (Moscow, Russia)
Eugene Semenkina – Doctor of Sc., Prof. System Analysis and Operations Research Department Reshetnev Siberian State University of Science and Technology (Krasnoyarsk, Russia)
Sergey Sushchenko – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied of Information Department Tomsk State University
Mais Farkhadov – Doctor of Sc., Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).
Gurami Tsitsiasvili – Doctor of Sc., Prof., Chief researcher Institute for Applied Mathematics Far Eastern Branch of RAS, Prof. Far Eastern Federal University (Vladivostok, Russia)
Editorial address:
Institute of Applied Mathematics and Computer Science,
unit of Applied Mathematics
National Research Tomsk State University
36 Lenina Avenue, Tomsk, 634050
Telephone / fax: +73822529599
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

EDITORIAL COUNCIL

Ana Rosa Cavalli
PhD, Prof.
University VII
Paris, France
Vladimir Dombrovskii
Doctor of Sc., Prof.
Tomsk State University
Russia
Alexander Dudin
Doctor of Sc., Prof.
Belarusian State University
Minsk, Republic Belorussia

Gilbert Saporta
PhD, Prof.
Pierre and Marie Curie
University, Paris, France
Raimund Ubar
Doctor of Sc., Prof.
University of Technology
Tallinn, Estonia
Reindert Nobel
Doctor of Sc., Associate Prof.
Vrije University of Amsterdam
Netherlands

Enco Orsingher
PhD, Prof.
University of Rome
Italy
Paolo Prinetto
Prof.
Politechnic Institute
Torino, Italy

Nina Yevtushenko
Doctor of Sc., Prof.
Ivannikov V.P. ISP RAS
Moscow, Russia
Yervant Zorian
PhD, Fellow & Chief Architect, Synopsys, Mountain View, CA, USA

JORNAL INFO

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is an independent peer-reviewed research journal that welcomes submissions from across the world. Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is issued four times per year, and can be subscribed to in the Russian Press Joint Catalogue (Subscription Index 44031)

The publication in the journal is free of charge and may be in Russian or in English.

The topics of the journal are the following:

- control of dynamical systems,
- mathematical modeling,
- data processing,
- informatics and programming,
- discrete function and automation,
- designing and diagnostics of computer systems.

Rules of registration articles are given in a site:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

Учредитель – Томский государственный университет

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Горцев Александр Михайлович – гл. редактор, проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной математики ТГУ. Тел. +73822529599
Смагин Валерий Иванович – зам. гл. редактора, проф., д-р техн. наук, проф. кафедры прикладной математики ТГУ. Тел. +73822529599
Нежелская Людмила Алексеевна – ответственный секретарь, доц., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры прикладной математики ТГУ
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Воробейчиков Сергей Эрикович – д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры высшей математики и математического моделирования ТГУ
Вишневский Владимир Миронович – проф., д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)
Кошкин Геннадий Михайлович – проф., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры теоретической кибернетики ТГУ
Костюк Юрий Леонидович – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры теоретической информатики ТГУ
Матросова Анжела Юрьевна – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры программирования ТГУ
Назаров Анатолий Андреевич – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой теории вероятностей и математической статистики ТГУ
Самуйлов Константин Евгеньевич – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (г. Москва)
Семенкин Евгений Станиславович – проф., д-р техн. наук, проф. каф. системного анализа и исследования операций, СибГУ им. акад. М.Ф. Решетнева (г. Красноярск)
Сущенко Сергей Петрович – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики ТГУ
Фархадов Манс Паша Оглы – д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)
Цицашвили Гурами Шалвович – проф., д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. Института прикладной математики ДВО РАН, проф. ДВФУ (г. Владивосток)

Адрес редакции и издателя: 634050, Томск, пр. Ленина, 36
Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Институт прикладной математики и компьютерных наук,
отделение прикладной математики
Телефон / факс: +73822529599
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Ана Роза Кавалли
д-р философии, проф.
Университет VII,
Париж, Франция
Владимир Домбровский
д-р техн. наук, проф.
ТГУ, Томск, Россия

Александр Дудин
д-р физ.-мат. наук, проф.
БГУ, Минск,
Республика Беларусь

Енцо Орзингер
д-р философии, проф.
Римский университет,
Италия
Паоло Принетто
проф.
Политехнический институт,
Турин, Италия

Жильберт Сапорта
д-р философии, проф.
Университет им. Пьера и Марии,
Кюри, Париж, Франция
Раймонд Убар
д-р, проф.
Технологический университет,
Таллинн, Эстония
Рейндерт Нобель
д-р, доцент
Свободный университет,
Амстердам, Нидерланды

Нина Евтушенко
д-р техн. наук, проф.
ИСП РАН им. Иваницова В.П.,
Москва, Россия
Ервант Зорин
д-р философии, гл. науч. сотр.
фирмы «Синописис», США

О ЖУРНАЛЕ

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» выходит ежеквартально и распространяется по подписке

Статьи публикуются на русском и английском языках.

Тематика публикаций журнала:

- управление динамическими системами,
- математическое моделирование,
- обработка информации,
- информатика и программирование,
- дискретные функции и автоматы,
- проектирование и диагностика вычислительных систем.

Журнал входит в систему Российского Индекса Научного Цитирования (РИНЦ).

Правила оформления статей приведены на сайте:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

СОДЕРЖАНИЕ

УПРАВЛЕНИЕ
ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Мансимов К.Б., Наджафова М.Я. Квазиисобые управления в задаче управления дискретными системами с нелокальными краевыми условиями.....	4
Параев Ю.И., Грекова Т.И., Полужктова К.О. Оптимальное управление односекторной экономикой при случайном изменении основного капитала и трудовых ресурсов.....	12

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Дмитренко А.Г. Моделирование рассеяния электромагнитной волны на структуре из трехмерного идеально проводящего тела и тонкого проводника.....	20
Киреева А.Е., Сабельфельд К.К., Мальцева Н.В., Грибов Е.Н. Трехмерная клеточно-автоматная модель электрохимического окисления углерода Ketjen Black EC-600JD.....	31

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

Vorobeychikov S.E., Burkatovskaya Yu.B. Parameter estimation and change-point detection for process AR(p)/ARCH(q) with unknown parameters.....	40
Gubina O.V., Koshkin G.M. Nonparametric estimation of actuarial present value of deferred life annuity.....	49
Капустин Е.В., Шкуркин А.С. Оптимизация параметров стохастической модели управления запасами.....	56
Наумов В.А., Самуйлов К.Е. Условия мультипликативности стационарного распределения вероятностей марковских ресурсных систем массового обслуживания с потерями.....	64
Нежелская Л.А., Тумашикина Д.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий второго порядка при непреодолеваемом мертвом времени.....	73
Rouban A.I. The sensitivity functionals in the Bolts problem for multivariate dynamic systems described by integral equations with delay time.....	83
Цициашвили Г.Ш., Осипова М.А. Стационарное распределение в простейшей RQ-системе массового обслуживания.....	93

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Рыжова С.Е., Мыцко Е.А., Мальчуков А.Н. Сравнительный анализ реализаций декодеров БЧХ-кода с параметрами (15, 7, 5) на ПЛИС.....	98
---	----

МЕМОУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ,
ПЕРСОНАЛИИ

75 лет профессору Александру Михайловичу Горцеву.....	108
Сведения об авторах.....	110

CONTENTS

CONTROL
OF DYNAMICAL SYSTEMS

Mansimov K.B., Nacafova M.Y. Quasi-singular control in discrete systems control problem with nonlocal boundary conditions.....	4
Paraev Ju.I., Grekova T.I., Poluektova K.O. Optimal control of one-sector economy under random variation of fixed capital and labor resources.....	12

MATHEMATICAL MODELING

Dmitrenko A.G. Simulating of electromagnetic scattering by a structure consisting of a perfectly conducting body and a thin wire.....	20
Kireeva A.E., Sabelfeld K.K., Maltseva N.V., Gribov E.N. Three-layer cellular automata model of the electrochemical oxidation of carbon Ketjen Black EC-600JD.....	31

DATA PROCESSING

Vorobeychikov S.E., Burkatovskaya Yu.B. Parameter estimation and change-point detection for process AR(p)/ARCH(q) with unknown parameters.....	40
Gubina O.V., Koshkin G.M. Nonparametric estimation of actuarial present value of deferred life annuity.....	49
Kapustin E.V., Shkurkin A.S. Optimization of the parameters of the stochastic model of inventory control.....	56
Naumov V.A., Samouylov K.E. Conditions for the product form of the stationary probability distribution of Markovian resource loss systems.....	64
Nezhel'skaya L.A., Tumashkina D.A. Optimal state estimation of semi-synchronous events flow of the second order under conditions of unextendable dead time.....	73
Rouban A.I. The sensitivity functionals in the Bolts problem for multivariate dynamic systems described by integral equations with delay time.....	83
Tsitsiashvili G.Sh., Osipova M.A. Stationary distributions in the simplest RQ-queueing system.....	93

INFORMATICS AND PROGRAMMING

Ryzhova S.E., Mytsko E.A., Malchukov A.N. Comparative analysis of BCH-codes decoders implementations with parameters (15, 7, 5) using FPGA.....	98
--	----

MEMOIRS, MEMORABLE DATE,
PERSONALITIS

75 years to professor Alexander Michailovich Gortsev.....	108
Brief information about the authors.....	110

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 517.977

DOI: 10.17223/19988605/46/1

К.Б. Мансимов, М.Я. Наджафова

КВАЗИОСОБЫЕ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассматривается задача оптимального управления дискретными процессами, описываемыми системой разностных уравнений с неразделенными нелокальными краевыми условиями. При предположении выпуклости области управления доказано необходимое условие оптимальности в форме линеаризованного условия максимума. Исследован случай вырождения линеаризованного условия максимума (квазиособый случай). Установлено необходимое условие оптимальности квазиособых управлений.

Ключевые слова: дискретная управляемая система; нелокальные краевые условия; линеаризованный принцип максимума; квазиособое управление; необходимое условие оптимальности.

Дискретные динамические модели управляемых систем являются очень важным в теоретическом и практическом отношении классом математических моделей, позволяющим охватить широкий круг реальных объектов и соответствующих им задач управления. Дискретные динамические модели возникают, например, при моделировании задач распределения ресурсов, обработке и передаче информации цифровыми электронными устройствами, а также при дискретизации непрерывных динамических моделей (см.: [1–6]).

К настоящему времени разработаны многочисленные точные и приближенные методы решения задач оптимального управления дискретными системами в предположении, что они описываются разностными уравнениями с локальными краевыми условиями (см.: [1–7]).

Данная работа посвящена исследованию одной дискретной задачи оптимального управления с неразделенными нелокальными краевыми условиями. С помощью модифицированного варианта метода приращений установлены необходимые условия оптимальности в предположении выпуклости области управления.

1. Постановка задачи

Рассмотрим дискретную систему управления

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in T, \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\Phi(x(t_0), x(t_1)) = l. \quad (2)$$

Здесь $T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\}$ – конечное множество последовательных натуральных чисел, причем t_0 и t_1 заданы, $\Phi(x_0, x_1)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных n -мерная вектор-функция, l – заданный постоянный вектор, $x(t)$ – вектор состояния, $u(t)$ – вектор управляющих воздействий, $f(t, x, u)$ – заданная n -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (x, u) до второго порядка включительно.

Пусть U – заданное непустое, ограниченное и выпуклое множество из $\mathbb{R}^r$. Каждую управляющую функцию $u(t)$, удовлетворяющую условию

$$u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r, \quad t \in T, \quad (3)$$

назовем допустимым управлением.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u) = \varphi(x(t_0), x(t_1)) \quad (4)$$

при ограничениях (1)–(3). Здесь $\varphi(x_0, x_1)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных скалярная функция.

Допустимое управление $u(t)$, доставляющее минимум функционалу (4) при ограничениях (1)–(3), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t), x(t))$ – оптимальным процессом.

2. Формула для приращения функционала качества

Пусть $(u(t), x(t))$ – фиксированный, а $(\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), \bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t))$ – произвольный допустимые процессы. Тогда ясно, что приращение $\Delta x(t)$ состояния $x(t)$ будет решением краевой задачи

$$\Delta x(t+1) = f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f(t, x(t), u(t)), \quad (5)$$

$$\Phi(x(t_0) + \Delta x(t_0), x(t_1) + \Delta x(t_1)) - \Phi(x(t_0), x(t_1)) = 0. \quad (6)$$

Предположим, что $\psi(t)$ – пока известная n -мерная вектор-функция, а $\lambda \in \mathbb{R}^n$ – неизвестный постоянный вектор. Тогда из (5), (6) получим, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t) \Delta x(t+1) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t) [f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f(t, x(t), u(t))], \quad (7)$$

$$\lambda' [\Phi(x(t_0) + \Delta x(t_0), x(t_1) + \Delta x(t_1)) - \Phi(x(t_0), x(t_1))] = 0. \quad (8)$$

Положим

$$M(x(t_0), x(t_1), \lambda) = \lambda' \Phi(x(t_0), x(t_1)),$$

$$H(t, x, u, \psi) = \psi' f(t, x, u).$$

Ясно, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t-1) \Delta x(t) = \psi'(t_1-1) \Delta x(t_1) - \psi'(t_0-1) \Delta x(t_0) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t-1) \Delta x(t). \quad (9)$$

С учетом соотношений (7)–(9) приращение функционала качества (4) записывается в виде:

$$\begin{aligned} \Delta S(u) &= S(\bar{u}) - S(u) = \varphi(\bar{x}(t_0), \bar{x}(t_1)) - \varphi(x(t_0), x(t_1)) + \\ &+ \lambda' [\Phi(x(t_0) + \Delta x(t_0), x(t_1) + \Delta x(t_1)) - \Phi(x(t_0), x(t_1))] + \psi'(t_1-1) \Delta x(t_1) - \psi'(t_0-1) \Delta x(t_0) - \\ &- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [H(t, x(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x(t), u(t), \psi(t))]. \end{aligned} \quad (10)$$

Используя формулу Тейлора, из (10) будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta S(u) &= \frac{\partial \varphi'(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_0)} \Delta x(t_0) - \frac{\partial \varphi'(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_1)} \Delta x(t_1) + \frac{1}{2} \left[\Delta x'(t_0) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x^2(t_0)} \Delta x(t_0) + \right. \\ &\left. + 2 \Delta x'(t_0) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_0) \partial x(t_1)} \Delta x(t_1) + \Delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x^2(t_1)} \Delta x(t_1) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \lambda' \frac{\partial \Phi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_0)} \Delta x(t_0) + \lambda' \frac{\partial \Phi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_1)} \Delta x(t_1) + \psi'(t_1 - 1) \Delta x(t_1) - \\
 & - \psi'(t_0 - 1) \Delta x(t_0) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_u(t, x(t), u(t), \psi(t)) \Delta u(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_x(t, x(t), u(t), \psi(t)) \Delta x(t) - \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[\Delta x'(t) H_{xx}(t, x(t), u(t), \psi(t)) \Delta x(t) + 2 \Delta u'(t) H_{ux}(t, x(t), u(t), \psi(t)) \Delta x(t) + \right. \\
 & \quad \left. + \Delta u'(t) H_{uu}(t, x(t), u(t), \psi(t)) \Delta u(t) \right] + o_1 \left(\left[\|\Delta x(t_0)\| + \|\Delta x(t_1)\| \right]^2 \right) - \\
 & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_2 \left(\left[\|\Delta x(t)\| + \|\Delta u(t)\| \right]^2 \right) + \frac{1}{2} \Delta x'(t_0) \frac{\partial^2 M(x(t_0), x(t_1), \lambda)}{\partial x^2(t_0)} \Delta x(t_0) + \Delta x'(t_0) \times \\
 & \times \frac{\partial^2 M(x(t_0), x(t_1), \lambda)}{\partial x(t_0) \partial x(t_1)} \Delta x(t_1) + \frac{1}{2} \Delta x'(t_1) \frac{\partial^2 M(x(t_0), x(t_1), \lambda)}{\partial x(t_1)^2} \Delta x(t_1) + o_3 \left(\left[\|\Delta x(t_0)\| + \|\Delta x(t_1)\| \right]^2 \right). \quad (11)
 \end{aligned}$$

Если предполагать, что $\psi(t)$ и λ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}
 \psi(t-1) &= \frac{\partial H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial x}, \\
 \psi(t_1-1) &= -\frac{\partial \Phi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_1)} - \frac{\partial \Phi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_1)} \lambda, \\
 \psi(t_0-1) &= \frac{\partial \Phi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_0)} + \frac{\partial \Phi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_0)} \lambda,
 \end{aligned}$$

тогда формула приращения (11) примет вид:

$$\begin{aligned}
 \Delta S(u) &= - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_u(t, x(t), u(t), \psi(t)) \Delta u(t) + \frac{1}{2} \left[\Delta x'(t_0) \frac{\partial^2 \Phi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x^2(t_0)} \Delta x(t_0) + \right. \\
 & \quad \left. + 2 \Delta x'(t_0) \frac{\partial^2 \Phi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_0) \partial x(t_1)} \Delta x(t_1) + \Delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \Phi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x^2(t_1)} \Delta x(t_1) \right] - \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[\Delta x'(t) \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial x^2} \Delta x(t) + 2 \Delta u'(t) \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u \partial x} \Delta x(t) + \right. \\
 & \quad \left. + \Delta u'(t) \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u^2} \Delta u(t) \right] + \frac{1}{2} \left[\Delta x'(t_0) \frac{\partial^2 M(x(t_0), x(t_1), \lambda)}{\partial x^2(t_0)} \Delta x(t_0) + \right. \\
 & \quad \left. + 2 \Delta x'(t_0) \frac{\partial^2 M(x(t_0), x(t_1), \lambda)}{\partial x(t_0) \partial x(t_1)} \Delta x(t_1) + \Delta x'(t_1) \frac{\partial^2 M(x(t_0), x(t_1), \lambda)}{\partial x^2(t_1)} \Delta x(t_1) \right] + \eta_1(u; \Delta u). \quad (12)
 \end{aligned}$$

Здесь по определению

$$\eta_1(u; \Delta u) = o_1 \left(\left[\|\Delta x(t_0)\| + \|\Delta x(t_1)\| \right]^2 \right) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_2 \left(\left[\|\Delta x(t)\| + \|\Delta u(t)\| \right]^2 \right) + o_3 \left(\left[\|\Delta x(t_0)\| + \|\Delta x(t_1)\| \right]^2 \right).$$

По предположению множество U выпуклое. Поэтому специальное приращение допустимого управления $u(t)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t) = \varepsilon [v(t) - u(t)]. \quad (13)$$

Здесь $\varepsilon \in [0, 1]$ – произвольное число, а $v(t) \in U$, $t \in T$ – произвольное допустимое управление.

Через $\Delta x_\varepsilon(t)$ обозначим специальное приращение состояния $x(t)$, отвечающее специальному приращению (13) управления $u(t)$.

Из (5)–(6) получаем, что $\Delta x_\varepsilon(t)$ является решением линеаризованной задачи

$$\Delta x_\varepsilon(t+1) = f_x(t, x(t), u(t))\Delta x_\varepsilon(t) + f_u(t, x(t), u(t))\Delta u_\varepsilon(t) + o_4(\|\Delta x_\varepsilon(t)\| + \|\Delta u_\varepsilon(t)\|), \quad (14)$$

$$\frac{\partial \Phi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_0)} \Delta x(t_0) + \frac{\partial \Phi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_1)} \Delta x(t_1) = 0. \quad (15)$$

Используя задачу (14)–(15), доказывается справедливость разложения

$$\Delta x_\varepsilon(t) = \varepsilon y(t) + o(\varepsilon, t), \quad (16)$$

где $y(t)$ есть решение краевой задачи

$$y(t+1) = f_x(t, x(t), u(t))y(t) + f_u(t, x(t), u(t))(v(t) - u(t)), \quad (17)$$

$$\frac{\partial \Phi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_0)} y(t_0) + \frac{\partial \Phi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_1)} y(t_1) = 0. \quad (18)$$

Решение краевой задачи (17)–(18) допускает представление [8]:

$$y(t) = \Phi(t) \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} F(t, \tau) f_u(\tau, x(\tau), u(\tau))(v(\tau) - u(\tau)) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} F(t, \tau) f_u(\tau, x(\tau), u(\tau))(v(\tau) - u(\tau)), \quad (19)$$

где по определению

$$\Phi(t) = -F(t, t_0 - 1) \left(\frac{\partial \Phi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_0)} + \frac{\partial \Phi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_1)} F(t, t_0 - 1) \right)^{-1} \frac{\partial \Phi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_1)},$$

а $F(t, \tau) - (n \times n)$ матричная функция, являющаяся решением задачи

$$F(t, \tau - 1) = f_x(\tau, x(\tau), u(\tau)), \quad \tau < t,$$

$$F(t, t - 1) = E, \quad (E - (n \times n) \text{ единичная матрица}).$$

Пусть

$$\alpha(\tau) = \begin{cases} 1, & t_0 \leq \tau \leq t-1, \\ 0, & t \leq \tau \leq t_1 - 1. \end{cases}$$

Тогда представление (19) записывается в виде:

$$y(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} G(t, \tau) f_u(\tau, x(\tau), u(\tau))(v(\tau) - u(\tau)), \quad (20)$$

где по определению

$$G(t, \tau) = \Phi(t) F(t, \tau) + F(t, \tau) \alpha(\tau).$$

С учетом (13), (16) из (12) получаем, что вдоль оптимального процесса $(u(t), x(t))$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & -\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_u(t, x(t), u(t), \psi(t))(v(t) - u(t)) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ y'(t_0) \frac{\partial^2 \Phi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x^2(t_0)} y(t_0) + \right. \\ & \quad \left. + 2 y'(t_0) \frac{\partial^2 \Phi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_0) \partial x(t_1)} y(t_1) + y'(t_1) \frac{\partial^2 \Phi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x^2(t_1)} y(t_1) - \right. \\ & \quad \left. - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[y'(t) \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial x^2} y(t) + (v(t) - u(t))' \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u \partial x} y(t) + \right. \right. \end{aligned} \quad (21)$$

$$+ (v(t) - u(t))' \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u^2} (v(t) - u(t)) \Big] + \left[y'(t_0) \frac{\partial^2 M(x(t_0), x(t_1), \lambda)}{\partial x^2(t_0)} y(t_0) + \right. \\ \left. + 2y'(t_0) \frac{\partial^2 M(x(t_0), x(t_1), \lambda)}{\partial x(t_0) \partial x(t_1)} y(t_1) + y'(t_1) \frac{\partial^2 M(x(t_0), x(t_1), \lambda)}{\partial x^2(t_1)} y(t_1) \right] \Big\} + o(\varepsilon^2) \geq 0.$$

Из неравенства (21) следует аналог линеаризованного условия максимума (см., напр.: [1–7]).

Теорема 1. Вдоль оптимального процесса $(u(t), x(t))$ для всех $v(t) \in U$, $t \in T$, выполняется неравенство

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_u(t, x(t), u(t), \psi(t)) (v(t) - u(t)) \leq 0. \quad (22)$$

Неравенство (22) есть необходимое условие оптимальности первого порядка и нередко, вырождаясь, выполняется тривиальным образом (см., напр.: [4–7, 9]). Изучим случай вырождения необходимого условия оптимальности (22).

Определение 1. Допустимое управление $u(t)$ назовем квазиособым в задаче (1)–(4), если для всех $v(t) \in U$, $t \in T$,

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_u(t, x(t), u(t), \psi(t)) (v(t) - u(t)) = 0. \quad (23)$$

Из неравенства (21) с учетом (23) следует, что для оптимальности квазиособого управления $u(t)$ необходимо, чтобы неравенство

$$y'(t_0) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x^2(t_0)} y(t_0) + 2y'(t_0) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_0) \partial x(t_1)} y(t_1) + 2y'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x^2(t_1)} y(t_1) + \\ + y'(t_0) \frac{\partial^2 M(x(t_0), x(t_1), \lambda)}{\partial x^2(t_0)} y(t_0) + 2y'(t_0) \frac{\partial^2 M(x(t_0), x(t_1), \lambda)}{\partial x(t_0) \partial x(t_1)} y(t_1) + y'(t_1) \frac{\partial^2 M(x(t_0), x(t_1), \lambda)}{\partial x^2(t_1)} y(t_1) - \\ - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[y'(t) H_{xx}(t, x(t), u(t), \psi(t)) y(t) + 2(v(t) - u(t))' H_{ux}(t, x(t), u(t), \psi(t)) y(t) + \right. \\ \left. + (v(t) - u(t))' H_{uu}(t, x(t), u(t), \psi(t)) (v(t) - u(t)) \right] \geq 0 \quad (24)$$

выполнялось для всех $v(t) \in U$, $t \in T$.

Неравенство (24) есть неявное необходимое условие оптимальности квазиособых управлений. Опираясь на него, удастся получить необходимое условие оптимальности квазиособых управлений, которое носит явный характер. Используя представление (20), убеждаемся в справедливости соотношений

$$y'(t_0) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x^2(t_0)} y(t_0) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} (v(\tau) - u(\tau))' f'(\tau, x(\tau), u(\tau)) \times \\ \times G'(t_0, \tau) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x^2(t_0)} G(t_0, s) f(s, x(s), u(s)) (v(s) - u(s)), \quad (25)$$

$$y'(t_0) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_0) \partial x(t_1)} y(t_1) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} (v(\tau) - u(\tau))' f'_u(\tau, x(\tau), u(\tau)) \times \\ \times G'(t_0, \tau) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_0) \partial x(t_1)} G(t_1, s) f_u(s, x(s), u(s)) (v(s) - u(s)), \quad (26)$$

$$y'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x^2(t_1)} y(t_1) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} (v(\tau) - u(\tau))' f_u'(\tau, x(\tau), u(\tau)) \times \\ \times G'(t_1, \tau) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x^2(t_1)} G(t_1, s) f_u(s, x(s), u(s)) (v(s) - u(s)), \quad (27)$$

$$y'(t_0) \frac{\partial^2 M(x(t_0), x(t_1), \lambda)}{\partial x^2(t_0)} y(t_0) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} (v(\tau) - u(\tau))' f_u'(\tau, x(\tau), u(\tau)) G(t_0, \tau) \times \\ \times \frac{\partial^2 M(x(t_0), x(t_1), \lambda)}{\partial x^2(t_0)} G(t_0, s) f_u(s, x(s), u(s)) (v(s) - u(s)), \quad (28)$$

$$y'(t_0) \frac{\partial^2 M(x(t_0), x(t_1), \lambda)}{\partial x(t_0) \partial x(t_1)} y'(t_1) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} (v(\tau) - u(\tau))' f_u'(\tau, x(\tau), u(\tau)) G(t_0, \tau) \times \\ \times \frac{\partial^2 M(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_0) \partial x(t_1)} G(t_1, s) f_u(s, x(s), u(s)) (v(s) - u(s)), \quad (29)$$

$$y'(t_1) \frac{\partial^2 M(x(t_0), x(t_1), \lambda)}{\partial x^2(t_1)} y(t_1) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} (v(\tau) - u(\tau))' f_u'(\tau, x(\tau), u(\tau)) G'(t_1, \tau) \times \\ \times \frac{\partial^2 M(x(t_0), x(t_1), \lambda)}{\partial x^2(t_1)} G(t_1, s) f_u(s, x(s), u(s)) (v(s) - u(s)), \quad (30)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} y'(t) \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial x^2} y(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} (v(\tau) - u(\tau))' \times \\ \times f_u'(\tau, x(\tau), u(\tau)) \left[G'(t_1, \tau) \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial x^2} G(t_1, s) \right] f_u(s, x(s), u(s)) (v(s) - u(s)), \quad (31)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} (v(t) - u(t))' \frac{\partial^2 H'(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u \partial x} y(t) = \\ = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{\tau=t_0}^{t_2-1} (v(t) - u(t))' \frac{\partial^2 H'(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u \partial x} G(t, \tau) f_u(\tau, x(\tau), u(\tau)) (v(\tau) - u(\tau)). \quad (32)$$

По аналогии с работой [5] положим

$$K(\tau, s) = - \left[G'(t_0, \tau) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x^2(t_0)} G(t_0, s) + \right. \\ + 2 G'(t_0, \tau) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_0) \partial x(t_1)} G(t_1, s) + G'(t_1, \tau) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x^2(t_1)} G(t_1, s) \Big] - \\ - \left[G'(t_0, \tau) \frac{\partial^2 M(x(t_0), x(t_1), \lambda)}{\partial x^2(t_0)} G(t_0, s) + 2 G'(t_0, \tau) \frac{\partial^2 M(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_0) \partial x(t_1)} G(t_1, s) + \right. \\ + G'(t_1, \tau) \frac{\partial^2 M(x(t_0), x(t_1), \lambda)}{\partial x^2(t_1)} G(t_1, s) \Big] + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} G'(t, \tau) \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial x^2} G(t, s). \quad (33)$$

С учетом обозначения (33) и тождеств (25)–(32) неравенство (24) принимает вид:

$$\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} (v(\tau) - u(\tau))' f_u'(\tau, x(\tau), u(\tau)) K(\tau, s) f_u(s, x(s), u(s)) (v(s) - u(s)) +$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} (v(t) - u(t))' \frac{\partial H'(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u \partial x} G(t, \tau) f_u(\tau, x(\tau), u(\tau)) (v(\tau) - u(\tau)) + \\
 & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} (v(t) - u(t))' \frac{\partial H'(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u^2} (v(t) - u(t)) \leq 0.
 \end{aligned} \quad (34)$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. Если множество U выпуклое, то для оптимальности квазиособого управления $u(t)$ необходимо, чтобы неравенство (34) выполнялось для всех $v(t) \in U$, $t \in T$.

Неравенство (34) есть довольно общее необходимое условие оптимальности квазиособых управлений. Из него, определяя $v(t)$ специальным образом, можно получить ряд относительно легко проверяемых необходимых условий оптимальности квазиособых управлений. Приведем одно из них.

Теорема 3. При выполнении условий теоремы 2 для оптимальности квазиособого управления $u(t)$ необходимо чтобы неравенство

$$\begin{aligned}
 & (w - u(\theta))' \left[f_u(\theta, x(\theta), u(\theta)) K(\theta, \theta) f_u(\theta, x(\theta), u(\theta)) + \frac{\partial^2 H(\theta, x(\theta), u(\theta), \psi(\theta))}{\partial u \partial x} G(\theta, \theta) \times \right. \\
 & \left. \times f_u(\theta, x(\theta), u(\theta)) + \frac{\partial^2 H(\theta, x(\theta), u(\theta), \psi(\theta))}{\partial u^2} \right] (w - u(\theta)) \leq 0
 \end{aligned} \quad (35)$$

выполнялось для всех $\theta \in T$, $w \in U$.

Неравенство (35) является аналогом условия оптимальности Габасова–Кирилловой [7] на случай нелокального краевого условия.

Заключение

Рассматривается задача оптимального управления с нелокальными краевыми условиями. При помощи модификации метода приращений установлен аналог линейаризованного условия максимума.

Отдельно изучен случай квазиособых управлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Альсевич В.В. и др. Методы оптимизации. Минск : Четыре четверти, 2011. 472 с.
2. Пропой А.И. Элементы теории дискретных оптимальных процессов. М. : Наука, 1973. 255 с.
3. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. М. : Наука, 1973. 448 с.
4. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами. Новосибирск : Наука, 1987. 228 с.
5. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку : Изд-во Бакинского гос. ун-та, 2013. 151 с.
6. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности высокого порядка. Минск, 1982. 48 с. (Препринт ИМ АН БССР. № 30 (155)).
7. Габасов Р., Кириллова Ф.М. К теории необходимых условий оптимальности для дискретных систем // Автоматика и телемеханика. 1969. № 12. С. 39–47.
8. Мансимов К.Б., Наджафова М.Я. Об одной нелокальной дискретной задаче управления // Вестник Бакинского государственного университета. Сер. физико-математических наук. 2014. № 4. С. 46–54.
9. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М. : Либроком, 2013. 256 с.

Поступила в редакцию 21 апреля 2018 г.

Mansimov K.B., Nacafova M.Y. (2019). QUASI-SINGULAR CONTROL IN DISCRETE SYSTEMS CONTROL PROBLEM WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 46. pp. 4–11

DOI: 10.17223/19988605/46/1

Consider a discrete control system

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t)), t \in T, \quad (1)$$

with boundary conditions

$$\Phi(x(t_0), x(t_1)) = l. \quad (2)$$

Here $T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\}$ is a finite set of consecutive natural numbers, at that t_0 and t_1 is given, $\Phi(x_0, x_1)$ is the given twice continuously differentiable with respect to the set of variables n -dimensional vector-valued function, l is the given constant vector, $x(t)$ is a state vector, $u(t)$ is a control actions vector, $f(t, x, u)$ is the given n -dimensional vector-valued function continuous with respect to the set of variables together with the partial derivatives with respect to (x, u) up to the second order inclusive.

Let U be the given non-empty, bounded, and convex set in R^r . Each control function $u(t)$ satisfying the condition

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T \quad (3)$$

will be called admissible control.

We consider the problem of the minimum of the functional

$$S(u) = \varphi(x(t_0), x(t_1))$$

under constraints (1)–(3).

Here $\varphi(x_0, x_1)$ is the twice continuously differentiable scalar function with respect to the set of variables.

A necessary condition for the optimality of quasi-singular controls is established.

Keywords: discrete control problem; nonlocal boundary conditions; linearization maximum principle; quasi-singular control.

MANSIMOV Kamil' Bayramali ogly (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Baku State University, Institute of Control Problems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan).
E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

NACAFOVA Malahat Yashar (Institute of Control Problems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan).
E-mail: nacafova.melahet@mail.com

REFERENCES

1. Gabasov, R., Kirillova, F.M., Alseovich, V.V. et al. (2011) *Metody optimizatsii* [Methods of Optimization]. Minsk: Chetyre chetverti.
2. Propoy, A.I. (1973) *Elementy teorii diskretnykh optimal'nykh protsessov* [Elements of the Theory of Discrete Optimal Processes]. Moscow: Nauka.
3. Boltyanskiy, V.G. (1973) *Optimal'noe upravlenie diskretnymi sistemami* [Optimal Control of Discrete Systems]. Moscow: Nauka.
4. Ashchepkov, L.T. (1987) *Optimal'noe upravlenie razryvnymi sistemami* [Optimal Control of Discontinuous Systems]. Novosibirsk: Nauka.
5. Mansimov, K.B. (2013) *Diskretnye sistemy* [Discrete Systems]. Baku: Baku State University.
6. Gabasov, R., Kirillova, F.M. & Mansimov, K.B. (1982) *Neobkhodimye usloviya optimal'nosti vysokogo poryadka* [Necessary conditions for optimality of high order]. Vol. 30(155). Minsk: [s.n.].
7. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (1969) K teorii neobkhodimyykh usloviy optimal'nosti dlya diskretnykh sistem [To the theory of necessary optimality conditions for discrete systems]. *Avtomatika i telemekhanika*. 12. pp. 39–47. (In Russian).
8. Mansimov, K.B. & Nadzhafova, M.Ya. (2014) On a nonlocal discrete control problem. *Vestnik BGU. Ser. fiz.-mat. nauk*. 4. pp. 46–54.
9. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (2013) *Osobyie optimal'nye upravleniya* [Singular Optimal Control]. Moscow: Librokom.

Ю.И. Параев, Т.И. Грекова, К.О. Полуэктова

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОДНОСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИКОЙ ПРИ СЛУЧАЙНОМ ИЗМЕНЕНИИ ОСНОВНОГО КАПИТАЛА И ТРУДОВЫХ РЕСУРСОВ

Рассматривается задача оптимального управления односекторной экономикой при случайном изменении фондовооруженности труда и трудовых ресурсов. В качестве критерия оптимальности выбирается максимум среднего значения непроизводственного потребления на заданном периоде производства. Решение проводится с помощью метода динамического программирования.

Ключевые слова: односекторная экономика; основной капитал; трудовые ресурсы; фондовооруженность труда; непроизводственное потребление; оптимальное управление; динамическое программирование.

Проблема управления односекторной экономикой восходит к [1, 2]. Ей посвящено большое количество работ. В них рассматриваются и решаются разные варианты задач, в том числе и задачи оптимального управления такой экономикой (см., напр.: [3–7]). Естественным продолжением этих исследований является решение задач с учетом каких-либо случайных возмущений, действующих в процессе производства.

Состояние односекторной экономики определяется двумя величинами: основным капиталом и трудовыми ресурсами. Вообще говоря, изменение основного капитала во времени происходит случайным образом из-за таких факторов, как случайный износ основных производственных фондов, приобретение новых фондов, цена на которые зависит от курсов валют, производственная неопределенность, экономическая конъюнктура и т.п. Трудовые ресурсы также могут изменяться случайным образом за счет экономических факторов, а также по демографическим причинам, из-за миграции населения и т.п. В [8] на основании изучения статистических данных приводится определенное обоснование того, что влияние экзогенных случайных факторов на экономическую динамику можно моделировать процессом броуновского движения.

В настоящей работе задача оптимального управления односекторной экономикой при случайном изменении основного капитала и трудовых ресурсов решена в программной форме, получены формулы для моментов переключения управления и получена оценка максимального среднего значения непроизводственного потребления.

1. Постановка задачи

Состояние экономики определяется следующими величинами: $K(t)$ – основной капитал, $L(t)$ – трудовые ресурсы, $C(t)$ – непроизводственное потребление, а также производственной функцией $Y(K, L)$. Значение $Y(K, L)$ есть валовый продукт, произведенный в единицу времени, т.е. $Y(K, L)\Delta t$ – валовый продукт, произведенный за время Δt . Часть этого продукта $I\Delta t = uY\Delta t$ идет на увеличение основного капитала, а часть $S\Delta t = (1 - u)Y\Delta t$ – на увеличение непроизводственного потребления $C(t)$. Таким образом, управляющим параметром здесь является коэффициент u , определяющий долю валового продукта, которая идет на увеличение основного капитала. При этом

$$0 \leq u \leq 1. \quad (1)$$

В результате в детерминированном случае изменение экономики во времени описывается уравнениями [6]

$$\begin{aligned}\dot{K} &= uY(K, L) - \lambda K(t), \quad K(0) = K_0 > 0, \\ \dot{C} &= \rho C + (1 - u)Y(K, L), \quad C(0) = 0, \\ \dot{L} &= \nu L, \quad L(0) = L_0,\end{aligned}\tag{2}$$

где $\lambda (\geq 0)$ – коэффициент амортизации, $\rho (\geq 0)$ – норма дисконтирования, ν – темп изменения трудовых ресурсов.

Для дальнейшего исследования вводятся переменные: $k(t) = K(t)/L(t)$ – фондовооруженность труда, $c(t) = C(t)/L(t)$ – непроизводственное потребление, приходящиеся на одного работника, и функция $F(k) = Y/L$ – производительность труда. Для этих переменных на основании (2) можно получить уравнения

$$\begin{aligned}\dot{k} &= -\mu k + uF(k), \quad k(0) = k_0 \\ \dot{c} &= \delta c + (1 - u)F(k), \quad c(0) = 0,\end{aligned}\tag{3}$$

где $\mu = \lambda + \nu$, $\delta = \rho - \nu$. Далее будем считать, что $\mu = \lambda + \nu > 0$ и $\delta = \rho - \nu > 0$. Это означает, что если трудовые ресурсы возрастают ($\nu > 0$), то темп их роста не может превышать норму дисконтирования ρ . Если трудовые ресурсы убывают ($\nu < 0$), то темп их убывания не может превышать коэффициент амортизации λ . Иначе возникают «экзотические» варианты.

Детерминированная задача: в течение заданного конечного планируемого периода производства $[0, T]$ найти такое управление $u(t)$ с учетом (1) для уравнений (3), при котором величина $c(T)$ максимальна.

В стохастическом случае односекторная экономика описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{K} &= uY(K, L) - \lambda K(t) + \sigma_K K \xi_K(t), \quad K(0) = K_0 > 0, \\ \dot{C} &= \rho C + (1 - u)Y(K, L), \quad C(0) = 0, \\ \dot{L} &= \nu L + \sigma_L L \xi_L(t), \quad L(0) = L_0 > 0.\end{aligned}\tag{4}$$

Здесь $\xi_K(t)$ и $\xi_L(t)$ – стандартные независимые между собой белые гауссовские шумы, σ_K и σ_L – соответствующие коэффициенты волатильности. Такое включение в модель случайных воздействий достаточно традиционно в экономико-математических задачах [8–11].

Из (4) с помощью формулы Ито можно получить уравнения для фондовооруженности $k = K/L$ и непроизводственного потребления $c = C/L$:

$$\begin{aligned}\dot{k} &= -\mu k + uF(k) + \sigma_K k \xi_K(t) - \sigma_L k \xi_L(t), \quad k(0) = k_0, \\ \dot{c} &= \delta c + (1 - u)F(k) - \sigma_L c \xi_L(t), \quad c(0) = 0.\end{aligned}\tag{5}$$

Здесь $\mu = \lambda + \nu + \sigma_K \sigma_L - \sigma_L^2$, $\delta = \rho - \nu + \sigma_L^2$, $k_0 = K_0/L_0$, $F(k) = Y/L$ – производительность труда (валовый продукт на одного работника). Далее предполагается, что $\mu > 0$ и $\delta > 0$.

Стохастическая задача: в течение заданного интервала времени $[0, T]$ найти такое управление $u(t)$ с учетом (1) для уравнений (5), при котором среднее значение величины $c(T)$ максимально.

Далее будет использоваться производственная функция Кобба–Дугласа $Y(K, L) = AK^\alpha L^\beta$, где A – масштаб темпа производства ($A > 0$), α – коэффициент эластичности по основным фондам, $\beta = 1 - \alpha$ – коэффициент эластичности по трудовым ресурсам ($\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$). Тогда $F(k) = Y/L = AK^\alpha$. Предполагается, что переменные K , L , C и, следовательно, k и c доступны измерению в каждый момент времени.

2. Решение стохастической задачи

Для решения задачи используем метод динамического программирования. Введем функцию Беллмана $s(k, c; t, T)$ – среднее значение величины $c(T)$ при условии, что процесс продолжается на интервале времени $[t, T]$ с начальными условиями $k(t) = k$ и $c(t) = c$, и на этом интервале применяется оптимальное управление. Для этой функции можно записать уравнение Беллмана [12]:

$$-\frac{\partial s(k, c; t, T)}{\partial t} = \max_{0 \leq u(t) \leq 1} \left[\frac{\partial s(k, c; t, T)}{\partial k} (uF(k) - \mu k) + \frac{\partial s(k, c; t, T)}{\partial c} (\delta c + (1-u)F(k)) + q(k, c) \right], \quad (6)$$

$$s(k, c; T, T) = c.$$

Здесь

$$q(k, c) = \frac{1}{2} (\sigma_K^2 + \sigma_L^2) k^2 \frac{\partial^2 s(k, c; t, T)}{\partial k^2} + \sigma_L^2 k c \frac{\partial^2 s(k, c; t, T)}{\partial k \partial c} + \frac{1}{2} \sigma_L^2 c^2 \frac{\partial^2 s(k, c; t, T)}{\partial c^2}. \quad (7)$$

Это уравнение детерминированное, а c и k – просто аргументы функции. Из его решения получается решение задачи. Уравнение (6) перепишем в виде:

$$-\frac{\partial s(k, c; t, T)}{\partial t} = \max_{0 \leq u(t) \leq 1} \left[\left(\frac{\partial s}{\partial k} - \frac{\partial s}{\partial c} \right) u F(k) - \mu k \frac{\partial s}{\partial k} + \frac{\partial s}{\partial c} (\delta c + F(k)) + q(k, c) \right], \quad (8)$$

$$s(k, c; T, T) = c.$$

Максимум правой части этого уравнения по u с учетом (1) достигается при

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{\partial s}{\partial k} > \frac{\partial s}{\partial c}, \\ u_{oc}, & \text{если } \frac{\partial s}{\partial k} = \frac{\partial s}{\partial c}, \\ 0, & \text{если } \frac{\partial s}{\partial k} < \frac{\partial s}{\partial c}. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь u_{oc} – так называемое особое управление [13, 14], которое будет определено ниже. Временной участок, где используется особое управление, называется магистралью.

Можно допустить, что если коэффициенты σ_K и σ_L малы, то решение стохастической задачи будет близко к решению детерминированной задачи. Последняя задача с помощью принципа максимума Понтрягина подробно решена в [6]. Полученное решение состоит в том, что интервал $[0, T]$ точками t_1 и t_2 ($0 < t_1 < t_2 < T$) разбивается на три интервала: $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ и $[t_2, T]$. Интервал $[0, t_1]$ соответствует выходу на магистраль, интервал $[t_1, t_2]$ – магистрали (если она существует), интервал $[t_2, T]$ – заключительному этапу (сходу с магистрали). На магистрали $k = k_{oc} = \text{const}$, причем

$$k_{oc}^{1-\alpha} = \frac{\alpha A}{\delta + \mu}, \quad u_{oc} = \frac{\mu k}{F}. \quad (10)$$

Далее рассматривается основной вариант, когда $k(0) < k_{oc}$ и на интервале $[0, t_1]$ $u = 1$. На заключительном интервале $[t_2, T]$ $u = 0$. При этом предполагается, что период производства $[0, T]$ достаточно велик. Таким образом, структура оптимального управления имеет вид:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < t < t_1, \\ u_{oc} & \text{при } t_1 < t < t_2, \\ 0 & \text{при } t_2 < t < T. \end{cases} \quad (11)$$

Фактически получается, что решение детерминированной задачи сводится к нахождению значений t_1 и t_2 . Можно предположить, что в стохастическом случае при достаточно малых коэффициентах σ_K и σ_L решение будет близко к решению детерминированной задачи, т.е. структура оптимального управления имеет вид (11). Таким образом, решение стохастической задачи также сводится к нахождению значений t_1 и t_2 .

Решение уравнения (8) начнем с правого конца. Обозначим через $s_1(k, c; t, T)$, $s_2(k, c; t, T)$, $s_3(k, c; t, T)$ функции Беллмана, если момент t относится к интервалам $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, T]$ соответственно. Обозначим также $k_i = k(t_i)$ и $c_i = c(t_i)$, $i = 1, 2$.

3. Сход с магистрали

На интервале $[t_2, T]$ $u = 0$. Поэтому уравнение (8) принимает вид:

$$-\frac{\partial s_3(k, c; t, T)}{\partial t} = -\mu k \frac{\partial s_3(k, c; t, T)}{\partial k} + \frac{\partial s_3(k, c; t, T)}{\partial c} (\delta c + F(k)) + q(k, c),$$

$$s_3(k, c; T, T) = c. \quad (12)$$

Пользуясь методом разделения переменных, его решение будем искать в виде:

$$s_3(k, c; t, T) = ce^{\delta(T-t)} + F(k)w_3(t, T), \quad (13)$$

где $w_3(t, T)$ – искомая функция, причем такая, что $w_3(T, T) = 0$. Подставляя (13) в (7) и (12) и сокращая подобные слагаемые, получаем

$$-F(k)\dot{w}_3(t, T) = -\mu k F'(k)w_3(t, T) + e^{\delta(T-t)}F(k) + \frac{1}{2}\sigma k^2 F''(k)w_3(t, T),$$

где $\sigma = (\sigma_K^2 + \sigma_L^2)/2$. Учитывая, что

$$F(k) = Ak^\alpha, \quad F'(k) = \alpha Ak^{\alpha-1} = \alpha F(k)/k, \quad F''(k) = \alpha(\alpha-1)Ak^{\alpha-2} = -\alpha\beta F(k)/k^2,$$

из последнего получаем

$$-F(k)\dot{w}_3(t, T) = -\alpha\mu F(k)w_3(t, T) - \alpha\beta\sigma F(k)w_3(t, T) + F(k)e^{\delta(T-t)}.$$

Сократив здесь на $F(k)$, приходим к уравнению

$$-\dot{w}_3(t, T) = -\theta w_3(t, T) + e^{\delta(T-t)}, \quad w_3(T, T) = 0,$$

где $\theta = \alpha\mu + \alpha\beta\sigma$. Параметр σ можно назвать обобщенным коэффициентом волатильности. Решение последнего уравнения примет вид:

$$w_3(t, T) = \frac{e^{\delta(T-t)} - e^{-\theta(T-t)}}{\delta + \theta}. \quad (14)$$

4. Магистраль

На магистрали уравнение (8) принимает вид:

$$-\frac{\partial s_2(k, c; t, T)}{\partial t} = -\mu k \frac{\partial s_2}{\partial k} + \frac{\partial s_2}{\partial c} (\delta c + F(k)) + q(k, c). \quad (15)$$

Согласно (4) на интервале $[t_1, t_2]$ должно выполняться условие

$$\frac{\partial s_2(k, c; t, T)}{\partial k} \equiv \frac{\partial s_2(k, c; t, T)}{\partial c}. \quad (16)$$

Решение уравнения (15) будем искать в виде:

$$s_2(k, c; t, T) = (c + H(k))e^{\delta(T-t)} + B, \quad (17)$$

где $H(k)$ – искомая функция, B – какая-то константа. Подставляя (17) в (7) и (15), сокращая на $e^{\delta(T-t)}$ и приводя подобные члены, получаем

$$-\delta H(k) = -\mu k H'(k) + F(k) + \sigma k^2 H''(k). \quad (18)$$

Из (16) и (17) видно, что для выполнения условия (16) необходимо, чтобы $H'(k) = 1$. Если последнее выполняется, то и $H''(k) = 0$. Поэтому из (18) следует

$$H(k) = \frac{F - \mu k}{\delta}. \quad (19)$$

К выражению (19) еще раз применим условие $H' = 1$. Получаем

$$H'(k) = \frac{\alpha Ak^{\alpha-1} - \mu}{\delta} = 1.$$

Отсюда следует выражение (10) для $k = k_{oc}$. Поскольку на интервале $[t_1, t_2]$ $k_{oc} = const$, то из (3) при $\sigma_K = \sigma_L = 0$ следует выражение (10) для u_{oc} .

Константа B в (17) определяется из условия $s_2(k_2, c_2; t_2, T) = s_3(k_2, c_2; t_2, T)$. Это следует из принципа оптимальности Беллмана. Подставляя сюда (13) и (17), получаем

$$B = F(k_2)w_3(t_2, T) - H(k_2)e^{\delta(T-t_2)}.$$

Подставляя это выражение в (17), получаем окончательно с учетом (14)

$$s_2(k; t, T) = (c + H(k))e^{\delta(T-t)} + (Q(k_2) - H(k_2))e^{\delta(T-t_2)} - Q(k_2)e^{-\theta(T-t_2)}, \quad (20)$$

где

$$Q(k) = \frac{F(k)}{\delta + \theta}.$$

Заметим, что в этом выражении $t < t_2$ и $k_2 = k_{oc}$.

Поскольку последнее выражение зависит от параметра t_2 , то естественно выбрать его так, чтобы достигался максимум. Вычислим первую производную и приравняем ее к нулю:

$$\frac{ds_2}{dt_2} = -\delta(Q(k_2) - H(k_2))e^{\delta(T-t_2)} - \theta Q(k_2)e^{-\theta(T-t_2)} = 0.$$

Отсюда получаем

$$e^{-(\delta+\theta)(T-t_2)} = \frac{\delta(H(k_2) - Q(k_2))}{\theta Q(k_2)} \quad (21)$$

и

$$T - t_2 = r_3 = \frac{1}{\delta + \theta} \ln \left(\frac{\theta Q(k_2)}{\delta(H(k_2) - Q(k_2))} \right). \quad (22)$$

Таким образом, длина интервала $[t_2, T]$ равна значению r_3 . Анализ второй производной функции $s_2(k, c; t_2, T)$ показывает, что при условии (21) она всегда отрицательна и, следовательно, эта функция имеет максимум. Подставляя (21) в (20), получаем окончательно

$$s_2(k; t, T) = (c + H(k))e^{\delta(T-t)} + e^{\delta(T-t_2)} \frac{\theta + \delta}{\theta} (Q(k_2) - H(k_2)).$$

5. Выход на магистраль

На интервале $[0, t_1]$ $u = 1$. Поэтому согласно (2) непроизводственное потребление $C(t) \equiv 0$. Следовательно, $c(t) \equiv 0$ и $s_1(k, c; t, t_1) = 0$. Согласно принципу оптимальности имеем

$$s_1(k, c; t, T) \equiv s_1(k, c; t, t_1) + s_2(k_1, c_1; t_1, T) = s_2(k_1, c_1; t_1, T).$$

Здесь $k_1 = k_{oc}$ и $c_1 = 0$. На интервале $[0, t_1]$ уравнение (6) имеет вид:

$$-\frac{\partial s_1(k, c; t, T)}{\partial t} = \frac{\partial s_1(k, c; t, T)}{\partial k} (F(k) - \mu k) + \delta c \frac{\partial s_1(k, c; t, T)}{\partial c} + q(k, c),$$

$$s_1(k, c; T, T) = s_2(k, c; T, T).$$

Поскольку $s_1(k, c; t, t_1) = \text{const}$, то слагаемым $q(k, c)$ можно пренебречь. В результате получаем уравнение в частных производных первого порядка, которое можно решать методом характеристик [15]. Соответствующие характеристические уравнения имеют вид:

$$\dot{k} = -\mu k + F(k), \quad k(0) = k_0,$$

$$\dot{c} = \delta c, \quad c(0) = 0.$$

Отсюда следует, что $c(t) \equiv 0$, а решение первого уравнения имеет вид:

$$k^\beta(t) = \frac{A}{\mu} (1 - e^{-\beta\mu(t-t_0)}) + k_0^\beta e^{-\beta\mu(t-t_0)}.$$

Это решение получается в результате подстановки: $k(t) = \exp\{y(t) + z(t)\}$, где $y(t)$ и $z(t)$ – произвольные функции.

Момент t_1 определяется из условия $k(t_1) = k_{oc}$ или

$$\frac{A}{\mu}(1 - e^{-\beta\mu t_1}) + k_0^\beta e^{-\beta\mu t_1} = k_{oc}^\beta.$$

Отсюда

$$t_1 = \frac{1}{\mu\beta} \ln \left(\frac{A - \mu k_0^\beta}{A - \mu k_{oc}^\beta} \right). \quad (23)$$

Если обозначить через r_1 , r_2 и r_3 длины интервалов $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ и $[t_2, T]$ соответственно ($r_1 + r_2 + r_3 = T$), то $r_1 = t_1$ определяется из (23), r_3 определяется из (22) и $r_2 = T - r_1 - r_3$. Отсюда, в частности, необходимо для существования рассматриваемого решения, чтобы $T > r_1 + r_3$. Полученное решение относится к случаю, когда $k(0) < k_{oc}$. Аналогично можно рассмотреть вариант, когда $k(0) > k_{oc}$. Соответствующее решение приводить не будем. Отметим только, что в этом случае на интервале $[0, t_1]$ $u = 0$.

Заключение

В данной работе решена задача оптимального управления односекторной экономикой при случайном изменении основного капитала и трудовых ресурсов. Получено управление в программной форме (4).

Проведен анализ влияния случайных составляющих, из которого следует, что случайные составляющие влияют только на длину интервала $[t_2, T]$, определяемую в (22). Из данной формулы видно, что эта длина убывает до нуля с ростом обобщенного коэффициента волатильности σ .

Максимальное среднее значение непроизводственного потребления на интервале $[0, T]$ составляет

$$s(k_0, 0; 0, T) = s_2(k_1, 0; t_1, T) = H(k_1)e^{\delta(T-t_1)} + e^{\delta(T-t_2)} \frac{\theta + \delta}{\theta} (Q(k_2) - H(k_2)),$$

где $k_1 = k_2 = k_{oc}$. При увеличении параметра σ это значение убывает. Это объясняется тем, что при увеличении σ уменьшается интервал $[t_2, T]$ и увеличивается интервал $[t_1, t_2]$, где прирост непроизводственного потребления меньше, чем на интервале $[t_2, T]$ ($u_{oc} < 1$). При этом нижняя граница равна

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} s(k_0, 0; 0, T) = H(k_1)e^{\delta(T-t_1)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Эрроу К. Применение теории управления к экономическому росту // Математическая экономика. М. : Мир, 1974. С. 7–45.
2. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. М. : Наука, 1984. 296 с.
3. Демин Н.С., Кулешова Е.В. Максимизация потребления работодателей в случае производственной функции общего вида // Обзорные прикладной и промышленной математики. 2004. Т. 11, вып. 2. С. 326–327.
4. Демин Н.С., Кулешова Е.В. Управление односекторной экономикой на конечном интервале времени с учетом потребления работодателей // Автоматика и телемеханика. 2008. № 9. С. 140–155.
5. Демин Н.С., Кулешова Е.В. Принцип магистрали в задаче управления односекторной экономикой при наличии ограничений на накопление и потребление // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 2 (7). С. 5–23.
6. Параев Ю.И., Грекова Т.И., Данилюк Е.Ю. Аналитическое решение задачи оптимального управления односекторной экономикой на конечном интервале времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 4 (17). С. 5–15.
7. Анисимов А.В., Григоренко Н.Л., Лукьянова Л.Н. Задача оптимального управления для односекторной модели экономического роста со смешанными ограничениями // Прикладная математика и информатика : труды факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. М. : МАКС Пресс, 2013. Т. 44. С. 5–21.
8. Соловьев В.И. Стохастические методы в экономике и финансах. М. : ГУУ, 2000. 154 с.
9. Merton R.C. Life time portfolio selection under uncertainty: the continuous time case // Review of Economics and Statistics. 1969. V. 51, No. 3. P. 247–257.
10. Merton R.C. An asymptotic theory of growth under uncertainty // Review of Economic Studies. 1975. V. 42, No. 3. P. 375–393.
11. Merton R.C., Samuelson P.A. Continuous-time finance. Cambridge, MA : Basil Blackwell, 1990. 700 p.
12. Параев Ю.И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М. : Сов. радио, 1976. 184 с.

13. Параев Ю.И. Об особом управлении в оптимальных процессах, линейных относительно управляющих воздействий // Автоматика и телемеханика. 1962. № 9. С. 1202–1209.
14. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М., 1973. 256 с.
15. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М. : ГИФМЛ. 1966. 260 с.

Поступила в редакцию 24 апреля 2018 г.

Paraev Ju.I., Grekova T.I., Poluektova K.O. (2019) OPTIMAL CONTROL OF ONE-SECTOR ECONOMY UNDER RANDOM VARIATION OF FIXED CAPITAL AND LABOR RESOURCES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 46. pp. 12–19

DOI: 10.17223/19988605/46/2

The problem of optimal control of one-sector economy under random variation of fixed capital and labor resources is considered. The state of the economy is characterized by such variables: the fixed capital $K(t)$, the labor resources $L(t)$, the non-productive consumption $C(t)$, and also the production function $Y(K, L)$. In a stochastic case change of these sizes is described by the equations

$$\begin{aligned}\dot{K} &= uY(K, L) - \lambda K(t) + \sigma_K K \xi_K(t), \quad K(0) = K_0 > 0, \\ \dot{C} &= \rho C + (1 - u)Y(K, L), \quad C(0) = 0, \\ \dot{L} &= \nu L + \sigma_L L \xi_L(t), \quad L(0) = L_0 > 0,\end{aligned}\tag{1}$$

where $\lambda (\geq 0)$ is the depreciation rate, $\rho (\geq 0)$ is the discount rate, $\xi_K(t)$ and $\xi_L(t)$ denote the standard independent white Gaussian noises, σ_K and σ_L are the coefficients of volatility correspondingly. Here u is the control parameter defining the share of the product produced, which is used to increase in fixed capital. Then size $1 - u$ defines part of a product which goes on increase in non-productive consumption. It is obvious that $0 \leq u \leq 1$.

For research variables are entered: $k(t) = K(t)/L(t)$ is the capital-labor ratio and $c(t) = C(t)/L(t)$ – the non-productive consumption falling on one worker. For these variables on the basis of Ito's formula from (1) the equations turn out

$$\begin{aligned}\dot{k} &= -\mu k + uF(k) + \sigma_K k \xi_K(t) - \sigma_L k \xi_L(t), \quad k(0) = k_0, \\ \dot{c} &= \delta c + (1 - u)F(k) - \sigma_L c \xi_L(t), \quad c(0) = 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Here $\mu = \lambda + \nu + \sigma_K \sigma_L - \sigma_L^2$, $\delta = \rho - \nu + \sigma_L^2$, $k_0 = K_0/L_0$, $F(k) = Y(K, L)/L$ is the labor productivity (a gross product on one worker). Further it is supposed that $\mu > 0$ and $\delta > 0$. In this study the production function of Kobb–Douglas is considered, that is $Y(K, L) = AK^\alpha L^\beta$, where A denotes the scale of rate of production ($A > 0$), α is the elasticity coefficient on fixed capital, β is the elasticity coefficient on labor resources. From here $F(k) = Ak^\alpha$. It is supposed that the planned period of production $[0, T]$ is given and rather great.

The task consists in finding on the time interval $[0, T]$ for system (2) of such control $u(t)$ satisfying the condition $0 \leq u \leq 1$ at which the average value of $c(T)$ is maximum. This problem is solved by making use of a method of dynamic programming. Bellman's function $s(k, c; t, T)$ is considered, which is an average value of $c(T)$ provided that the process proceeds on the interval $[t, T]$ with initial conditions $k(t) = k$ and $c(t) = c$. The solution of a task we obtain by solving Bellman's equation.

This solution consists in the fact that the interval $[0, T]$ by the points t_1 and t_2 ($0 < t_1 < t_2 < T$) is divided into three intervals: $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, and $[t_2, T]$. The interval $[0, t_1]$ corresponds to the output to the highway, the interval $[t_1, t_2]$ – to the highway (if it exists), the interval $[t_2, T]$ – to the final stage (to a descent from the highway). The highway is the time site, where special control u_{oc} is used. On the highway $k = k_{oc} = \text{const}$, and

$$k_{oc}^{1-\alpha} = \frac{\alpha A}{\delta + \mu}, \quad u_{oc} = \frac{\mu k_{oc}}{F(k_{oc})}.$$

If $k(0) < k_{oc}$, then $u = 1$ on the interval $[0, t_1]$ and $u = 0$ on the interval $[t_2, T]$. As a result, it turns out that the control structure is determined by values of t_1 and t_2 . The moment t_1 depends only on the initial condition $k(0)$ and doesn't depend on a stochastic component. The moment t_2 doesn't depend on the initial condition, but depends on the volatility coefficients σ_K and σ_L . Thus with growth of these coefficients the interval length $[t_2, T]$ and average value of non-productive consumption decrease.

Keywords: the one-sector economy; fixed capital; labor resources; non-productive consumption; optimal control; dynamic programming.

PARAEV Jury Ivanovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: paraev@mail.ru

GREKOVA Tatiana Ivanovna (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: ti_gre@mail.ru

POLUEKTOVA Kseniya Olegovna (Post-graduate student, National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: poluekt.kseni@mail.ru

REFERENCES

1. Arrow, K. (1974) *Primenenie teorii upravleniya k ekonomicheskomu rostu* [Application of control theory to economic growth]. In: Mityagin, B.S. (ed.) *Matematicheskaya ekonomika* [Mathematical Economics]. Moscow: Mir. pp. 7–45.
2. Ashmanov, S.A. (1984) *Vvedenie v matematicheskuyu ekonomiku* [Introduction to mathematical economy]. Moscow: Nauka.
3. Demin, N.S. & Kuleschova, E.V. (2004) Maksimizatsiya potrebleniya rabotodateley v sluchae proizvodstvennoy funktsii obshchego vida [Maximizing consumption of employers in case of production function of a general view]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki*. 11(2). pp. 326–327.
4. Demin, N.S. & Kuleschova, E.V. (2008) Control of single-sector economy over a finite time interval with allowance for employer consumption. *Automation and Remote Control*. 9. pp. 140–155. DOI: 10.1134/S0005117908090117.
5. Demin, N.S. & Kuleschova, E.V. (2009) Turnpike principle in a problem of management onesectoreconomy in the presence of restrictions on saving and consumption. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo unitversiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(7). (In Russian).
6. Paraev, Yu.I., Grekova, T.I. & Danilyuk, E.Yu. (2011) The analytical decision of a problem of optimumcontrol one-sector economy on a final interval of time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo unitversiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(17) (In Russian).
7. Anisimov, A.V., Grigorenko, N.L. & Lukyanova, L.N. (2013) Zadacha optimal'nogo upravleniya dlya odnosektornoy modeli ekonomicheskogo rosta so smeshannymi ogranicheniyami [Problem of optimum control for one-sector model of economic growth with the mixed restrictions]. In: Kostomarov, D.P. & Dmitriev, V.I. (eds) *Prikladnaya matematika i informatika* [Applied Mathematics and Computer Science]. Vol. 44. Moscow: Maks Press. pp. 5–21.
8. Solov'yev, V.I. (2000) *Stokhasticheskie metody v ekonomike i finansakh* [Stochastic Methods in Economics and Finance]. Moscow: State University of Management.
9. Merton, R.C. (1969) Life time portfolio selection underuncertainty: the continuous time case. *Review of Economics and Statistics*. 51(3). pp. 247–257. DOI: 10.2307/1926560
10. Merton, R.C. (1975) An asymptotic theory of growth under uncertainty. *Review of Economic Studies*. 42(3). pp. 375–393.
11. Merton, R.C. & Samuelson, P.A. (1999) *Continuous-time finance*. Cambridge, MA: Basil Blackwell.
12. Paraev, Yu.I. (1976) *Vvedenie v statisticheskuyu dinamiku protsessov upravleniya i fil'tratsii* [Introduction to statistical dynamics of control processes and filtrations]. Moscow: Sovetskoe Radio.
13. Paraev, Yu.I. (1962) Ob osobom upravlenii v optimal'nykh protsessakh, lineynykh odnositel'no upravlyayushchikh vozdeystviy [On special control in optimum processes linear in relation to control actions]. *Avtomatika i telemekhanika*. 9. pp. 1202–1209.
14. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (1973) *Osobyie optimal'nye upravleniya* [Special optimal controls]. Moscow: Librokom.
15. Kamke, E. (1961) *Spravochnik po differentsial'nykh uravneniyam v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka* [A reference-book on the ordinary differential equations]. Moscow: GIFML.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 537.874.6

DOI: 10.17223/19988605/46/3

А.Г. Дмитренко**МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ
НА СТРУКТУРЕ ИЗ ТРЕХМЕРНОГО ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕГО ТЕЛА
И ТОНКОГО ПРОВОДНИКА**

Метод вспомогательных источников использован для моделирования в резонансной частотной области электромагнитного рассеяния на структуре из трехмерного идеально проводящего тела и тонкого проводника. Приведены некоторые результаты численных расчетов, характеризующие влияние идеально проводящего тела на распределение тока вдоль проводника, а также влияние тонкого проводника на сечения рассеяния идеально проводящего тела.

Ключевые слова: электромагнитное рассеяние; метод вспомогательных источников; идеально проводящее тело; тонкий проводник; распределение тока; сечение рассеяния.

Значительный интерес для исследователей представляет изучение рассеяния электромагнитных волн структурами, образованными совокупностью идеально проводящих тел, имеющих размеры, сравнимые с длиной волны. Этот интерес обусловлен необходимостью решения ряда практически важных проблем, например таких, как проблемы электромагнитной совместимости радиоэлектронных средств, радионавигации, дефектоскопии, радиолокационной заметности и идентификации объектов. Особый интерес представляет случай, когда расстояние между телами структуры меньше длины волны. В этом случае поле, рассеянное каждым телом, наводит вторичные токи на всех других телах. В результате токи на всех телах структуры оказываются взаимосвязанными, и структуру приходится рассматривать как единое целое, что существенно усложняет решение соответствующей задачи рассеяния.

Частным случаем задачи электромагнитного рассеяния совокупностью тел является задача рассеяния на двух идеально проводящих телах. Анализ имеющейся в распоряжении автора литературы показывает, что к настоящему времени уже решены задачи электромагнитного рассеяния на двух идеально проводящих сферах [1–3], на двух соосных круговых цилиндрах конечной длины [4–5], на двух соосных вытянутых сфероидах [6–7], на двух суперэллипсоидах [8]. Рассматривалось также электромагнитное рассеяние на структурах, состоящих из идеально проводящих тел различной геометрии. В частности, в работах [5], [9] рассмотрено рассеяние на структуре, состоящей из конечного кругового цилиндра и сферы, а в работе [8] – на структуре, состоящей из сфероида и биконуса. Однако в литературе отсутствуют работы, касающиеся электромагнитного рассеяния на структуре, состоящей из трехмерного идеально проводящего тела и тонкого проводника.

Данная статья закрывает этот пробел. Она посвящена моделированию рассеяния электромагнитной волны на структуре из трехмерного идеально проводящего тела и тонкого проводника. В основе моделирования лежит предложенный ранее в [10–11] метод вспомогательных источников. Приведены некоторые результаты численных расчетов, характеризующие влияние идеально проводящего тела на распределение тока вдоль проводника, а также влияние тонкого проводника на сечения рассеяния идеально проводящего тела. Эти результаты представляют интерес для исследователей, занимающихся проблемами антенной техники и радиолокационной заметности.

1. Формулировка задачи

Геометрия задачи показана на рис. 1. Будем рассматривать стационарную (зависимость от времени выбрана в виде $\exp(-i\omega t)$) задачу дифракции электромагнитного поля $\{\vec{E}_0, \vec{H}_0\}$ на структуре, состоящей из непересекающихся идеально проводящего тела D , ограниченного поверхностью S , и тонкого проводника, ограниченного поверхностью S' . Под тонким проводником будем понимать идеальный проводник круглого сечения, диаметр которого конечен, но мал по сравнению с длиной волны. Эта структура размещена в однородной безграничной среде D_e с диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ_e и μ_e в декартовой системе координат с центром, выбранным внутри трехмерного тела D . Требуется найти рассеянное поле $\{\vec{E}_e, \vec{H}_e\}$ в области D_e .

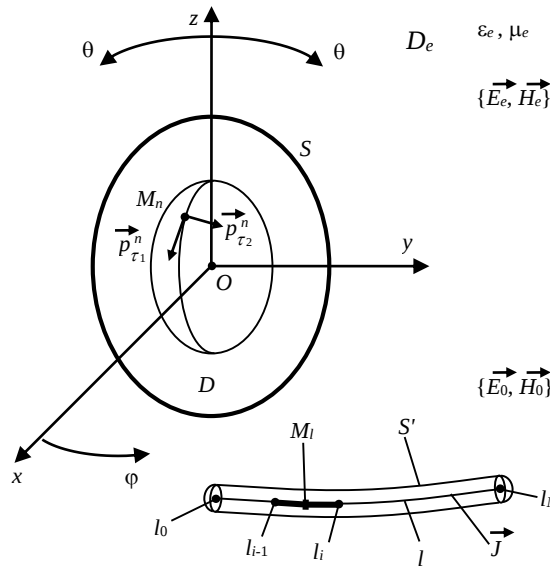


Рис. 1. Геометрия задачи
Fig. 1. Geometry of the problem

Поле $\{\vec{E}_e, \vec{H}_e\}$ должно удовлетворять уравнениям Максвелла:

$$\nabla \times \vec{E}_e = i\omega\mu_e \vec{H}_e, \quad \nabla \times \vec{H}_e = -i\omega\epsilon_e \vec{E}_e \quad \text{в } D_e, \quad (1)$$

граничным условиям

$$\vec{n} \times \vec{E}_e = -\vec{n} \times \vec{E}_0 \quad \text{на } S \text{ и } S' \quad (2)$$

и условиям излучения

$$\{\sqrt{\epsilon_e} \vec{E}_e; \sqrt{\mu_e} \vec{H}_e\} \times \vec{R} / R + \{\sqrt{\mu_e} \vec{H}_e; -\sqrt{\epsilon_e} \vec{E}_e\} = O(R^{-1}), \quad R \rightarrow \infty. \quad (3)$$

В выражениях (1)–(3) $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к поверхностям S и S' , ограничивающим тело D и тонкий проводник; $R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$; $\vec{a} \times \vec{b}$ – векторное произведение.

2. Модель рассеянного поля

Модель рассеянного поля строится следующим образом. Введем внутри тела D вспомогательную поверхность $S_e = K_e S$, подобную поверхности тела S в смысле гомотетии с центром в центре декартовой системы координат O . Коэффициент гомотетии (подобия) K_e характеризует удаление вспомогательной поверхности S_e от поверхности тела S , его значения лежат в интервале $0 < K_e < 1$

(при $K_e = 0$ вспомогательная поверхность стягивается в точку, при $K_e = 1$ она совпадает с поверхностью S). Выберем на вспомогательной поверхности S_e конечную совокупность точек $\{M_n\}_{n=1}^N$ и в каждой точке M_n разместим пару независимых вспомогательных элементарных электрических диполей с моментами $\vec{p}_{\tau_1}^n = p_{\tau_1}^n \vec{e}_{\tau_1}^n$, $\vec{p}_{\tau_2}^n = p_{\tau_2}^n \vec{e}_{\tau_2}^n$, ориентированными вдоль единичных направлений $\vec{e}_{\tau_1}^n$, $\vec{e}_{\tau_2}^n$, выбранных в плоскости, касательной к S_e в точке M_n , и излучающих в однородную среду с параметрами ϵ_e и μ_e .

Внутри тонкого проводника на его оси разместим непрерывно распределенный вспомогательный ток $\vec{J}$.

Представим неизвестное рассеянное поле $\{\vec{E}_e, \vec{H}_e\}$ в D_e в виде суммы полей введенных вспомогательных диполей и тока:

$$\begin{aligned} \vec{E}_e(M) &= (i/\omega\epsilon_e) \left\{ \sum_{n=1}^N \nabla \times (\nabla \times \vec{\Pi}_n) + \nabla \times (\nabla \times \vec{\Pi}') \right\}, \quad \vec{H}_e(M) = \sum_{n=1}^N \nabla \times \vec{\Pi}_n + \nabla \times \vec{\Pi}', \\ \vec{\Pi}_n &= \Psi_e(M, M_n) \vec{p}_{\tau}^n, \quad \vec{\Pi}' = \int_l \Psi_e(M, M_l) \vec{J} dl, \quad \Psi_e(M, M_n) = \exp(ik_e R_{MM_n}) / (4\pi R_{MM_n}), \\ \Psi_e(M, M_l) &= \exp(ik_e R_{MM_l}) / (4\pi R_{MM_l}), \quad \vec{p}_{\tau}^n = p_{\tau_1}^n \vec{e}_{\tau_1}^n + p_{\tau_2}^n \vec{e}_{\tau_2}^n, \quad M \in D_e. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $k_e = \omega\sqrt{\epsilon_e\mu_e} = 2\pi/\lambda$ – волновое число в среде D_e ; R_{MM_n} – расстояние от точки M_n на S_e до точки M в D_e ; R_{MM_l} – расстояние от точки M_l на оси проводника до той же точки M в D_e ; $p_{\tau_1}^n, p_{\tau_2}^n$ ($n = \overline{1, N}$) – неизвестные комплексные постоянные (дипольные моменты); N – число точек размещения диполей на вспомогательной поверхности S_e ; $\vec{J}$ – неизвестный осевой вспомогательный ток; интегрирование проводится вдоль оси проводника l .

Поле (4) удовлетворяет уравнениям Максвелла (1) и условиям излучения (3). Для того чтобы удовлетворить граничным условиям (2), необходимо соответствующим образом выбрать дипольные моменты $p_{\tau_1}^n, p_{\tau_2}^n$ ($n = \overline{1, N}$) и распределение осевого тока $\vec{J}$.

Введем кусочно-постоянную аппроксимацию осевого тока. Разобьем линию l осевого тока на N_l малых участков, в пределах каждого из которых ток можно считать постоянным. Тогда выражение для $\vec{\Pi}'$ в (4) приближенно можно записать в виде:

$$\vec{\Pi}' = \sum_{i=1}^{N_l} J_i \vec{e}_i \int_{l_{i-1}}^{l_i} \Psi_e(M, M_l) dl, \quad (5)$$

где J_i – величина тока на i -м участке проводника; $\vec{e}_i$ – единичный вектор, направление которого совпадает с направлением касательной в средней точке рассматриваемого участка. При таком подходе нахождение неизвестного распределения осевого тока сводится к нахождению значений N_l элементов тока.

Для определения величин дипольных моментов и элементов тока используем граничные условия (2), удовлетворяя им в соответствии с методом коллокаций. Пусть M_j ($j = 1, 2, \dots, L$) – точки коллокации на поверхности S , а $M_{j'}$ ($j' = 1, 2, \dots, L'$) – точки коллокации на поверхности S' ; L – число точек коллокации на S , а L' – число точек коллокации на S' . В силу предположения о малости диаметра проводника по сравнению с его длиной и длиной волны и выбранного в соответствии с этим представления для поля проводника будем считать, что вкладом в рассеянное поле азимутальной составляющей тока

на поверхности проводника можно пренебречь. Тогда для нахождения неизвестных $p_{\tau 1}^n, p_{\tau 2}^n$ ($n = \overline{1, N}$) и J_i ($i = \overline{1, N_l}$) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений с комплексной матрицей размерности $(2L + L') \times (2N + N_l)$:

$$\begin{aligned}\vec{n}^j \times \vec{E}_e^j &= -\vec{n}^j \times \vec{E}_0^j, & j = \overline{1, L}, \\ E_{e,l}^{j'} &= -E_{0,l}^{j'}, & j' = \overline{1, L'},\end{aligned}\quad (6)$$

где $\vec{n}^j, \vec{E}_e^j$ и $\vec{E}_0^j$ – значения векторов нормали и электрических компонент рассеянного (4) и возбуждающего полей в точке коллокации j на поверхности S тела D , а $E_{e,l}^{j'}$ и $E_{0,l}^{j'}$ – значения составляющих тех же компонент вдоль оси тонкого проводника в точках коллокации j' на его поверхности. Решение системы (6) находим путем минимизации функции

$$\Phi = \sum_{j=1}^L \left| \vec{n}^j \times (\vec{E}_e^j + \vec{E}_0^j) \right|^2 + \sum_{j'=1}^{L'} \left| E_{e,l}^{j'} + E_{0,l}^{j'} \right|^2. \quad (7)$$

После решения задачи минимизации, т.е. определения неизвестных дипольных моментов $p_{\tau 1}^n, p_{\tau 2}^n$ ($n = \overline{1, N}$) и элементов тока J_i ($i = \overline{1, N_l}$), необходимые характеристики рассеянного поля определяем из (4). В частности, для компонент рассеянного поля в дальней зоне имеем

$$\begin{aligned}E_{e,\theta}(M) &= (\mu_e / \varepsilon_e)^{1/2} H_{e,\varphi}(M) = (\exp(ik_e R) / k_e R) D_\theta(\theta, \varphi) + O(R^{-2}), \\ E_{e,\varphi}(M) &= -(\mu_e / \varepsilon_e)^{1/2} H_{e,\theta}(M) = (\exp(ik_e R) / k_e R) D_\varphi(\theta, \varphi) + O(R^{-2}),\end{aligned}\quad (8)$$

где компоненты диаграммы рассеяния $D_\theta(\theta, \varphi)$ и $D_\varphi(\theta, \varphi)$ определены выражениями

$$\begin{aligned}D_\theta(\theta, \varphi) &= \sum_{n=1}^N G_n(\theta, \varphi) \{ (\cos \theta \cos \varphi \cos \alpha_1^n + \cos \theta \sin \varphi \cos \beta_1^n - \sin \theta \cos \gamma_1^n) p_{\tau 1}^n + (\cos \theta \cos \varphi \cos \alpha_2^n + \\ &+ \cos \theta \sin \varphi \cos \beta_2^n - \sin \theta \cos \gamma_2^n) p_{\tau 2}^n \} + \sum_{i=1}^{N_l} J_i (\cos \theta \cos \varphi \cos \alpha^i + \cos \theta \sin \varphi \cos \beta^i - \sin \theta \cos \gamma^i) \int_{l_{i-1}}^{l_i} G(\theta, \varphi, l) dl, \\ D_\varphi(\theta, \varphi) &= \sum_{n=1}^N G_n(\theta, \varphi) \{ (-\sin \varphi \cos \alpha_1^n + \cos \varphi \cos \beta_1^n) p_{\tau 1}^n + (-\sin \varphi \cos \alpha_2^n + \cos \varphi \cos \beta_2^n) p_{\tau 2}^n \} + \\ &+ \sum_{i=1}^{N_l} J_i (-\sin \varphi \cos \alpha^i + \cos \varphi \cos \beta^i) \int_{l_{i-1}}^{l_i} G(\theta, \varphi, l) dl, \\ G_n(\theta, \varphi) &= \exp\{-ik_e(x_n \sin \theta \cos \varphi + y_n \sin \theta \sin \varphi + z_n \cos \theta)\}, \\ G(\theta, \varphi, l) &= \exp\{-ik_e(x_l \sin \theta \cos \varphi + y_l \sin \theta \sin \varphi + z_l \cos \theta)\},\end{aligned}$$

в которых $\cos \alpha_1^n, \cos \beta_1^n, \cos \gamma_1^n$ и $\cos \alpha_2^n, \cos \beta_2^n, \cos \gamma_2^n$ – направляющие косинусы единичных векторов $\vec{e}_{\tau 1}^n$ и $\vec{e}_{\tau 2}^n$; $\cos \alpha^i, \cos \beta^i, \cos \gamma^i$ – направляющие косинусы единичных векторов $\vec{e}_i$; x_n, y_n, z_n – декартовы координаты точки M_n ; x_l, y_l, z_l – переменные интегрирования по элементу (l_{i-1}, l_i) тонкого проводника; θ и φ – общепринятые угловые сферические координаты точки наблюдения M .

Контроль точности решения осуществляем путем вычисления относительного значения функции (7) на сетке точек, промежуточных по отношению к точкам коллокации, выбираемых на поверхностях S и S' :

$$\Delta = (\Phi' / \Phi_0)^{1/2}, \quad (9)$$

где Φ' – значение функции (7) на указанной выше совокупности точек; Φ_0 – значение соответствующей нормы падающего поля на этой же совокупности точек, определяемое выражением

$$\Phi = \sum_{j=1}^{L_1} \left| \vec{n}^j \times \vec{E}_0^j \right|^2 + \sum_{j=1}^{L'_1} \left| E_{0,l}^{j'} \right|^2,$$

в котором L_1 и L'_1 – число промежуточных точек соответственно на поверхностях S и S' .

3. Результаты моделирования

Изложенный выше алгоритм был реализован в качестве компьютерной программы для расчета компонент рассеянного поля и контроля точности полученного решения. Программа предусматривает, что тело D может быть либо трехосным эллипсоидом, либо конечным цилиндром с эллиптическим поперечным сечением (с плоскими или скругленными торцами), а тонкий проводник является прямолинейным. Входными величинами программы являются координата центра объемного тела O и координаты начала и конца осевой линии тонкого проводника, определяющие взаимное расположение тел в структуре, а также величины характеристик геометрических параметров рассеивателей (в длинах волн), возбуждающее поле $\{\vec{E}_0, \vec{H}_0\}$, параметр подобия K_e , числа точек размещения диполей N и точек коллокации L для объемного тела D , а также числа участков разбиения осевой линии N_l и точек коллокации L' для тонкого проводника. Выходными величинами программы являются компоненты диаграммы рассеяния $D_\theta(\theta, \varphi)$ и $D_\varphi(\theta, \varphi)$, бистатистические сечения рассеяния

$$\sigma(\theta, \varphi) = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi R^2 [|E_{e,\theta}|^2 + |E_{e,\varphi}|^2] / |\vec{E}_0|^2, \quad (10)$$

распределение осевого тока J , а также относительная норма невязки граничных условий (9). Минимизация функции (7) осуществляется методом сопряженных градиентов; итерационный процесс останавливается при условии, если относительное изменение функции на каждой из десяти последних итераций не превышает 0,001. При помощи данной программы выполнена серия вычислительных экспериментов, направленных на исследование влияния объемного идеально проводящего тела на распределение тока вдоль проводника, а также на исследование влияния тонкого проводника на сечения рассеяния объемного тела.

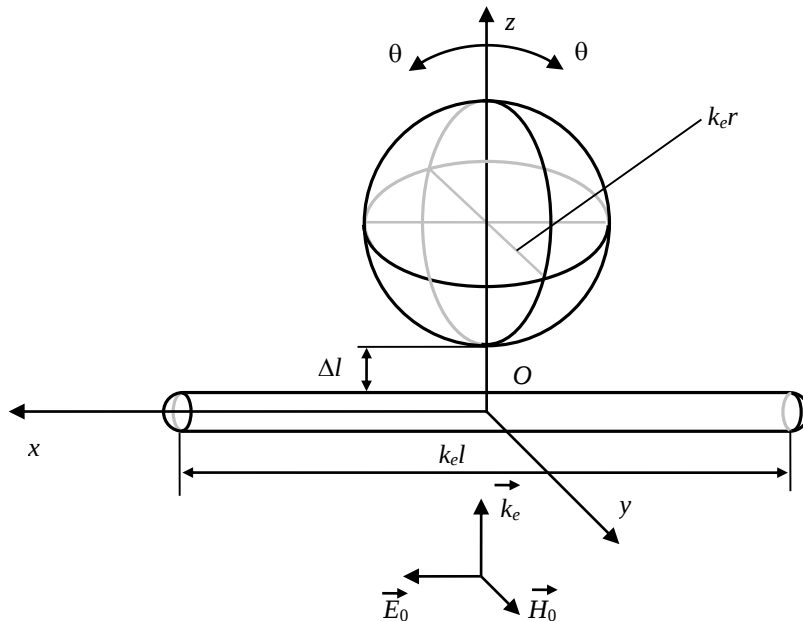


Рис. 2. Структура, состоящая из сферы и тонкого проводника
Fig. 2. Structure consisting of a sphere and a thin conductor

Исследование влияния объемного тела на распределение тока вдоль проводника выполнено для структуры, показанной на рис. 2. Структура состоит из сферы радиуса $k_e r$ ($k_e = 2\pi/\lambda$, λ – длина волны) и расположенного перед ней (со стороны падения волны) прямолинейного проводника длиной $k_e l$ и радиусом $k_e r_0$. Центр проводника совпадает с центром декартовой системы координат; ось проводника направлена вдоль оси x ; центр сферы расположен на оси z . Структура возбуждается плоской волной, падающей вдоль оси z , вектор $\vec{E}_0$ направлен вдоль оси проводника.

Были рассмотрены два варианта описанной выше структуры, отличающиеся радиусом сферы: для первого варианта $k_e r = 2$, для второго $k_e r = 4$; для обоих вариантов $k_e l = 10$, $k_e r_0 = 0,1$.

Параметры метода были выбраны следующими: на тонком проводнике число элементов разбиения осевого тока N_l составляло 90; для сферы число точек размещения вспомогательных диполей на вспомогательной поверхности N выбрано равным 256, а число точек коллокации L – равным 512. В локальной системе координат с центром в центре сферы точки размещения диполей и точки коллокации распределены следующим образом. В каждом из шестнадцати полусечений $\varphi = \text{const}$, отстоящих одно от другого на угловое расстояние $\Delta\varphi = 22,5^\circ$, равномерно по углу θ выбрано 16 точек размещения диполей. Для точек коллокации алгоритм их расположения по углу θ выбран таким же, как для точек размещения диполей, но выбираются они как в полусечениях $\varphi = \text{const}$, определенных для точек размещения диполей, так и посередине между ними. Коэффициент подобия вспомогательной поверхности для сферы задан равным 0,6. При данных параметрах метода значение невязки (9) не превышает 10%.

Некоторые из полученных результатов представлены на рис. 3, 4. Рисунок 3 относится к случаю, когда радиус сферы $k_e r = 2$, а рис. 4 – к случаю, когда радиус сферы $k_e r = 4$. Методика исследований заключалась в сравнении распределения тока вдоль проводника, полученного при наличии рядом с проводником сферы, с распределением тока вдоль одиночного проводника. Сравнение проводилось для различных расстояний между рассеивателями. На рис. 3, 4 по оси абсцисс отложено расстояние от середины проводника, по оси ординат – значение величины (модуля) тока в условных единицах. Кривые 1 относятся к случаю, когда наименьшее расстояние Δl между сферой и проводником равно $0,01\lambda$, кривые 2 – к случаю, когда $\Delta l = 0,5\lambda$ и кривые 3 – к случаю, когда $\Delta l = 1,2\lambda$. Здесь же для сравнения приведено распределение тока вдоль одиночного проводника, т.е. при отсутствии сферы (кривые 4).

Как показывают результаты, представленные на рис. 3, 4, влияние объемных тел на распределение тока в тонких проводниках существенно зависит от характерных размеров тела, определяемых величиной $k_e d = 2k_e r$. При $d < 0,6\lambda$ (см. рис. 3) этим влиянием можно пренебречь; при $d > \lambda$ для корректного определения распределения тока вдоль проводника необходимо учитывать наличие вблизи него объемных тел.

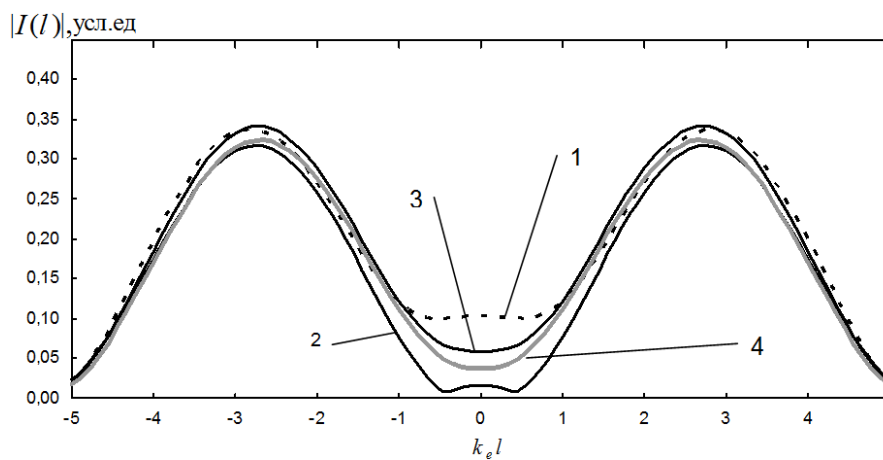


Рис. 3. Распределение тока вдоль оси проводника при наличии рядом с проводником сферы радиусом $k_e r = 2$, расположенной на различных расстояниях Δl от проводника (1 – $\Delta l = 0,01\lambda$, 2 – $\Delta l = 0,5\lambda$, 3 – $\Delta l = 1,2\lambda$, 4 – одиночный проводник)

Fig. 3. Current distribution along the axis of a conductor in the presence of a sphere with radius $k_e r = 2$ located at various distances Δl from the conductor (1 – $\Delta l = 0,01\lambda$, 2 – $\Delta l = 0,5\lambda$, 3 – $\Delta l = 1,2\lambda$, 4 – sphere is absent)

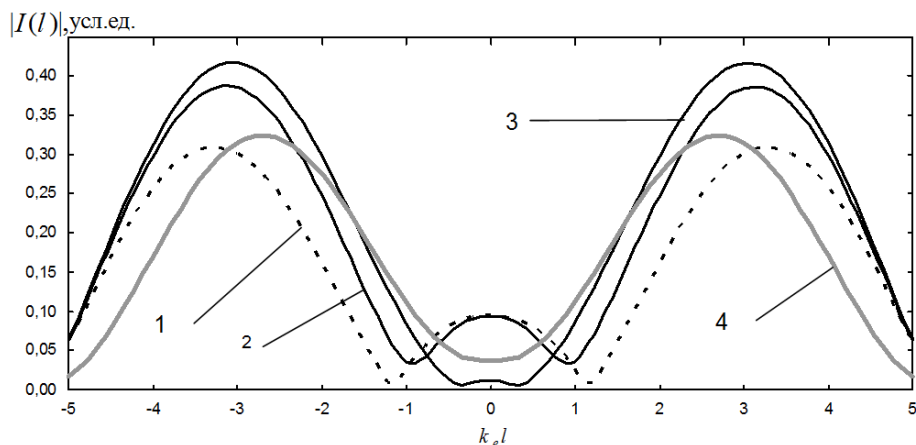


Рис. 4. Распределение тока вдоль оси проводника при наличии рядом с проводником сферы радиусом $k_{er} = 4$, расположенной на различных расстояниях Δl от проводника (1 – $\Delta l = 0,01\lambda$, 2 – $\Delta l = 0,5\lambda$, 3 – $\Delta l = 1,2\lambda$, 4 – одиночный проводник)

Fig. 4. Current distribution along the axis of a conductor in the presence of a sphere with radius $k_{er}=4$

located at various distances Δl from the conductor (1 – $\Delta l = 0,01\lambda$, 2 – $\Delta l = 0,5\lambda$, 3 – $\Delta l = 1,2\lambda$, 4 – sphere is absent)

Исследования влияния тонкого проводника на бистатистические сечения объемного тела проводились для структуры, представленной на рис. 2, в которой сфера была заменена на эллипсоид с полуосями $k_e a = 2$, $k_e b = 1,5$, $k_e c = 1$, ориентированными вдоль осей x , y и z соответственно. Было рассмотрено два варианта этой структуры, которые отличались только длинами проводников: для первого варианта длина проводника $k_e l$ выбиралась равной 12, для второго варианта – равной 6. Радиус проводника $k_e r_0$ в обоих случаях выбирался равным 0,1. Параметры метода были выбраны такими же, как при исследовании влияния объемного тела на распределение тока вдоль проводника.

Методика исследований заключалась в сравнении бистатистического сечения рассеяния одиночного объемного тела с бистатистическим сечением рассеяния структуры, состоящей из объемного тела и тонкого проводника. Сравнение проводилось при различных расстояниях между рассеивателями, составляющими структуру.

На рис. 5, 6 приведены бистатистические сечения рассеяния для первого варианта структуры, а на рис. 7, 8 – для второго варианта структуры. Рисунки м5 и 7 относятся к случаю, когда наименьшее расстояние Δl между поверхностями эллипсоида и тонкого проводника равно $0,1\lambda$, а рис. 6 и 8 – к случаю, когда $\Delta l = 1\lambda$.

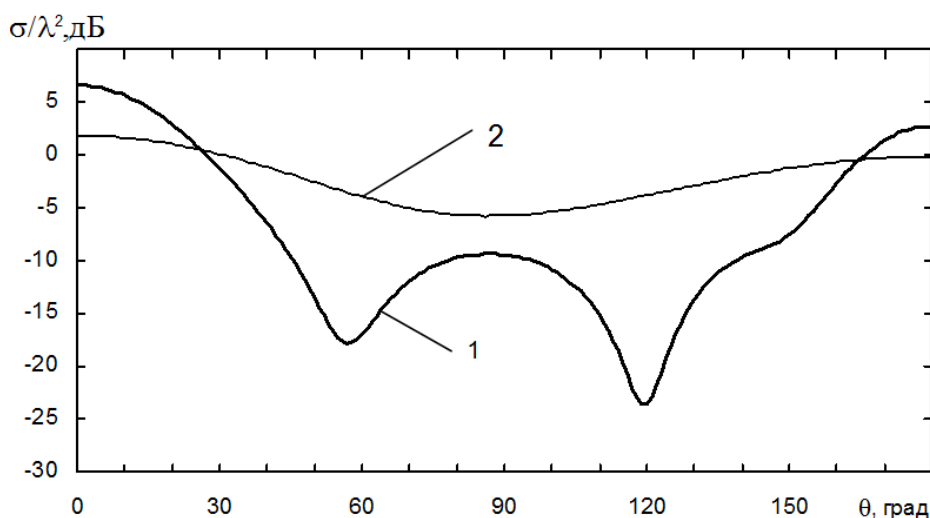


Рис. 5. Бистатистические сечения рассеяния в E -плоскости: 1 – для структуры, состоящей из эллипсоида с полуосями $k_e a = 2$, $k_e b = 1,5$, $k_e c = 1$ и проводника длиной $k_e l = 12$, расположенного на расстоянии $\Delta l = 0,1\lambda$; 2 – для одиночного эллипсоида

Fig. 5. E -plane bistatic scattering cross sections: 1 – for a structure consisting of an ellipsoid with half-axes $k_e a = 2$, $k_e b = 1,5$, $k_e c = 1$ and a conductor of length $k_e l = 12$ located at the distance $\Delta l = 0,1\lambda$; 2 – for a single ellipsoid

Результаты относятся к E -плоскости (плоскость векторов $\vec{k}_e$ и $\vec{E}_0$). В этой плоскости бистатические сечения рассеяния симметричны относительно оси z , поэтому результаты представлены только в полусечении $\varphi = 0$. По оси абсцисс отложен угол θ , по оси ординат – сечения рассеяния (10), нормированные на квадрат длины волны и выраженные в децибелах. Кривые 1 на всех рисунках – бистатические сечения рассеяния структуры «эллипсоид–проводник», кривые 2 – бистатические сечения рассеяния одиночного эллипсоида (эллипсоида при отсутствии проводника).

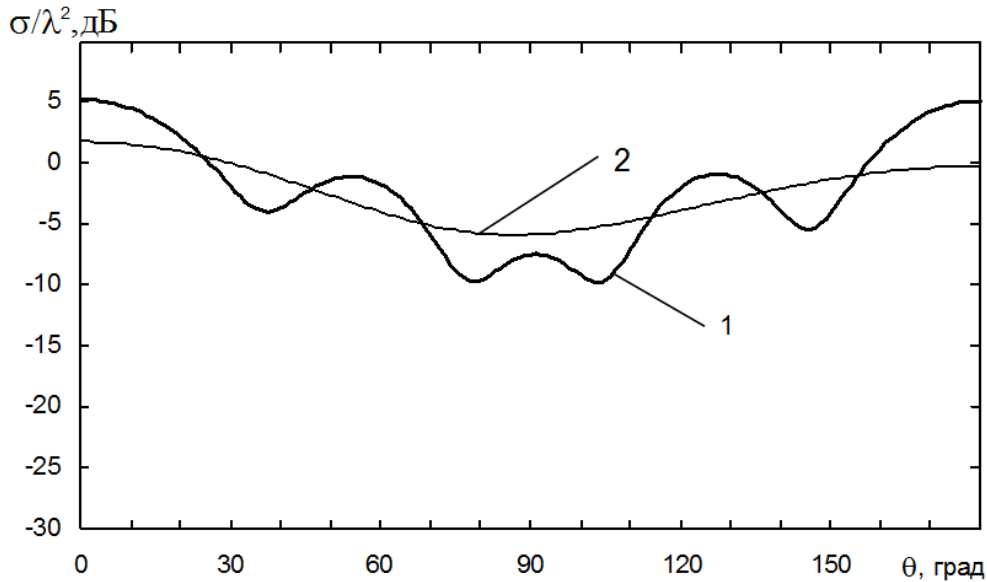


Рис. 6. Бистатические сечения рассеяния в E -плоскости: 1 – для структуры, состоящей из эллипсоида с полуосями $k_e a = 2$, $k_e b = 1,5$, $k_e c = 1$ и проводника длиной $k_e l = 12$, расположенного на расстоянии $\Delta l = 1\lambda$; 2 – для одиночного эллипсоида

Fig. 6. E -plane bistatic scattering cross sections: 1 – for a structure consisting of an ellipsoid with half-axes $k_e a = 2$, $k_e b = 1,5$, $k_e c = 1$ and a conductor of length $k_e l = 12$ located at the distance $\Delta l = 1\lambda$; 2 – for a single ellipsoid

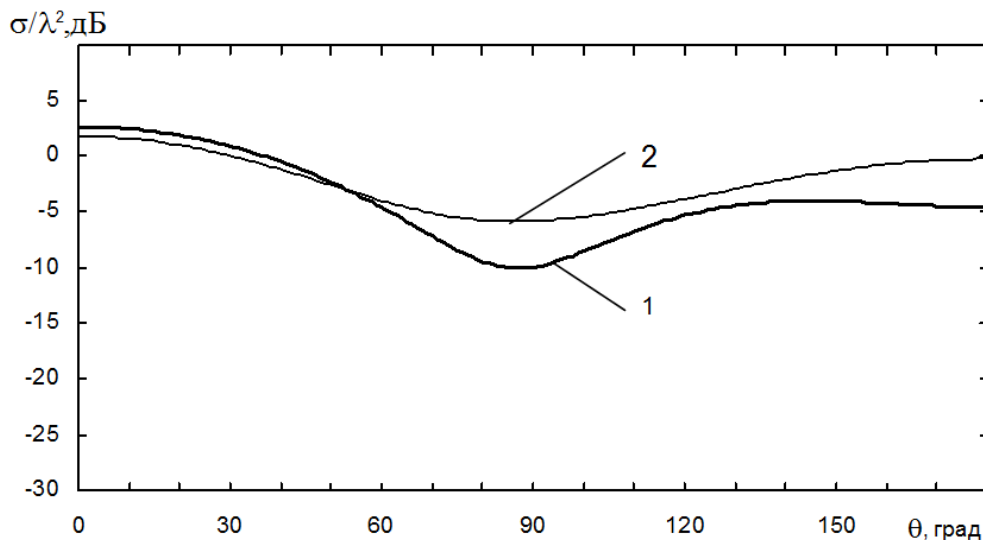


Рис. 7. Бистатические сечения рассеяния в E -плоскости: 1 – для структуры, состоящей из эллипсоида с полуосями $k_e a = 2$, $k_e b = 1,5$, $k_e c = 1$ и проводника длиной $k_e l = 6$, расположенного на расстоянии $\Delta l = 0,1\lambda$; 2 – для одиночного эллипсоида

Fig. 7. E -plane bistatic scattering cross sections: 1 – for a structure consisting of an ellipsoid with half-axes $k_e a = 2$, $k_e b = 1,5$, $k_e c = 1$ and a conductor of length $k_e l = 6$ located at the distance $\Delta l = 0,1\lambda$; 2 – for a single ellipsoid

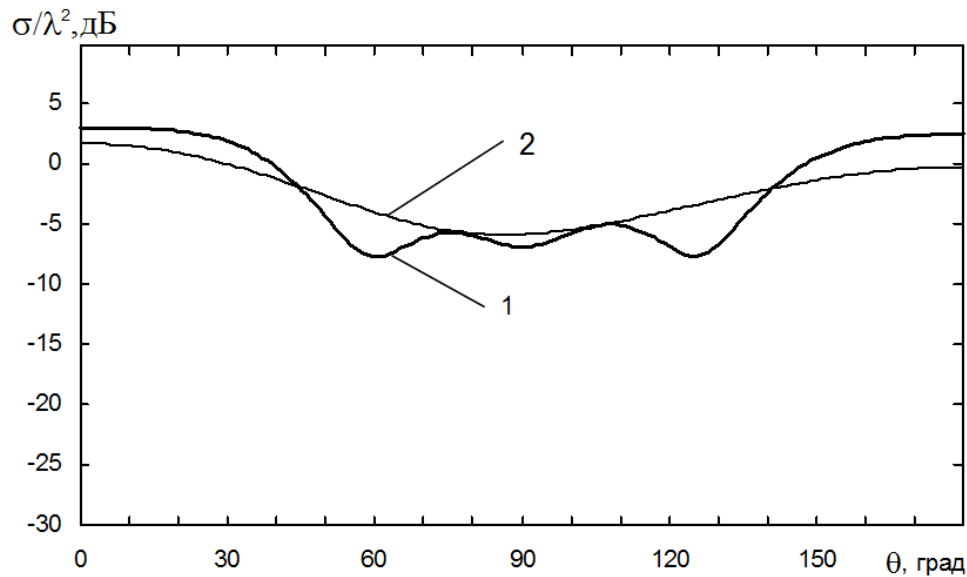


Рис. 8. Бистатические сечения рассеяния в E -плоскости: 1 – для структуры, состоящей из эллипсоида с полуосями $k_e a = 2$, $k_e b = 1,5$, $k_e c = 1$ и проводника длиной $k_e l = 6$, расположенного на расстоянии $\Delta l = 1\lambda$; 2 – для одиночного эллипсоида

Fig. 8. E -plane bistatic scattering cross sections: 1 – for a structure consisting of an ellipsoid with half-axes $k_e a = 2$, $k_e b = 1,5$, $k_e c = 1$ and a conductor of length $k_e l = 6$ located at the distance $\Delta l = 1\lambda$; 2 – for a single ellipsoid

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы. Бистатическое сечение рассеяния структуры, составленной из объемного тела и тонкого проводника, имеет значительные отличия от бистатического сечения одиночного объемного тела. Эти отличия тем больше, чем длиннее проводник. В случае расположения проводника очень близко к объемному телу ($\Delta l \approx 0,1\lambda$) отличия бистатических сечений рассеяния объясняются взаимным влиянием проводника и объемного тела. При расположении проводника на расстояниях $\Delta l > \lambda$ эти отличия объясняются интерференцией полей, рассеянных объемным телом и проводником. Результаты представленные на рис. 5, свидетельствуют о том, что присутствие тонкого проводника вблизи поверхности объемного рассеивателя может приводить к существенному уменьшению сечений рассеяния в большинстве направлений бокового ($30^\circ < \theta < 160^\circ$) рассеяния. Платой за это является увеличение сечений рассеяния в направлениях прямого и обратного рассеяния.

Заключение

Таким образом, в данной работе на основе метода вспомогательных источников построена модель поля, рассеянного структурой, состоящей из трехмерного идеально проводящего тела и тонкого идеального проводника. На основе этой модели разработан численный алгоритм решения задачи электромагнитного рассеяния рассматриваемой структурой. Алгоритм реализован в виде компьютерной программы для расчета компонент рассеянного поля. Приведены некоторые результаты моделирования, касающиеся влияния идеально проводящего тела на распределение тока вдоль проводника, а также влияния тонкого проводника на сечения рассеяния идеально проводящего тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Козлов И.П. Дифракция электромагнитных волн на двух шарах // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 2. С. 180–185.
2. Свешников А.Г., Еремин Ю.А. // Численные методы электродинамики. М. : Изд-во МГУ, 1980. Вып. 4. С. 3–7.
3. Bruning J.H., Yuen T.L. Multiple scattering of EM waves by spheres // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1971. V. 19, No. 3. P. 391–400.

4. Кюркчан А.Г., Скородумова Е.А. Решение задачи дифракции электромагнитной волны на группе тел методом диаграммных уравнений // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52, № 11. С. 1330–1337.
5. Hunka J.F., Mei K.K. Electromagnetic scattering by two bodies of revolution // Electromagnetics. 1987. V. 1, No. 3. P. 329–347.
6. Cooray M.F.R., Ciric I.R. Electromagnetic scattering by a system of two parallel prolate spheroids // Canadian Journal of Physics. 1990. V. 68, No. 4–5. P. 376–384.
7. Sinha B.P., MicPhie R.H. Electromagnetic plane wave scattering by a system of two parallel conducting prolate spheroids // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1983. V. 31, No. 2. P. 294–304.
8. Кюркчан А.Г., Маненков С.А., Негорожина Е.С. Моделирование рассеяния волн группой близко расположенных тел // Радиотехника и электроника. 2008. Т. 53, № 3. С. 276–285.
9. Sarabandi K, Polatin P.F. Electromagnetic scattering from two adjacent objects // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1994. V. 42, No. 4. P. 510–517.
10. Дмитренко А.Г., Колчин В.А. Рассеяние электромагнитных волн на структурах, содержащих тонкие проводники // Известия вузов. Радиофизика. 2003. Т. 46, № 1. С. 31–40.
11. Дмитренко А.Г., Колчин В.А. Численный метод исследования электромагнитного рассеяния структурами, содержащими тонкие проводники // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48, № 5. С. 545–551.

Поступила в редакцию 17 июня 2018 г.

Dmitrenko A.G. (2019) SIMULATING OF ELECTROMAGNETIC SCATTERING BY A STRUCTURE CONSISTING OF A PERFECTLY CONDUCTING BODY AND A THIN WIRE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'noy tekhniki i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 46. pp. 20–30

DOI: 10.17223/19988605/46/3

Using the method of auxiliary sources, we solve the problem of electromagnetic-wave scattering by a structure consisting of a perfectly conducting body and a thin wire. The gist of the method to be used is the following. We introduce an auxiliary surface $S_e = K_e S$ inside perfectly conducting body D . Let S_e be homothetic to the surface S of the body D . The homothety (similarity) coefficient K_e characterizes the spacing of the auxiliary surface to the surface S . We specify a finite set of points $\{M_n\}_{n=1}^N$ on auxiliary surface S_e . At each point M_n we locate a pair of independent auxiliary elementary electric dipoles with moments equal to $\vec{p}_{\tau_1}^n = p_{\tau_1}^n \vec{e}_{\tau_1}^n$, $\vec{p}_{\tau_2}^n = p_{\tau_2}^n \vec{e}_{\tau_2}^n$. The dipoles are aligned with the unit vectors $\vec{e}_{\tau_1}^n$, $\vec{e}_{\tau_2}^n$, respectively, in a plane tangential to S_e at the point M_n and radiate in homogeneous medium with parameters ϵ_e and μ_e .

We also introduce a continuously distributed auxiliary current $\vec{J}$ on the axis of thin wire.

Now we represent the unknown scattered field $\{\vec{E}_e, \vec{H}_e\}$ in outer medium D_e as a sum of the fields from the introduced auxiliary dipoles and current:

$$\begin{aligned}\vec{E}_e(M) &= (i / \omega \epsilon_e) \left\{ \sum_{n=1}^N \nabla \times (\nabla \times \vec{\Pi}_n) + \nabla \times (\nabla \times \vec{\Pi}') \right\}, \quad \vec{H}_e(M) = \sum_{n=1}^N \nabla \times \vec{\Pi}_n + \nabla \times \vec{\Pi}', \\ \vec{\Pi}_n &= \Psi_e(M, M_n) \vec{p}_{\tau}^n, \quad \vec{\Pi}' = \int_l \Psi_e(M, M_l) \vec{J} dl, \quad \Psi_e(M, M_n) = \exp(ik_e R_{MM_n}) / (4\pi R_{MM_n}), \\ \vec{\Pi}_{n,1} &= \Psi_e(M, M_{n,1}) \vec{p}_{\tau}^{n,1}, \quad \vec{\Pi}_{n,2} = \Psi_e(M, M_{n,2}) \vec{p}_{\tau}^{n,2}, \quad \vec{p}_{\tau}^n = p_{\tau_1}^n \vec{e}_{\tau_1}^n + p_{\tau_2}^n \vec{e}_{\tau_2}^n, \quad M \in D_e.\end{aligned}$$

Here $k_e = \omega \sqrt{\epsilon_e \mu_e}$ is the wave number in the outer medium D_e ; R_{MM_n} is the distance from the point M_n on S_e to the point M in D_e ; R_{MM_l} is the distance from the point M_l on the wire axis to the same point M in D_e ; $p_{\tau_1}^n, p_{\tau_2}^n$ ($n=1, N$) are unknown dipole moments and $\vec{J}$ is an unknown axis current. The integration is performed along the axis of the wire l .

The chosen representations of the field satisfy Maxwell's equations and radiation conditions. To satisfy boundary conditions on the surfaces of the body and wire, we should properly select the dipole moments and the axial-current $\vec{J}$. Before making that, we introduce the piecewise-constant approximation for the axial current. We divide the line l in N_l small intervals in which the current can be considered constant. Then the formula for $\vec{\Pi}'$ can be represented in the following approximate form:

$$\vec{\Pi}' = \sum_{i=1}^{N_l} J_i \vec{e}_i \int_{l_{i-1}}^{l_i} \Psi_e(M, M_l) dl,$$

where J_i is the current in the i -th interval of the wire and $\vec{e}_i$ is the unit vector directed along the tangent to the central point of the considered interval. Within the framework of such an approach, the problem of determination of the unknown axial-current distribution is reduced to the problem of finding N_l current elements.

To find the dipole moments and the current elements, we use perfectly conducting boundary conditions which are satisfied according to the collocation method. Let M_j , where $j = 1, 2, \dots, L$, and $M_{j'}$, where $j' = 1, 2, \dots, L'$, be the collocation points on the surfaces body and wire, respectively. Then the unknown dipole moments and the current elements can be found from the following system of linear algebraic equations:

$$\begin{aligned}\vec{n}^j \times \vec{E}_e^j &= -\vec{n}^j \times \vec{E}_0^j, \quad j = \overline{1, L}, \\ E_{e,l}^{j'} &= -E_{0,l}^{j'}, \quad j' = \overline{1, L'},\end{aligned}$$

where $\vec{n}^j$ is the normal vector and $\vec{E}_e^j$ and $\vec{E}_0^j$ are the vectors of electric-field components of scattered field and exciting field at the collocation point M_j ; $E_{e,l}^{j'}$ and $E_{0,l}^{j'}$ are the electric-field longitudinal components of scattered field and exciting field at the collocation point $M_{j'}$ on the wire surface. Note that we neglected the azimuthal component of the wire surface current in comparison with longitudinal component. After solving the linear algebraic equations we determine the required parameters of the scattered field.

Based on the method described above, we developed a computer code for calculating the scattered-field components. Using this code, we carried out a series of computational calculations aimed at estimation of influence of nearby perfectly conducting body on current distribution along thin wire. We investigated the influence of thin wire on scattering cross-sections of perfectly conducting body as well. We present some results in the paper.

Keywords: electromagnetic scattering; auxiliary sources method; perfectly conducting body; thin wire; current distribution; scattering cross-section.

DMITRENKO Anatoly Grigor'evich (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Russia).

E-mail: dmitr@fpmk.tsu.ru

REFERENCES

1. Kozlov, I.P. (2001) Diffraction of electromagnetic waves by two balls. *Journal of Communications Technology and Electronics*. 46(2). pp. 180–185.
2. Sveshnikov, A.G. & Eremin, Yu.A. (1980) *Chislennye metody elektrodinamiki* [Numerical methods of electrokinamics]. Vol. 4. Moscow: Moscow State University. pp. 3–7.
3. Bruning, J.H. & Yuen, T.L. (1971) Multiple scattering of EM waves by spheres. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 19(3). pp. 391–400.
4. Kyurkchan, A.G. & Skorodumova, E.A (2007) The Problem of Electromagnetic-Wave Diffraction from a Group of Bodies Solved via the Pattern-Equation Method. *Journal of Communications Technology and Electronics*. 52(11). pp. 1330–1337.
5. Hunka, J.F. & Mei, K.K. (1987) Electromagnetic scattering by two bodies of revolution. *Electromagnetics*. 1(3). pp. 329–347. DOI: 10.1080/02726348108915138
6. Cooray, M.F.R. & Ciric, I.R. (1990) Electromagnetic scattering by a system of two parallel prolate spheroids. *Canadian Journal of Physics*. 68(4–5). pp. 376–384. DOI: 10.1139/p90-060
7. Sinha, B.P. & MicPhie, R.H. (1983) Electromagnetic plane wave scattering by a system of two parallel conducting prolate spheroids. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 31(2). pp. 294–304.
8. Kyurkchan, A.G., Manenkov, S.A. & Negorogina, E.S. (2008) Simulation of wave scattering by a group of closely spaced bodies. *Journal of Communications Technology and Electronics*. 53(3). pp. 276–285.
9. Sarabandi, K. & Polatin, P.F. (1994) Electromagnetic scattering from two adjacent objects. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 42(4). pp. 510–517. DOI: 10.1109/8.286219
10. Dmitrenko, A.G. & Kolchin, V.A. (2003) Scattering of electromagnetic waves by structures comprising thin wires. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 46(1). pp. 29–37.
11. Dmitrenko, A.G. & Kolchin, V.A. (2003) A numerical method for investigating electromagnetic scattering by structures containing thin conductors. *Journal of Communications Technology and Electronics*. 48(5). pp. 494–499.

УДК 519.6, 544

DOI: 10.17223/19988605/46/4

А.Е. Киреева, К.К. Сабельфельд, Н.В. Мальцева, Е.Н. Грибов

**ТРЕХМЕРНАЯ КЛЕТОЧНО-АВТОМАТНАЯ МОДЕЛЬ
ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОГО ОКИСЛЕНИЯ УГЛЕРОДА
KETJEN BLACK EC-600JD**

Разработка математической модели коррозии углерода выполнена в рамках гранта № 14-11-00083

Российского научного фонда, руководитель гранта К.К. Сабельфельд.

Экспериментальная работа выполнена в рамках государственного задания

Института катализа им. Г.К. Борескова СО РАН, проект № АААА-А17-117041710087-3.

Представлена трехмерная клеточно-автоматная модель электрохимического окисления углерода. Моделируется углеродный носитель Ketjen Black EC-600JD, состоящий из гранул, образованных атомами углерода. Механизм реакции окисления включает в себя несколько стадий, на основе которых разработана клеточно-автоматная модель этого процесса. Проведен сравнительный анализ результатов моделирования с данными натурных экспериментов.

Ключевые слова: клеточный автомат; компьютерное моделирование; электрохимическое окисление; коррозия углерода.

Клеточно-автоматный (КА) подход является эффективным методом моделирования пространственно неоднородных нелинейных физико-химических процессов [1]. Клеточный автомат – это дискретная динамическая система, состоящая из множества клеток, состояния которых изменяются в соответствии с локальными правилами перехода через дискретные промежутки времени [2]. Локальность правил позволяет моделировать нелинейные пространственно-распределенные системы, структура которых меняется с течением времени. Примером такой задачи является деградация углеродного носителя при его электрохимическом окислении в топливных элементах.

В настоящее время топливные элементы находят широкое применение в качестве альтернативных источников энергии, в частности в электродвигателях автомобилей [3]. Наиболее перспективными с точки зрения энергоемкости и экологической безопасности являются низкотемпературные топливные элементы с протон проводящей мембраной, одним из основных компонентов которых является платиновый (Pt) катализатор, нанесенный на углеродный носитель [4]. Срок службы топливного элемента определяется в основном коррозионной стабильностью углеродного носителя, которая зависит от морфологии, объема пор, площади и состава поверхности углеродного материала [5].

В [6–8] электрохимическая стабильность углеродного носителя и нанесенного на него Pt катализатора исследуется экспериментально. В [9–12] коррозия образцов углерода и Pt катализаторов на их основе моделируется с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными для одномерного случая. В основе этих математических моделей лежат многостадийные механизмы, которые сложно верифицировать экспериментально. В [13, 14] предложен механизм коррозии углерода, основанный на предположении, что скорость его окисления определяется количеством ковалентных связей с кислородом. В [6] проанализированы электрохимическая стабильность и емкость углеродного носителя Ketjen Black EC-600JD при его частичном электроокислении, а также измерены удельная поверхность и поверхностный состав образцов углерода. На основе предложенного механизма и текстурных свойств углеродного носителя Ketjen Black в [15] разработана двумерная КА модель электрохимического окисления углерода. В настоящей статье представлена трехмерная версия этой модели и выполнен сравнительный анализ результатов компьютерного моделирования с экспериментальными данными.

1. Клеточно-автоматная модель коррозии углерода

Описание натуральных экспериментов по изучению коррозии углеродного носителя в топливных элементах с протон проводящей мембраной, используемых в экспериментах материалов и методов исследования приведено в [6, 16]. Электрохимические измерения проводились в трехэлектродной стеклянной ячейке с жидким электролитом 0,1 М НСlO₄. В качестве рабочего электрода использовался стеклоглеродный стержень с нанесенным на его поверхность тонким слоем углеродной сажи Ketjen Black EC-600JD, который погружался в раствор электролита (рис. 1).

Стеклоуглеродный стержень – непористый материал, коррозией которого можно пренебречь. Электроокисление углерода описывается уравнением реакции:

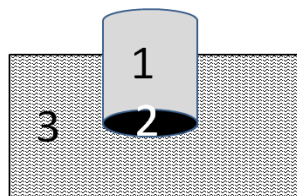
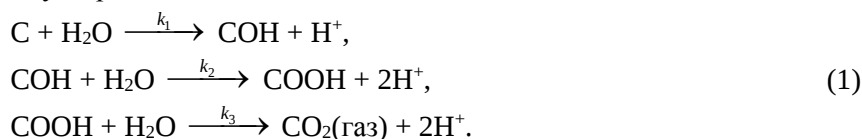


Рис. 1. Схема эксперимента: 1 – стеклоглеродный стержень, 2 – тонкий слой углерода Ketjen Black, 3 – электролит
Fig. 1. Scheme of experiment: 1 – glass-carbon rod, 2 – a thin layer of carbon Ketjen Black, 3 – electrolyte

Детальный механизм коррозии углеродного носителя основан на предположении, что скорость его окисления определяется количеством ковалентных связей с кислородом [13]. Механизм включает в себя следующие стадии окисления углерода:



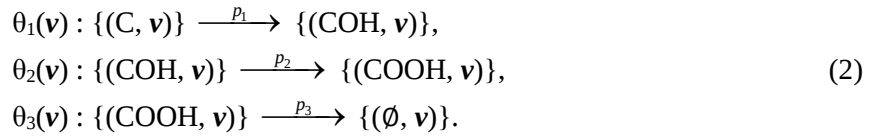
Здесь С – неокисленный поверхностный атом углерода, СОН – окисленный поверхностный атом углерода с одной ковалентной связью с кислородом (например, гидрохинонные группы, спирты), СООН – окисленный поверхностный атом углерода с двумя или более связями с кислородом (хинон, карбоксильные группы). В результате полного окисления углерода образуется углекислый газ СО₂. Коэффициенты k_1 , k_2 , k_3 задают скорости протекания каждой стадии реакции. В реакцию окисления вступают только атомы, находящиеся на поверхности образца, так как эти атомы непосредственно взаимодействуют с электролитом.

На основе данных, полученных методом просвечивающей электронной микроскопии, сделано предположение, что углеродный носитель Ketjen Black состоит из полых наногранул, образованных атомами углерода [17]. В [16] определены текстурные свойства Ketjen Black: площадь удельной поверхности $S_{\text{ВЕТ}} = 1\,420\text{ м}^2/\text{г}$, объем пор $V_{\text{pores}} = 3\text{ см}^3/\text{г}$, средний диаметр гранулы $d = 30\text{ нм}$, процент поверхностных атомов, включая атомы внутри гранул, $P_{\text{surf}} = 36\%$, процент пор во всем объеме образца $P_{\text{por}} = 84\%$.

На основе механизма (1) разработана КА модель $M = \langle L, A, R, \mu \rangle$ электрохимического окисления углерода. Моделируемое пространство является дискретным и состоит из множества клеток, образующих трёхмерную решетку $L = \{v = (x, y, z): x = 0, \dots, L_x, y = 0, \dots, L_y, z = 0, \dots, L_z\}$. Каждая клетка характеризуется парой (a, v) , где a – состояние клетки, $v = (x, y, z)$ – ее пространственная координата. Состояния клеток определяются элементами моделируемой системы и задаются алфавитом $A = \{C_0, C, \text{COH}, \text{COOH}, \emptyset\}$, где C_0 обозначает атом углерода, находящийся внутри объема образца, С – поверхностный атом углерода, СОН и СООН – поверхностные атомы окисленного углерода с одной и двумя ковалентными связями, $\emptyset$ – свободное место без атомов.

Состояния клеток изменяются согласно правилам перехода $R(v)$, являющимся в данной модели последовательной композицией двух операторов: R_{oxid} и R_{surf} : $R(v) = R_{\text{surf}}(R_{\text{oxid}}(v))$. Последовательная

композиция обозначает последовательное применение к клетке операторов R_{oxid} и R_{surf} [18]. Оператор R_{oxid} моделирует стадии механизма электроокисления углерода (1) :



Атомы воды не моделируются, так как в модели предполагается, что их количество не ограничено и они всегда доступны. Применение оператора R_{oxid} к клетке $(a, \mathbf{v})$ состоит в выборе оператора $\theta_i(\mathbf{v})$, $i = 1, 2, 3$, левая часть которого совпадает с состоянием клетки a , и замене этого состояния на состояние правой части оператора $\theta_i(\mathbf{v})$ с вероятностью p_i . Например, при применении оператора R_{oxid} к клетке с состоянием СОН выберется оператор θ_2 , и состояние клетки с вероятностью p_2 изменится на СООН. Значения вероятностей p_i пропорциональны значениям k_i скоростей протекания стадий реакции (1).

После применения оператора R_{oxid} к клетке $(a, \mathbf{v})$ в случае реализации правила $\theta_3(\mathbf{v})$ к этой же клетке применяется оператор R_{surf} . Этот оператор обнаруживает и помечает новые поверхностные атомы углерода, образовавшиеся в результате деградации атома, находящегося в клетке с координатой $\mathbf{v}$. Для этого оператор проверяет, есть ли у клетки $(a, \mathbf{v})$ соседние клетки с состоянием C_0 (атом внутри образца). Если такие клетки есть, их состояние заменяется на С (поверхностный атом углерода):

$$R_{\text{surf}}(\mathbf{v}) : \{(\emptyset, \mathbf{v}), (\text{C}_0, \phi_i(\mathbf{v}))\} \rightarrow \{(\emptyset, \mathbf{v}), (\text{C}, \phi_i(\mathbf{v}))\}, \text{ где } \phi_i(\mathbf{v}) \in T(\mathbf{v}), i = |T(\mathbf{v})|, \quad (3)$$

$$T(\mathbf{v}) = T(x, y, z) = \{(x-1, y, z), (x+1, y, z), (x, y-1, z), (x, y+1, z), (x, y, z-1), (x, y, z+1)\}.$$

Функции $\phi_i(\mathbf{v})$, $i = 1, \dots, 6$, в соответствии с шаблоном $T(\mathbf{v})$ определяют координаты соседних клеток для клетки с координатой $\mathbf{v}$. Шаблон $T(\mathbf{v})$ имеет форму «крест» с центром в точке $\mathbf{v}$.

Применение правил перехода $R(\mathbf{v})$ ко всем клеткам решетки L называется итерацией. Режим применения $R(\mathbf{v})$ к клеткам L является синхронным: $\mu = \sigma$. Синхронный режим предполагает, что аргументы функций перехода – это состояния клеток на текущей итерации t . На каждой итерации с помощью правил перехода вычисляются новые состояния в зависимости от предыдущих. Обновление состояний всех клеток решетки происходит одновременно [1].

Начальное состояние решетки L имитирует неокисленный образец Ketjen Black. В КА модели коррозии углерода наногранулы Ketjen Black моделируются сферами, состоящими из клеток с состояниями, соответствующими атомам углерода: $A' = \{\text{C}_0, \text{C}, \text{COH}, \text{COOH}\}$. В начальный момент времени сферы состоят только из клеток с состояниями C_0 и С (неокисленные атомы углерода). Каждая гранула формируется клетками, принадлежащими области между двумя вложенными сферами с радиусами R_{out} и R_{in} . В соответствии с диаметром наногранулы Ketjen Black $d = 30$ нм радиус внешней сферы R_{out} выбран равным 15 клеткам. Радиус внутренней сферы ($R_{\text{in}} = 11,3$ клетки) подобран таким образом, чтобы отношение количества клеток с состоянием С к количеству клеток с состоянием C_0 было равным $P_{\text{surf}} = 36\%$. Сферы с выбранными радиусами случайно и равномерно распределяются в решетке L так, чтобы они пересекались не более чем на 5%. Доля клеток с состояниями C_0 и С, формирующими образец Ketjen Black, составляет $1 - P_{\text{por}} = 16\%$ от общего количества клеток в решетке.

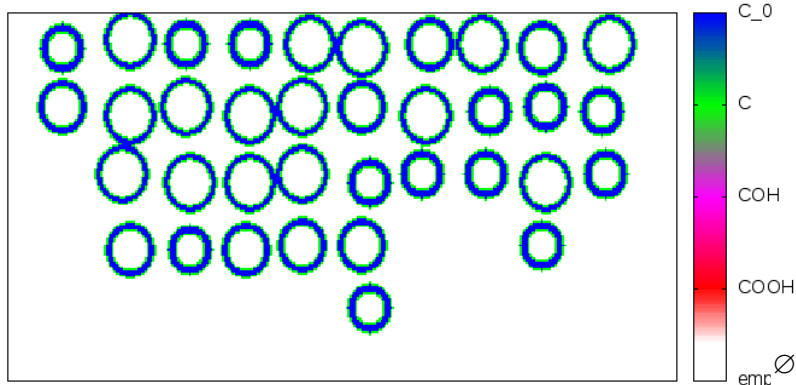


Рис.2. Начальные состояния клеток решетки вдоль среза по оси Z для образца Ketjen Black, состоящего из $10 \times 10 \times 5$ гранул
Fig. 2. The initial state of the cells of the lattice along the slice Z axis for sample Ketjen Black, consisting of $10 \times 10 \times 5$ granules

На рис. 2 представлено начальное состояние решетки L вдоль среза по оси Z . Данное начальное состояние сгенерировано для количества гранул $G_x = 10$ вдоль оси X , $G_y = 10$ вдоль оси Y и $G_z = 5$ вдоль оси Z .

Как показано на рис. 1, углеродный носитель нанесен на стеклоуглеродный стержень, т.е. гранулы Ketjen Black прикреплены сверху к стержню. Таким образом, в КА модели коррозии углерода атомы считаются принадлежащими образцу, только если они соединены, непосредственно или через другие атомы, с атомами, расположенными в клетках верхнего ряда решетки. Следовательно, при начальном распределении сфер в решетке, а также на каждой итерации после применения правил перехода $R(v)$ необходимо выполнять поиск атомов, не связанных с атомами верхнего ряда, и удалять их. Клетки, содержащие связанные с верхним рядом атомы, помечаются с помощью алгоритма поиска компонент связности «one scan connected component labeling technique» [19]. Состояния непомеченных клеток изменяются на $\emptyset$.

2. Результаты КА моделирования коррозии углерода

В качестве характеристик КА модели коррозии углерода выбраны концентрации окисленных $N_{\text{CON}}(t)$, $N_{\text{COOH}}(t)$ и неокисленных $N_{\text{CO}}(t)$, $N_{\text{C}}(t)$ атомов углерода, доля поверхностных атомов $N_s(t)$ и электроемкость углеродного носителя $Q(t)$.

Концентрация $N_{\text{atom}}(t)$ атомов вида $\text{atom} \in A' = \{\text{C}_0, \text{C}, \text{CON}, \text{COOH}\}$ вычисляется как отношение количества клеток с состоянием $a = \text{atom}$ в решетке L на итерации t к общему количеству клеток в решетке:

$$N_{\text{atom}}(t) = \left(\sum_{a=\text{atom}} (a, v) \right) / |L|, \text{atom} \in \{\text{C}_0, \text{C}, \text{CON}, \text{COOH}\}, v \in L.$$

Доля поверхностных атомов – это отношение количества клеток с состояниями C , CON и COOH в решетке L на итерации t к общему количеству клеток в решетке:

$$N_s(t) = \left(\sum_{a=\text{C}} (a, v) + \sum_{a=\text{CON}} (a, v) + \sum_{a=\text{COOH}} (a, v) \right) / |L| = N_{\text{C}}(t) + N_{\text{CON}}(t) + N_{\text{COOH}}(t).$$

При анализе электрохимической стабильности углеродного носителя Ketjen Black в натурных экспериментах [6] удельная емкость образцов вычислялась по формуле

$$Q = P_O \cdot Q_O + P_C \cdot Q_C, \quad (3)$$

где P_O и P_C – доля атомов кислорода и углерода на поверхности образца, Q_O и Q_C – емкости единичных поверхностных атомов кислорода и углерода. Значения $Q_O = 0,799 \text{ Ф/м}^2$ и $Q_C = 0,012 \text{ Ф/м}^2$ определены также в [6].

В соответствии с [6] в КА модели коррозии углерода удельная емкость моделируемого образца вычисляется по формуле (3), где в качестве значений P_O и P_C используются значения концентраций окисленных $P_O = N_{\text{CON}}(t) + N_{\text{COOH}}(t)$ и неокисленных $P_C = N_{\text{C}}(t)$ поверхностных атомов углерода, полученных в результате компьютерного моделирования.

Вычислительные эксперименты выполнялись с помощью параллельной версии программы, реализующей КА модель электрохимического окисления углерода, на кластере НКС-1П Центра коллективного пользования «Сибирский суперкомпьютерный центр СО РАН» (ЦКП ССКЦ СО РАН) [20]. Для распараллеливания КА модели коррозии углерода используется метод декомпозиции моделируемой области и распределения вычислений между MPI процессами [15].

Параметрами КА модели коррозии углерода являются количество гранул, формирующих образец Ketjen Black, и значения вероятностей p_i , имитирующих скорости реакций стадий окисления углерода (1). Для моделирования выбран образец размером $G_x = 10$, $G_y = 10$, $G_z = 5$ гранул вдоль осей X , Y и Z и значения вероятностей $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,01$, $p_3 = 0,005$. Исследуемый процесс коррозии углеродного носителя является случайным, так как в начальный момент времени гранулы распределяются случайным образом, и в КА модели применяются вероятностные правила переходов. Следовательно, значения характеристик $N_{\text{CON}}(t)$, $N_{\text{COOH}}(t)$, $N_{\text{CO}}(t)$, $N_{\text{C}}(t)$, $N_s(t)$ и $Q(t)$ являются случайными величинами и

вычисляются путем осреднения результатов нескольких вычислительных экспериментов, в которых используются различные последовательности случайных чисел.

На рис. 3 представлены значения характеристик КА модели электрохимического окисления углерода, рассчитанные с помощью компьютерного моделирования.

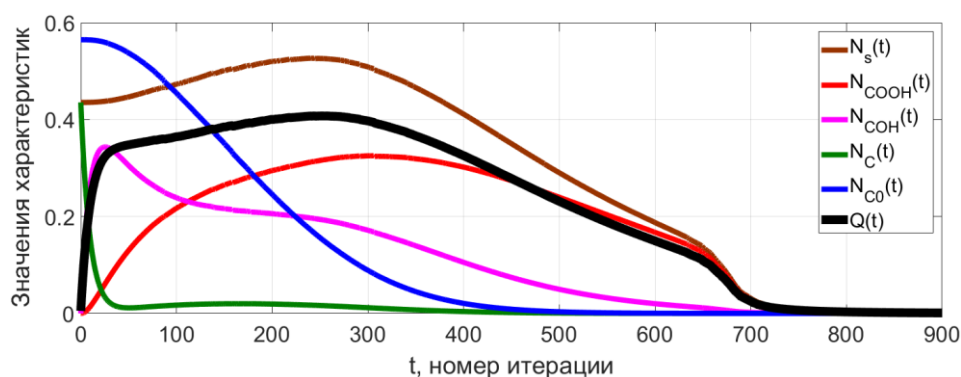


Рис. 3. Значения характеристик КА модели коррозии углерода, вычисленные с помощью компьютерного моделирования для $G_x = 10$, $G_y = 10$, $G_z = 5$ гранул и значений $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,01$, $p_3 = 0,005$

Fig. 3. Values of characteristics of SC of carbon corrosion model calculated by computer simulation for $G_x = 10$, $G_y = 10$, $G_z = 5$ granules and values $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,01$, $p_3 = 0,005$

Соответствующие графику на рис. 3 двумерные срезы вдоль оси Z образца углерода, полученного на различных итерациях, показаны на рис. 4. «Чистые» атомы углерода C на поверхности образца практически сразу преобразуются в окисленные атомы COH , которые затем окисляются до $COOH$ (см. рис. 4, $t = 50$). Концентрация $N_s(t)$ поверхностных атомов образца определяется в основном концентрацией окисленных атомов COH и $COOH$. В результате коррозии и исчезновения поверхностных атомов становятся доступны для реакции внутренние атомы образца. Гранулы Ketjen Black постепенно разрушаются, но форма образца сохраняется практически неизменной до 300 итерации (см. рис. 4, $t = 300$). Когда доля внутренних атомов $N_{Co}(t)$ становится меньше 1% (см. рис. 3, $t > 440$ итераций), коррозия приводит к быстрой деградации углеродного носителя (см. рис. 4, $t = 600$, $t = 700$).

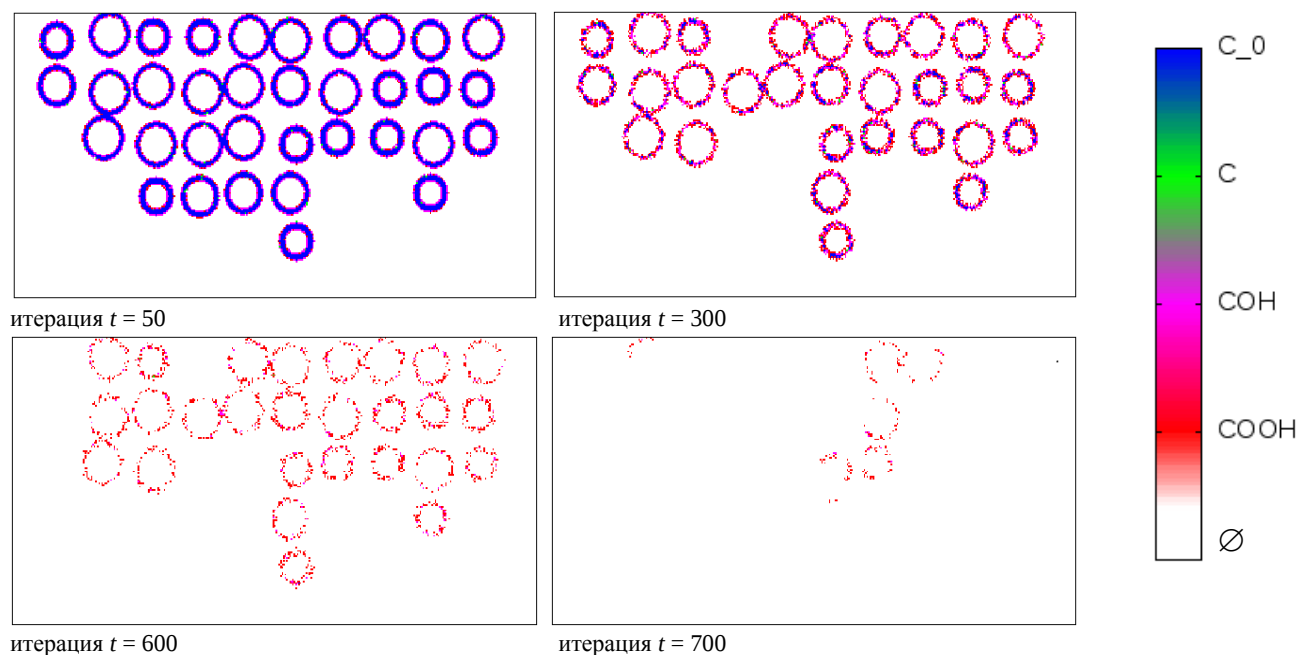


Рис. 4. Состояния клеток решетки L вдоль среза по оси Z для образца Ketjen Black, полученного с помощью КА моделирования коррозии углерода на различных итерациях

Fig. 4. State of cells of a lattice L , along the slice Z axis for sample Ketjen Black obtained using the KA modeling of corrosion of carbon at different iterations

Для проверки корректности построенной КА модели коррозии углерода выполнено сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными. В качестве критерия сравнения выбраны значения электрохимической емкости $Q(t)$. В [6] экспериментально измерена электрохимическая емкость образцов Ketjen Black для различной начальной степени окисления углеродного носителя: для неокисленного образца (KB), для образцов, активированных кислородом воздуха при температуре 600°C в течение 10 мин (KB-10), 20 мин (KB-20) и 30 мин (KB-30) (рис. 5).

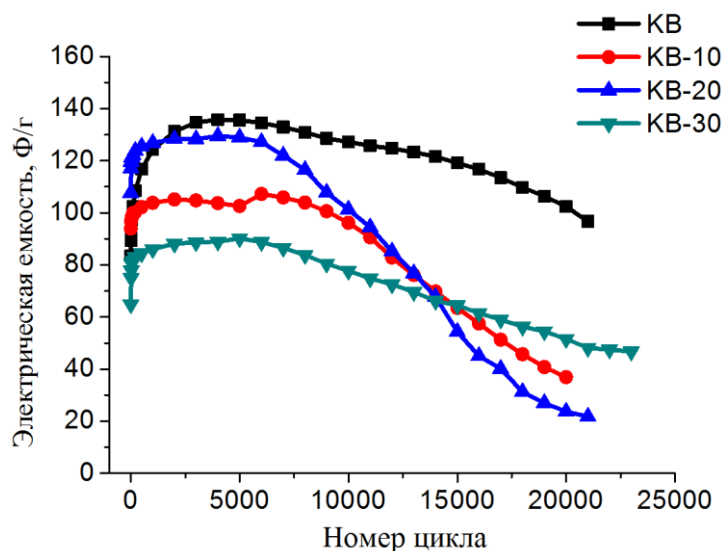


Рис. 5. График зависимости электрохимической емкости образцов Ketjen Black с различной начальной степенью окисления от номера цикла [6]: KB – неокисленный образец, KB- n – образец, активированный воздухом в течение n мин, $n = 10, 20, 30$

Fig. 5. The graph of dependence of the electrochemical capacity of Ketjen Black samples with different initial oxidation state on the cycle number [6]: KB – non-oxidized sample, KV – n -sample activated by air for n minutes, $n = 10, 20, 30$

Электрохимическая емкость $Q(t)$, полученная с помощью КА моделирования коррозии углерода (см. рис. 3), качественно похожа на кривую емкости неокисленного образца Ketjen Black, измеренную экспериментально (рис. 5), что свидетельствует о корректности разработанной КА модели электрохимического окисления углерода.

Заключение

В статье представлена трехмерная КА модель коррозии углеродного носителя Ketjen Black EC-600JD, разработанная на основе механизма электрохимического окисления углерода [13] и текстурных характеристик Ketjen Black [16]. Параллельная версия программы, реализующей КА модель коррозии углерода, позволяет изучать деградацию образцов Ketjen Black различного размера и при различных скоростях реакций стадий окисления. С помощью компьютерного моделирования мы можем изучать пространственное распределение окисленных и неокисленных атомов углерода с течением времени, наблюдать за изменением формы углеродного носителя.

Путем КА моделирования коррозии углерода вычислена временная зависимость значений концентраций окисленных и неокисленных атомов углерода и электрохимической ёмкости образца Ketjen Black размером $G_x = 10$, $G_y = 10$, $G_z = 5$ гранул. Электрохимическая емкость, полученная с помощью компьютерного моделирования, качественно похожа на кривую электрохимической емкости, измеренную экспериментально для неокисленного образца Ketjen Black. Качественное совпадение результатов численных расчетов с экспериментальными данными свидетельствует о корректности разработанной КА модели электрохимического окисления углерода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bandman O.L. Mapping physical phenomena onto CA-models // AUTOMATA-2008 // Theory and Applications of Cellular Automata / A. Adamatzky, R. AlonsoSanz, A. Lawniczak, G.J. Martinez, K. Morita, T. Worsch (eds.). Luniver Press, 2008. P. 381–397.
2. Toffoli T., Margolus N. Cellular Automata Machines: a New Environment for Modeling, MIT Press, 1987. P. 259.
3. Yoshida T., Kojima K. Toyota MIRAI fuel cell vehicle and progress toward a future hydrogen society // Electrochem. Soc. Interface. 2015. V. 24. P. 45.
4. U.S. DRIVE Fuel Cell Tech Team: the Fuel Cells section of the FCTO Multi-Year Research, Development, and Demonstration Plan. URL: https://www.energy.gov/sites/prod/files/2016/06/f32/fcto_myrrdd_fuel_cells_0.pdf (accessed: 22.05.2018).
5. Li L., Hu L., Li J., Wei Z. Enhanced stability of Pt nanoparticle electrocatalysts for fuel cells // Nano Res. 2015. V. 8, is. 2. P. 418–440.
6. Maltseva N.V., Golovin V.A., Chikunova Yu.O., Gribov E.N. Influence of the number of surface oxygen on the electrochemical capacity and stability of high surface Ketjen Black ES 600 DJ // Russ. J. Electrochem. 2018. V. 54, No. 5. P. 489–496. DOI: 10.7868/S0424857018050031.
7. Gribov E.N., Kuznetsov A.N., Voropaev I.N., Golovin V.A., Simonov P.A., Romanenko A.V. et al. Analysis of the corrosion kinetic of Pt/C catalysts prepared on different carbon supports under the “Start-Stop” cycling // Electrocatalysis. 2016. V. 7. P. 159–173.
8. Shrestha S., Liu Y., Mustain W.E. Electrocatalytic Activity and Stability of Pt clusters on State-of-the-Art Supports: a Review // Catal. Rev. Sci. Eng. 2011. V. 53. P. 256–336.
9. Pandey A., Yang Z., Gummalla M., Atrazhev V.V., Kuzminykh N.Yu., Vadim I.S., Burlatsky S.F. A Carbon Corrosion Model to Evaluate the Effect of Steady State and Transient Operation of a Polymer Electrolyte Membrane Fuel Cell // Journal of The Electrochemical Society. 2013. V. 160 (9). P. F972–F979. arXiv:1401.4285 [physics.chem-ph]. DOI: 10.1149/2.036309jes.
10. Chen J., Siegel J.B., Matsuura T., Stefanopoulou A.G. Carbon Corrosion in PEM Fuel Cell Dead-Ended Anode Operations // Journal of The Electrochemical Society. 2011. V. 158 (9). P. B1164–B1174.
11. Gallagher K.G., Fuller T.F. Kinetic model of the electrochemical oxidation of graphitic carbon in acidic environments // Phys. Chem. Chem. Phys. 2009. V. 11. P. 11557–11567.
12. Meyers J.P., Darling R.M. Model of Carbon Corrosion in PEM Fuel Cells // Journal of The Electrochemical Society. 2006. V. 153, is. 8. P. A1432–A1442.
13. Gribov E.N., Maltseva N.V., Golovin V.A., Okunev A.G. A simple method for estimating the electrochemical stability of the carbon materials // International Journal of Hydrogen Energy. 2016. V. 41. P. 18207–18213.
14. Golovin V.A., Maltseva N.V., Gribov E.N., Okunev A.G. New nitrogen-containing carbon supports with improved corrosion resistance for proton exchange membrane fuel cells // International Journal of Hydrogen Energy. 2017. V. 42. P. 11159–11165. DOI: 10.1016/j.ijhydene.2017.02.117.
15. Kireeva A.E., Sabelfeld K.K., Maltseva N.V., Gribov E.N. Parallel Implementation of Cellular Automaton Model of the Carbon Corrosion Under the Influence of the Electrochemical Oxidation // V. Malyshkin (ed.): PaCT 2017, LNCS. 2017. V. 10421. P. 205–214. DOI: 10.1007/978-3-319-62932-2_19.
16. Грибов Е.Н., Кузнецов А.Н., Головин В.А., Воропаев И.Н., Романенко А.В., Окунев А.Г. Дegradaция катализаторов Pt/C в условиях старт стоп циклирования // Электрохимия. 2014. Т. 50, № 7. С. 780–792.
17. Meier J.C., Katsounaros I., Galeano C., Bongard H.J., Topalov A.A., Kostka A. et al. Stability investigations of electrocatalysts on the nanoscale // Energy Environ. Sci. 2012. V. 5. P. 9319–9330.
18. Bandman O.L. Cellular Automata Composition Techniques for Spatial Dynamics Simulation // Simulating Complex Systems by Cellular Automata. Under-standing complex Systems / A.G. Hoekstra et al. (eds). Berlin, 2010. P. 81–115.
19. Abubaker A., Qahwaji R., Ipson S., Saleh M. One Scan Connected Component Labeling Technique // Signal Processing and Communications, ICSPC 2007. IEEE International Conference. 2007. P. 1283–1286.
20. Сибирский суперкомпьютерный центр СО РАН : центр коллективного пользования. URL: <http://www.sccc.icmmg.nsc.ru/> (дата обращения: 22.05.2018).

Поступила в редакцию 10 июня 2018 г.

Kireeva A.E., Sabelfeld K.K., Maltseva N.V., Gribov E.N. (2019) THREE-LAYER CELLULAR AUTOMATA MODEL OF THE ELECTROCHEMICAL OXIDATION OF CARBON KETJEN BLACK EC-600JD. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 46. pp. 31–39

DOI: 10.17223/19988605/46/4

In this paper, we consider the problem of constructing the cellular automaton model of the electrochemical oxidation of carbon. The carbon supported platinum catalyst is usually used for anode and cathode in the proton exchange membrane fuel cells which are now widely studied as alternative clean power sources with high energy efficiency. One of the main problems in the fuel cells commercialization is the low corrosion stability of carbon support which leads to detachment of large pieces of the support materials on which Pt is loaded.

The mechanism of carbon corrosion, describing gradual carbon surface degradation through successive electrooxidation stages, was suggested by E.N. Gribov research group. Based on this mechanism, we construct the three-dimensional cellular automaton model of electrochemical oxidation of the carbon. According to the cellular automata approach, a space is represented as a three-dimensional Cartesian lattice $L = \{v = (x, y, z): x = 0, \dots, L_x, y = 0, \dots, L_y, z = 0, \dots, L_z\}$ consisting of cells. Each cell has a coordinate $v \in L$ and a state $a \in A$. The admissible in the model states are $A = \{C_0, C, COH, COOH, \emptyset\}$, where C_0 denotes a carbon atom inside the sample volume, C is a surface carbon atom, COH and $COOH$ are surface carbon atoms with different oxidation degree, symbol $\emptyset$ corresponds to a place without any atom. The states of cells are changed according to the transition rules which are defined by the mechanism of carbon corrosion. In this model the transition rule is a sequential composition of two operators P_{oxid} and P_{surf} . The operator P_{oxid} simulates the oxidation stages:

$$\begin{aligned}\theta_1(v) : \{(C, v)\} &\xrightarrow{P_1} \{(COH, v)\}, \\ \theta_2(v) : \{(COH, v)\} &\xrightarrow{P_2} \{(COOH, v)\}, \\ \theta_3(v) : \{(COOH, v)\} &\xrightarrow{P_3} \{(\emptyset, v)\}.\end{aligned}$$

The operator P_{surf} finds new surface carbon atoms, i.e. the inner carbon atoms C_0 that after application of P_{oxid} have become the outer atoms C .

Conductive carbon black "Ketjenblack" is currently widely used as a support for platinum catalyst in the proton exchange membrane fuel cells. So, this material is chosen for investigation in the current paper. The "Ketjenblack" consists of hollow nanospheres-granules of carbon atoms. The average diameter of carbon grains is ~ 30 nm. In the cellular automaton model, the granules are represented by spheres consisting of cells with states C_0 and C . Each granule is formed by cells lying between two nested spheres with radii $R_{out} = 15$ cells and $R_{in} = 11.3$ cells. The radii are selected based on the characteristics of the "Ketjenblack".

In the chemical experiments, the carbon sample is deposited on polished glass carbon rod and immersed in the electrolyte. So, in the cellular automaton model the carbon sample is supposed to be fixed from above. The carbon pieces unconnected with the upper atoms are considered as detached and disappear. To find the detached carbon atoms, all cells containing the atoms connected with upper atoms are marked by the "one scan connected component labeling technique". The atoms not marked as connected are removed, i.e., states of these cells are replaced by $\emptyset$.

During the simulation the following characteristics are calculated: the number of pure carbon atoms, the number of oxidized carbon atoms, the total number of surface atoms and the electrochemical capacity of the carbon sample. The results of computer simulation are compared with the experimental data. The shape of the electrochemical capacity curve obtained using the cellular automaton model is qualitatively similar to that experimentally measured. This result confirms the correctness of the cellular automaton model of carbon electrochemical oxidation.

Keywords: cellular automaton; computer simulation; electrochemical oxidation; carbon corrosion.

KIREEVA Anastasiya Eugenevna (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation).

E-mail: kireeva@ssd.sccc.ru

SABELFELD Karl Karlovich (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation).

E-mail: karl@osmf.sccc.ru

MALTSEVA Natalia Viktorovna (Post-graduate student, Boreskov Institute of Catalysis SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation).

E-mail: maltseva.n.v@catalysis.ru

GRIBOV Eugenii Nikolaevich (Candidate of Chemical Sciences, Senior researcher, Boreskov Institute of Catalysis SB RAS, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation).

E-mail: gribov@catalysis.ru

REFERENCES

1. Bandman, O.L. (2008) Mapping physical phenomena onto CA-models AUTOMATA-2008. In: Adamatzky, A., Alonso Sanz R., Lawniczak, A., Martinez, G.J., Morita, K. & Worsch, T. (eds.) *Theory and Applications of Cellular Automata*. Luniver Press. pp. 381–397.
2. Toffoli, T. & Margolus, N. (1987) *Cellular Automata Machines: A New Environment for Modeling*. USA: MIT Press.
3. Yoshida, T. & Kojima, K. (2015) Toyota MIRAI fuel cell vehicle and progress toward a future hydrogen society. *Electrochemical Society Interface*. 24. pp. 45.
4. USA. (n.d.) *U.S. DRIVE Fuel Cell Tech Team: the Fuel Cells section of the FCTO Multi-Year Research, Development, and Demonstration Plan*. [Online] Available from: https://www.energy.gov/sites/prod/files/2016/06/f32/fcto_myrd_fuel_cells_0.pdf. (Accessed: 22nd May 2018).
5. Li, L., Hu, L., Li, J. & Wei, Z. (2015) Enhanced stability of Pt nanoparticle electrocatalysts for fuel cells. *Nano Research*. 8(2). pp. 418–440.

6. Maltseva, N.V., Golovin, V.A., Chikunova, Yu.O. & Gribov, E.N. (2018) Influence of the number of surface oxygen on the electrochemical capacity and stability of high surface Ketjen Black ES 600 DJ. *Russian Journal of Electrochemistry*. 54(5). pp. 489–496. DOI: 10.7868/S0424857018050031
7. Gribov, E.N., Kuznetsov, A.N., Voropaev, I.N., Golovin, V.A., Simonov, P.A., Romanenko, A.V., et al. (2016) Analysis of the corrosion kinetic of Pt/C catalysts prepared on different carbon supports under the “Start-Stop” cycling. *Electrocatalysis*. 7. pp. 159–173.
8. Shrestha, S., Liu, Y. & Mustain, W.E. (2011) Electrocatalytic Activity and Stability of Pt clusters on State-of-the-Art Supports: A Review. *Catalist Review. Science and Engineering*. 53. pp. 256–336.
9. Pandey, A., Yang, Z., Gummalla, M., Atrazhev, V.V., Kuzminykh, N.Yu., Vadim, I.S. & Burlatsky, S.F. (2013) A Carbon Corrosion Model to Evaluate the Effect of Steady State and Transient Operation of a Polymer Electrolyte Membrane Fuel Cell. *Journal of The Electrochemical Society*. 160(9). pp. F972–F979. arXiv:1401.4285 [physics.chem-ph]. DOI 10.1149/2.036309jes
10. Chen, J., Siegel, J.B., Matsuura, T. & Stefanopoulou, A.G. (2011) Carbon Corrosion in PEM Fuel Cell Dead-Ended Anode Operations. *Journal of The Electrochemical Society*. 158(9). pp. B1164–B1174.
11. Gallagher, K.G. & Fuller, T.F. (2009) Kinetic model of the electrochemical oxidation of graphitic carbon in acidic environments. *Phys. Chem. Chem. Phys.* 11. pp. 11557–11567.
12. Meyers, J.P. & Darling, R.M. (2006) Model of Carbon Corrosion in PEM Fuel Cells. *Journal of The Electrochemical Society*. 153(8). pp. A1432–A1442.
13. Gribov, E.N., Maltseva, N.V., Golovin, V.A. & Okunev, A.G. (2016) A simple method for estimating the electrochemical stability of the carbon materials. *International Journal of Hydrogen Energy*. 41. pp. 18207–18213.
14. Golovin, V.A., Maltseva, N.V., Gribov, E.N. & Okunev, A.G. (2017) New nitrogen-containing carbon supports with improved corrosion resistance for proton exchange membrane fuel cells. *International Journal of Hydrogen Energy*. 42, pp. 11159–11165. DOI: 10.1016/j.ijhydene.2017.02.117
15. Kireeva, A.E., Sabelfeld, K.K., Maltseva, N.V. & Gribov, E.N. (2017) Parallel Implementation of Cellular Automaton Model of the Carbon Corrosion Under the Influence of the Electrochemical Oxidation. In: Malyshkin, V. (ed.). *PaCT 2017. LNCS*. 10421. pp. 205–214. DOI: 10.1007/978-3-319-62932-2_19
16. Gribov, E.N., Kuznetsov, A.N., Golovin, V.A., Voropaev, I.N., Romanenko, A.V. & Okunev, A.G. (2014) Degradation of Pt/C Catalysts in Start-Stop Cycling Tests. *Russian Journal of Electrochemistry*. 50(7). pp. 780–792. (In Russian). DOI: 10.1134/S1023193514070052
17. Meier, J.C., Katsounaros, I., Galeano, C., Bongard, H.J., Topalov, A.A., Kostka, A., et al. (2012) Stability investigations of electrocatalysts on the nanoscale. *Energy and Environmental Science*. 5. pp. 9319–9330. DOI: 10.1039/C2EE22550F
18. Bandman, O.L. (2010) Cellular Automata Composition Techniques for Spatial Dynamics Simulation. In: Hoekstra, A.G. et al. (eds) *Simulating Complex Systems by Cellular Automata*. Berlin: Springer. pp. 81–115.
19. Abubaker, A., Qahwaji, R., Ipson, S. & Saleh, M. (2007) One Scan Connected Component Labeling Technique, Signal Processing and Communications, ICSPC 2007. *IEEE International Conference*. pp. 1283–1286. DOI: 10.1109/ICSPC.2007.4728561
20. Siberian Branch of Russian Academy of Sciences. (n.d.) *The Siberian Supercomputer Center of the Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (SSCC SB RAS)*. [Online] Available from: <http://www.sssc.icmmg.nsc.ru/>. (Accessed: 22nd May 2018).

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.246.2

DOI: 10.17223/19988605/46/5

S.E. Vorobeychikov, Yu.B. Burkatovskaya

PARAMETER ESTIMATION AND CHANGE-POINT DETECTION
FOR PROCESS AR(P)/ARCH(Q) WITH UNKNOWN PARAMETERS

This theoretical study was supported by the Russian Science Foundation under grant No. 17-11-01049 and performed in National Research Tomsk State University. The experimental calculations are carried out at Tomsk Polytechnic University within the framework of Tomsk Polytechnic University Competitiveness Enhancement Program grant.

The problem of parameter estimation and change point detection of process AR(p)/ARCH(q) is considered. Sequential estimators with bounded standard deviation are proposed and their asymptotic properties are studied. The obtained estimators are used in a sequential change-point detection algorithm; due to usage of the estimators the false alarm and delay probabilities are bounded from above. The results of simulation are presented.

Keywords: AR/ARCH; guaranteed parameter estimation; change-point detection.

The problem of change point detection arises often in different applications connected with time series analysis, financial mathematics, image processing etc. Two types of algorithms are used to detect the change point: a posteriori methods, when the estimation of the change point is conducted in a sample of a fixed size, and sequential methods, when the decision on change point can be taken after obtaining a next observation. Sequential methods include a special stopping rule that determines a stopping time. At this instant a decision on change point can be made. There are two types of errors typical for sequential change point detection procedures: false alarm, when one makes a decision that change is occurred before a change point (type 1 error), and delay, when one makes a decision that change is not occurred after a change point (type 2 error). The properties of the sequential procedures are connected with these errors and include probabilities of the errors, mean delay time and mean time between false alarms.

Last decades, autoregressive type processes and autoregressive conditional heteroscedasticity processes are widely used in various applications, such as forecasting of financial indexes, geographic information systems, medical data analysis, etc. For example in paper [1], autoregressive models are used for description of financial data. In the references therein, one can find examples of applications in other fields, including business, economics, finance and quality control. Processes with non-constant parameters also can be used for such purposes. In [2] a piecewise constant model is set off against usual GARCH model for volatility modelling. A two-sample test for a change in variability is proposed, which works well even in case of skewed distributions. Paper [3] describes a usage of mixtures of structured autoregressive models for the analysis of electroencephalogram. On-line posterior estimation of the model parameters and related quantities is achieved using a sequential Monte Carlo algorithm.

One of recent papers [4] is devoted to change point detection in casual time series such as $AR(\infty)$, $ARCH(\infty)$, etc. The procedure is based on a discrepancy between the historical parameter estimator and the updated parameter estimator, where both these estimators are quasi-likelihood estimators. To construct these estimators historical observations supposed to be available. It is proven that if the change occurs then it is asymptotically detected with the probability one. Asymptotic behavior of the test statistic can be described using the standard Brownian motion. The power of the test is estimated by simulation. In paper [5], change-point detection is applied to analysis of financial data. A fractionally integrated process is considered and

changes in the fractional integration parameter supposed to be detected. The authors use AR(p) model, for some large enough p, to approximate the process under consideration. The application of the tests to World inflation rates detected the presence of changes in persistence for most countries. In [6], some historic data set which is stationary and does not contain a change is used to construct an estimator for the initial set of parameters. Then new incoming observations are monitored for a change. It is shown that the algorithm can be applied to mean change model and to non-linear first-order autoregressive time series.

Theoretical properties of the described procedures are studied asymptotically when the number of observations before a change point tends to infinity. For small samples, usually simulation study is conducted. In this paper, we develop an alternative approach in the frame of guaranteed sequential methods. Due to a special stopping rule, we construct statistics with variances bounded from above by a known constant. Consequently, we can estimate the probabilities of false alarm and delay non-asymptotically, but we also investigate asymptotic properties of the statistics.

1. Model AR/ARCH

We consider scalar autoregressive process AR(p)/ARCH(q) specified by the equation

$$x_k = \lambda_1 x_{k-1} + \dots + \lambda_p x_{k-p} + \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 x_{k-1}^2 + \dots + \alpha_q x_{k-q}^2} \xi_k \quad (1)$$

Here $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ – is a sequence of independent identically distributed random variables with zero mean and unit variance. The density distribution function $f_\xi(x)$ of $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ is strictly positive for any value of x . Parameters $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_p]$ and $A = [\alpha_0, \dots, \alpha_q]$ are supposed to be unknown.

2. Sequential parameter estimator for AR(p)/ARCH(q)

For parameter estimation of the process (1) we use the approach proposed in [7] for classification of autoregressive processes with unknown noise variance bounded from above. At the first stage, we construct a special factor to compensate the influence of the noise variance. Then, we estimate autoregressive parameters by using this factor.

Since the noise variance of the observed process is unbounded from above, we transform the model by introducing the following notation

$$m_{k-1} = \max\{1, |x_{k-1}|, \dots, |x_{k-s}|\},$$

where $s = \max\{p, q\}$. Dividing equation (1) by m_{k-1} , we obtain

$$y_k = Z_k \Lambda + \sqrt{X_k A} \xi_k, \quad (2)$$

where

$$y_k = \frac{x_k}{m_{k-1}}, \quad Z_k = \left[\frac{x_{k-1}}{m_{k-1}}, \dots, \frac{x_{k-p}}{m_{k-1}} \right], \quad X_k = \left[\frac{1}{m_{k-1}^2}, \frac{x_{k-1}^2}{m_{k-1}^2}, \dots, \frac{x_{k-q}^2}{m_{k-1}^2} \right].$$

It is obvious, that the noise variance of the process (3) is bounded from above by the unknown value $\alpha_0 + \dots + \alpha_q$. We can construct the compensating factor by first n observations in the following form

$$\Gamma_n = B_n \sum_{k=s+1}^{s+n} \frac{x_k^2}{\min\{1, x_{k-1}^2, \dots, x_{k-q}^2\}}, \quad B_n = E \left(\sum_{k=1}^n \xi_k^2 \right)^{-1} \quad (3)$$

where n observations are taken at the interval where all the values $|x_k|$ are sufficiently large. In [8], we use a similar approach to compensate the noise variance of AR(p) process with unknown noise variance; it was proven that the compensating factor satisfies condition analogous to

$$E \frac{1}{\Gamma_n} \leq \frac{1}{(\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_q)} \quad (4)$$

This proof can be generalized for our case with minimum changes so we omit it.

We construct the estimator of the parameter vector Λ in the form

$$\hat{\Lambda}(H) = C^{-1}(\tau) \left(\sum_{k=n+s+1}^{\tau} v_k y_k Z_k^T \right), \quad C(t) = \sum_{k=n+s+1}^t v_k Z_k Z_k^T, \quad (5)$$

where τ is the random stopping time defined as follows

$$\tau = \tau(H) = \min \{t \geq n+s-1: v_{\min}(t) \geq H\}, \quad (6)$$

$v_{\min}(t)$ is the minimum eigenvalue of the matrix $C(t)$, H is a certain positive parameter. Then we define the weights v_k . Let m be the minimum value of t for which the matrix $C(n+t)$ is not degenerate. The weights on the interval $[n+s+1, n+m]$ are defined as

$$v_k = \begin{cases} \left(\Gamma_n Z_k Z_k^T \right)^{-1/2}, & \text{if } Z_k \text{ is linearly independent with } \{Z_{n+s+1}, \dots, Z_{k-1}\}; \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases} \quad (7)$$

The weights on the interval $[n+m, \tau-1]$ are defined from the equations

$$\frac{v_{\min}(t)}{\Gamma_n} = \sum_{k=n+s-1}^t v_k^2 Z_k Z_k^T. \quad (8)$$

The last weight v_{τ} is found from condition

$$\frac{v_{\min}(\tau)}{\Gamma_n} \geq \sum_{k=n+s+1}^{\tau} v_k^2 Z_k Z_k^T, \quad v_{\min}(\tau) = H. \quad (9)$$

Theorem 1. The stopping time $\tau(H)$ is finite with probability one and the mean-square accuracy of the estimator $\hat{\Lambda}(H)$ is bounded from above

$$E \|\hat{\Lambda}(H) - \Lambda\|^2 \leq \frac{H + p - 1}{H^2}. \quad (10)$$

Proof. According to [9], the stopping time $\tau(H)$ is finite with probability one if

$$\sum_{k=n+s+1}^{\infty} v_k^2 Z_k Z_k^T = \infty \quad \text{a.s.}$$

The equation for v_k (14) can be rewritten in the form

$$\frac{1}{\Gamma_n} \min_{x: \|x\|=1} \left(x, (C(k-1) + v_k Z_k Z_k^T) x \right) = \frac{v_{\min}(k-1)}{\Gamma_n} + v_k^2 Z_k Z_k^T.$$

It implies that for any vector $x: \|x\|=1$

$$(x, C(k-1)x) + v_k (x, Z_k^T Z_k x) = (x, C(k-1)x) + v_k (Z_k x)^2 \leq v_{\min}(k-1) + v_k^2 \Gamma_n Z_k Z_k^T;$$

hence,

$$-v_k^2 \Gamma_n Z_k Z_k^T + v_k (Z_k x)^2 + ((x, C(k-1)x) - v_{\min}(k-1)) \leq 0.$$

For a certain vector $b_k: \|b_k\|=1$ the inequality turns into the equality and the weight v_k is a root of the quadratic equation. As $(b_k, C(k-1)b_k) - v_{\min}(k-1) \geq 0$, then the equation has two roots: non-positive and non-negative. It gives us the equation for the weight

$$v_k = \min_{x: \|x\|=1} \frac{(Z_k b_k)^2 + \sqrt{(Z_k b_k)^4 + 4 \Gamma_n Z_k Z_k^T ((b_k, C(k-1)b_k) - v_{\min}(k-1))}}{2 \Gamma_n Z_k Z_k^T}.$$

Consequently, v_k tends to zero if and only if $Z_k b_k$ tends to zero and at the same time b_k tends to the eigenvector corresponding to the minimum eigenvalue of the matrix $C(k-1)$ as k tends to infinity. As the first component of the vector Z_k depends on $\xi_k(1)$ which can take any value then v_k does not tend to zero with non-zero probability and the instant τ is finite with the probability one.

For the mean-square accuracy of $\hat{\Lambda}(H)$ (5), by using (2), Cauchy–Schwarz–Bunyakovskii inequality, inequality $\|C(t)\| \geq v_{\min}(t)$ and (4), we obtain

$$E\|\Lambda^*(H) - \Lambda\|^2 = E\|C^{-1}(\tau)\|^2 \left\| \sum_{k=n+s-1}^{\tau} v_k \sqrt{X_k} A \xi_{k+1} Z_k^T \right\|^2 \leq \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_q}{H^2} E \left\| \sum_{k=n+s-1}^{\tau} v_k Z_k^T \xi_{k+1} \right\|^2.$$

For the second multiplier,

$$E \left\| \sum_{k=n+s+1}^{\tau} v_k \xi_{k+1} Z_k^T \right\|^2 = E \sum_{k=n+s+1}^{\tau} v_k^2 Z_k Z_k^T \xi_{k+1}^2 + 2E \sum_{k=n+s+1}^{\tau} \sum_{l=n+s+2}^{k-1} v_l v_k Z_l Z_k^T \xi_{l+1} \xi_{k+1}. \quad (11)$$

Consider a truncated stopping instant $\tau(N) = \min\{\tau, N\}$. Consider the sum differing from the first summand only in the upper limit. Let $F_k = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_k)$ be the σ -algebra generated by $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$, then τ defined by (6) is a Markovian instant with respect to $\{F_k\}$. Hence,

$$E \sum_{k=n+s+1}^{\tau(N)} v_k^2 Z_k Z_k^T \xi_{k+1}^2 = E \sum_{k=n+s+1}^N E \left[v_k^2 Z_k Z_k^T \chi_{k \leq \tau} \xi_{k+1}^2 \middle| F_k \right] = E \sum_{k=n+s+1}^N v_k^2 Z_k Z_k^T \chi_{k \leq \tau} E \left[\xi_{k+1}^2 \middle| F_k \right] = E \sum_{k=n+s+1}^{\tau(N)} v_k^2 Z_k Z_k^T.$$

As $\tau(N) \rightarrow \tau$ while $N \rightarrow \infty$, and taking into account (7)–(9) we obtain

$$E \sum_{k=n+s+1}^{\tau(N)} v_k^2 Z_k Z_k^T \xi_{k+1}^2 \rightarrow E \sum_{k=n+s+1}^{\tau} v_k^2 Z_k Z_k^T = E \sum_{k=n+s+1}^{\tau} v_k^2 Z_k Z_k^T + E \sum_{k=n+s+1}^{\tau} v_k^2 Z_k Z_k^T \leq E \left(\frac{H+p-1}{\Gamma_n} \right).$$

Similarly, we can show that the second summand in (11) is equal to zero. The obtained results together with (4) imply (10).

3. Asymptotic properties of the estimator

We establish properties of estimator (5) for sufficiently large values of H . In paper [10], we have proven a martingale central limit theorem for the vector case, using the stochastic exponent method.

Theorem 2. Let $\{F_k^n\}_{k \geq 0}$ be a non-decreasing sequence of σ -algebras, $F_0^n = \{\emptyset, \Omega\}$, $F_k^n \subseteq F_{k+1}^n$ for all

$0 \leq k < n$. Let $Y^n = \sum_{k=1}^{\tau_n} \eta_k^n$, where $\tau_n \leq n$ is a Markovian instant with respect to $\{F_k^n\}$. Suppose for all $n \geq 1$

the sequence $\eta^n = (\eta_k^n, F_k^n)$ is a martingale-difference sequence, $E\|\eta_k^n\|^2 < \infty$, and

$$(A) \max_{0 \leq k \leq n} \|\eta_k^n\|^2 \xrightarrow{P} 0, \quad (B) \sum_{k=0}^{\tau_n} E \left[\eta_k^n (\eta_k^n)^T \middle| F_{k-1}^n \right] \xrightarrow{P} \Sigma,$$

where Σ is a symmetric positive definite matrix with $E\Sigma < \infty$. Then $Y^n \xrightarrow{d} Y$ where Y is a random vector with the characteristic function

$$E \exp \{ i \lambda^T Y \} = E \exp \left\{ -\frac{1}{2} \lambda^T \Sigma \lambda \right\}.$$

The theorem allows establishing asymptotic properties of estimator (7). Lemma 1 proven in [11] allows us to obtain more precise results than in [8] and [10].

Lemma 1. Let $\xi_1, \dots, \xi_n$ be independent identically distributed standard Gaussian variables. Then, for any $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ and for sufficiently large C

$$P \{ \lambda_1 \xi_1^2 + \dots + \lambda_n \xi_n^2 > C \} \leq P \{ \xi_1^2 > C \}.$$

Theorem 3. If for noise variables ξ_k in (1), $E\xi_k^4 < \infty$, and process (1) is ergodic, then the mean-squared deviation of estimator (7) is bounded from above

$$P\left\{\|\hat{\Lambda}(H) - \Lambda\|^2 > x\right\} \leq 2\left(1 - \Phi\left(\frac{xH^2}{H - p + 1}\right)\right), \quad (12)$$

where $\Phi(\cdot)$ is the standard Gauss distribution function.

Proof. For estimator (7).

$$\|\hat{\Lambda}(H) - \Lambda\|^2 = \|C^{-1}(\tau)\|^2 \left\| \sum_{k=n+1}^{\tau} v_k \sqrt{X_k} A \xi_{k+1} Z_k^T \right\|^2 \leq \frac{\alpha_0 + \dots + \alpha_q}{H} \left\| \sum_{k=n+1}^{\tau} \frac{v_k}{\sqrt{H}} Z_k^T \xi_{k+1} \right\|^2. \quad (13)$$

Introduce a truncated stopping instant $\tau_N = \min\{\tau, N\}$ and the following notation:

$$\eta_k^N = \frac{v_k}{\sqrt{H}} Z_k^T \xi_{k+1} \chi_{k \leq \tau}.$$

then $\|\eta_k^N\|^2 = \frac{1}{H} \|v_k Z_k^T \xi_{k+1} \chi_{k \leq \tau}\|^2 \leq \frac{p}{H} \xi_{k+1}^2$. Using the Chebyshev and Cauchy–Schwarz–Bunyakovskii inequalities and (8), one obtains

$$\begin{aligned} P\left\{\max_{1 \leq k \leq N} \|\eta_k^N\|^2 > a\right\} &\leq P\left\{\sum_{k=n+s+1}^N \|\eta_k^N\|^2 \chi_{\|\eta_k^N\|^2 > a} > a\right\} \leq \frac{1}{a} E \sum_{k=n+s+1}^N \|\eta_k^N\|^2 \chi_{\|\eta_k^N\|^2 > a} \\ &= \frac{1}{aH} E \sum_{k=n+s+1}^N \chi_{k \leq \tau} E\left[\|v_k Z_k \xi_{k+1}\|^2 \chi_{\|\eta_k^N\|^2 > a} \middle| F_k\right] \leq \frac{1}{aH} E \sum_{k=n+s+1}^{\tau_N} \|v_k Z_k\|^2 \sqrt{E \xi_{k+1}^4} \sqrt{P\left\{\xi_{k+1}^2 > \frac{aH}{v_k^2 \|Z_k\|^2}\right\}} \\ &\leq \frac{E \xi_{k+1}^4}{(aH)^{3/2}} E \sum_{k=n+s+1}^{\tau_N} \|v_k Z_k\|^2 \sqrt{v_k^2 \|Z_k\|^2} \leq E \frac{\xi_{k+1}^4}{a^{3/2} H^{1/2} \Gamma_n} \max_{1 \leq k \leq N} \sqrt{v_k^2 \|Z_k\|^2}. \end{aligned}$$

As $\|Z_k\|^2 \leq p$, condition (A) of Theorem 2 holds true for $H \rightarrow \infty$. To check condition (B), consider matrix

$$\Sigma_N = \sum_{k=n+s+1}^{\tau_N} E\left[\eta_{k+1}^N (\eta_{k+1}^N)^T \middle| F_k^N\right] = \sum_{k=n+s+1}^{\tau_N} \frac{v_k^2 Z_k^T Z_k}{H} E\left[\xi_{k+1}^2 \middle| F_k^N\right] = \frac{1}{H} \sum_{k=n+s+1}^{\tau_N} v_k^2 Z_k^T Z_k.$$

Taking into account (7)–(9), one obtains that the trace of the matrix is bounded from above

$$\text{tr} \Sigma_N = \frac{1}{H} \sum_{k=n+s+1}^{\tau_N} v_k^2 \|Z_k\|^2 \leq \frac{H + p - 1}{\Gamma_n H}. \quad (14)$$

Then, $\Sigma_t(i, j)$ is a Cauchy sequence with respect to the convergence in probability. For any $t > m$

$$|\Sigma_t(i, j) - \Sigma_m(i, j)| \leq \frac{1}{H \Gamma_n} \sum_{k=m}^t v_k^2 |Z_k(i) Z_k(j)| \chi_{k \leq \tau} \leq \frac{1}{H \Gamma_n} \sum_{k=m}^t v_k^2 \|Z_k\|^2 \chi_{k \leq \tau}.$$

Inequality (14) imply the convergence in probability of the last sum as $t, m \rightarrow \infty$. This and (13) provide condition (B). Letting N go to infinity, one obtains the vector Y from Theorem 2

$$Y = \lim_{N \rightarrow \infty} Y^N = \sum_{k=n+s+1}^{\tau} \frac{v_k}{\sqrt{H}} Z_k^T \xi_{k+1}$$

According to (13),

$$P\left\{\|\hat{\Lambda}(H) - \Lambda\|^2 > x\right\} \leq P\left\{\left\| \sum_{k=n+s+1}^{\tau} \frac{v_k}{\sqrt{H}} Z_k^T \xi_{k+1} \right\|^2 > \frac{xH}{B}\right\} = P\left\{\|Y\|^2 > \frac{xH}{B}\right\}$$

Using the result of Theorem 2 and Fubini's theorem to change the order of integration one obtains

$$P\left\{\|Y\|^2 > \frac{xH}{B}\right\} = \int_{YY^T > xH/B - \infty} \int \frac{\exp\{i\lambda^T Y\}}{2\pi} E \exp\left\{-\frac{1}{2} \lambda^T \Sigma \lambda\right\} d\lambda dY = E \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |\Sigma|}} \int \exp\left\{-\frac{1}{2} Y^T \Sigma^{-1} Y\right\} dY.$$

The matrix Σ is symmetric and positive definite; hence, an orthogonal transformation T , resulting in the matrix Σ to diagonal form Σ' , exists. Using the change of variables $S = Y \Sigma^{-1/2} T^T$ one obtains

$$P\left\{\|Y\|^2 > \frac{xH}{B}\right\} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p}} E \int \exp\left\{-\frac{1}{2} S^T S\right\} dS = EP\left\{\sum_{i=1}^p v_i s_i^2 > xH/B\right\},$$

where v_i are the eigenvalues of the matrix Σ' , and s_i are the independent components of the Gaussian vector S . As the sum of v_i is equal to Σ , (14) and Lemma 1 imply (12).

4. Change-point detection

Describe now the change point detection problem for process (1). Suppose that after a certain instant θ , parameter vectors (Λ, A) change their values from (Λ_0, A_0) to (Λ_1, A_1) , and $\|\Lambda_0 - \Lambda_1\|^2 \geq \Delta$. We construct a series of sequential estimation plans $(\tau_i, \hat{\Lambda}_i)$, where $\{\tau_i\}$ is the increasing sequence of the stopping instances ($\tau_0 = -1$), and $\hat{\Lambda}_i$ is the guaranteed parameter estimator (5) on the interval $[\tau_{i-1} + 1, \tau_i]$. Then we choose an integer $l > 1$ and associate the statistic J_i with the i -th interval for all $i > l$

$$J_i = (\hat{\Lambda}_i - \hat{\Lambda}_{i-l})^T (\hat{\Lambda}_i - \hat{\Lambda}_{i-l}). \quad (15)$$

This statistic is the squared deviation of the estimators with numbers i and $i - l$. Due to using estimators (5) with properties (10) and (12) the proposed statistics change their expectation after a change point.

Theorem 4. The expectation of statistic J_i (15) satisfies the following inequality:

$$E[J_i | \tau_i < \theta] \leq \frac{4(H + p - 1)}{H^2}, \quad E[J_i | \tau_{i-l} < \theta \leq \tau_{i-1}] \geq \Delta - 4 \frac{\sqrt{\Delta(H + p - 1)}}{H}. \quad (16)$$

Proof is based on property (10); it is very similar to one described in [7].

Hence, the Theorem allows us to construct the following change-point detection algorithm. The J_i values are compared with a certain threshold δ , where

$$\frac{4(H + p - 1)}{H^2} < \delta < \Delta - 4 \frac{\sqrt{\Delta(H + p - 1)}}{H}.$$

The change point is considered to be detected when the value of the statistic exceeds δ .

The probabilities of false alarm and delay in the change-point detection in any observation cycle are important characteristics of any change point detection procedure. Due to the application of the guaranteed parameter estimators in the statistics, we can obtain the upper bounds for these probabilities.

Theorem 5. The probability of false alarm P_0 and the probability of delay P_1 in any observation cycle $[\tau_{i-1} + 1, \tau_i]$ are bounded from above

$$P_0 \leq 4(H + p - 1)/\delta H^2, \quad P_1 \leq 4(H + p - 1)/(\sqrt{\Delta} - \sqrt{\delta})^2 H^2. \quad (17)$$

Proof is based on property (15), Cauchy–Schwarz–Bunyakovskii inequality and the following equalities

$$P_0 = P\{J_i > \delta | \tau_i < \theta\}, \quad P_1 = P\{J_i < \delta | \tau_{i-l} < \theta \leq \tau_{i-1}\}.$$

Asymptotic properties of the estimators let us establish the following asymptotic upper bounds of the error probabilities.

Theorem 6. For ergodic process (1) in the conditions of Theorem 3, for sufficiently large H

$$P_0 \leq 4\left(1 - \Phi\left(\sqrt{\delta}H/2\sqrt{H + p - 1}\right)\right), \quad P_1 \leq 4\left(1 - \Phi\left((\sqrt{\Delta} - \sqrt{\delta})H/2\sqrt{H + p - 1}\right)\right). \quad (18)$$

where $\Phi(x)$ is the standard normal distribution function.

5. Simulation results and their discussion

We conducted numerical simulation of the proposed estimation and change point detection algorithms for AR(p)/ARCH(q) process. For every set of the parameters, 100 replications of the experiment were performed. First, we considered the parameter estimation problem for the AR(2)/ARCH(2) process rewritten in a special form (2). The noise variation of the process is bounded from above by the value $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0,6 + 0,1 + 0,3 = 1$. The number n was chosen as the integral part of $H^{1/2}$. Table 1 presents the results. Here H is the parameter of the procedure, $\hat{\lambda}_1$ and $\hat{\lambda}_2$ are the estimators of the parameters $\lambda_1 = 0,5$ and $\lambda_2 = 0,1$, T is the mean interval of the estimation, Γ_n is the compensating factor (3), σ^2 is the sample standard deviation, D is the upper bound for the standard deviation of the estimator given by inequality (10).

Table 1

Parameter estimation for the AR(2)/ARCH(2) process

H	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	T	σ^2	Γ_n	D
50	0,4996	0,0976	748	0,0067	1,99	0,0204
75	0,4996	0,1008	1 073	0,0044	1,89	0,0135
100	0,4989	0,0986	1 355	0,0036	1,79	0,0101
125	0,4994	0,1016	1 661	0,003	1,74	0,0081
150	0,5011	0,0996	1 961	0,0026	1,71	0,0067

One can see that the mean number of the observations increases linearly by H . This property is important for sequential estimators [12]. The sample mean square error of the estimation is about three times less than the theoretical one. It is connected with rather complicated structure of the AR/ARCH process. It has unbounded noise variation so we rewrite the equation in a special form by dividing the equation by the value not less than 1. As a result, the minimum eigenvalue of matrix C in (5) grows rather slowly and that implies the increase of the estimation interval.

Further we conducted simulations of the proposed change-point detection algorithm. Simulations were conducted for the AR(2)/ARCH(2) process specified by the equation in the special form (2) with parameters given in Table 2.

Table 2

Parameters the AR(2)/ARCH(2) process

H	λ_1	λ_2	α_0	α_1	α_2
Before the change point	0,5	0,1	0,6	0,1	0,3
After the change point	0,1	0,3	0,6	0,3	0,1

In this process the noise variance is bounded from above by 1 both before and after the change point.

The change point $\theta = 10\,000$ and $\Delta = 0,2$. Table 3 presents the results of the simulation. Here H and δ are the parameters of the procedure, T_1 is the mean delay in the change-point detection, $\hat{p}_0$ and $\hat{p}_1$ are the sample probabilities of the false alarm and of the delay, respectively, P_0 and P_1 are the asymptotic upper bounds for the probabilities expressed by formulas (18). False alarms were registered only in one case.

Table 3

Change-point detection for the AR(2)/ARCH(2) process

H	δ	T_1	$\hat{p}_0$	$\hat{p}_1$	P_0	P_1
150	0,03	1 595	0,0	0,0	0,581	0,189
175	0,03	2 093	0,0	0,0	0,506	0,141
200	0,03	3 290	0,0	0,0	0,439	0,107
150	0,05	1 819	0,0	0,0	0,345	0,345
175	0,05	2 366	0,0	0,0	0,281	0,281
200	0,05	4 048	0,0	0,0	0,229	0,229
150	0,07	1 891	0,0	0,0	0,213	0,53
175	0,07	2 413	0,0	0,054	0,162	0,457
200	0,03	4 347	0,0	0,0	0,121	0,395

In the example above, the difference between the parameters before and after change point is not significant ($\Delta = 0,2$) so we considered the second example of process with parameters given in Table 4.

Table 4

Parameters the AR(2)/ARCH(2) process

H	λ_1	λ_2	α_0	α_1	α_2
Before the change point	0,5	0,1	0,6	0,1	0,3
After the change point	-0,1	0,8	0,6	0,3	0,1

Here $\Delta = 0,85$, so it is possible to choose the parameter H less than in the first case. The results of the simulation are presented in Table 5.

Table 5

Change-point detection for the AR(2)/ARCH(2) process

H	δ	T_1	$\hat{p}_0$	$\hat{p}_1$	P_0	P_1
50	0,1	601	0,002	0,118	0,537	0,0679
100	0,1	1 237	0,0	0,11	0,231	0,0052
150	0,1	1 663	0,0	0,102	0,107	0,0004
50	0,2125	804	0,0	0,135	0,213	0,213
100	0,2125	1 320	0,0	0,07	0,044	0,044
150	0,2125	1 841	0,0	0,0	0,001	0,001
50	0,3	897	0,0	0,11	0,11	0,38
100	0,3	1 400	0,0	0,0	0,013	0,125
150	0,3	2 035	0,0	0,07	0,002	0,045

One can see that when the difference between the parameters is sufficiently large then the sample error probabilities are many fewer than their theoretical upper bounds. Moreover, generally no false alarms and skipping the change point were registered.

Conclusion

The change point detection algorithm for the AR(p)/ARCH(q) process with unknown parameters before and after the change point has been constructed. The algorithm is based on the weighted least square method. The guaranteed sequential estimators of unknown parameters are used. The choice of weights and stopping rule guarantees the prescribed accuracy of the estimation and hence the prescribed error probabilities in every observation interval. The results of numerical simulation prove the possibility to use the suggested algorithm used for change point detection of recurrent processes with unknown noise variance. However, the algorithms should be improved through more accurate compensation of the noise variance.

REFERENCES

1. Leiva, V., Saulo, H., Leao, J. & Marchanta, C. (2014) A family of autoregressive conditional duration models applied to financial data. *Computational Statistics and Data Analysis*. 79. pp. 175–191. DOI: 10.1016/j.csda.2014.05.016
2. Fried, R. (2012) On the online estimation of local constant volatilities. *Computational Statistics and Data Analysis*. 56. pp. 3080–3090.
3. Prado, R. (2013) Sequential estimation of mixtures of structured autoregressive models. *Computational Statistics and Data Analysis*. 58. pp. 58–70. DOI: 10.1016/j.csda.2011.03.017
4. Bardet, J.-M. & Kengne, W. (2014) Monitoring procedure for parameter change in causal time series. *Journal of Multivariate Analysis*. 125. pp. 204–221. DOI: 10.1016/j.jmva.2013.12.004
5. Martins, L.F. & Rodrigues, P.M.M. (2014) Testing for persistence change in fractionally integrated models: An application to world inflation rates. *Computational Statistics and Data Analysis*. 76. pp. 502–522. DOI: 10.1016/j.csda.2012.07.021
6. Kirch, C. & Tadjuidje, K.J. (2015) On the use of estimating functions in monitoring time series for change points. *Journal of Statistical Planning and Inference*. 161. pp. 25–49. DOI: 10.1016/j.jspi.2014.12.009
7. Konev, V. & Dmitrienko, A. (1994) On guaranteed estimation of autoregression parameters when the noise variance is unknown. *Automatic and Remote Control*. 2. pp. 87–99.

8. Burkatovskaya, Yu.B. & Vorobeychikov, S.E. (2011) Change point detection of autoregressive process with unknown parameters. *Preprints of the 18th IFAC World Congress*. 26 August – 2 September, 2011. pp. 13215–13220.
9. Shiryaev, A. (2016) *Probability*. 3rd ed. New York: Springer-Verlag.
10. Burkatovskaya, Yu.B., Vorobeychikov, S.E. & Sergeeva, E.E. (2012) Asymptotic properties of parameter estimation and change-point detection procedures for a generalized autoregressive process with conditional heteroscedasticity. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(19). pp. 59–71. (In Russian).
11. Vorobeychikov, S., Burkatovskaya, Yu. & Sergeeva, E. (2016) TAR(p)/ARCH(1) process with an arbitrary threshold: guaranteed parameter estimation and change-point detection. *IAENG International Journal of Applied Mathematics*. 469(3). pp. 353–366.
12. Lorden, G. (1971) Procedures for reacting to a change in distribution. *Annals of Mathematical Statistics*. 42. pp. 1897–1971.

Received: May 29, 2018

Vorobeychikov S.E., Burkatovskaya Yu.B. (2019) PARAMETER ESTIMATION AND CHANGE-POINT DETECTION FOR PROCESS $AR(p)/ARCH(q)$ WITH UNKNOWN PARAMETERS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 46. pp. 40–48

DOI: 10.17223/19988605/46/5

Воробейчиков С.Э., Буркатовская Ю.Б. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА И ОБНАРУЖЕНИЯ РАЗЛАДОВ ПРОЦЕССА $AR(p)/ARCH(q)$ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2019. № 46. С. 40–48

Рассматриваются задачи оценивания параметров и обнаружения разладов процесса $AR(p)/ARCH(q)$ с неизвестными параметрами. Строится последовательная оценка по взвешенному методу наименьших квадратов. Использование специального момента остановки и весов позволяет ограничить среднеквадратическое отклонение оценки заранее заданной величиной. Предложенные оценки применяются в алгоритме обнаружения изменения параметров и позволяют ограничить сверху вероятность ложной тревоги и запаздывания в обнаружении разладки. Исследованы неасимптотические и асимптотические свойства алгоритмов.

Ключевые слова: $AR/ARCH$; гарантированное оценивание параметров; обнаружение разладок.

VOROBAYCHIKOV Sergey Erikovich (Doktor of Physics and Mathematics, National Research Tomsk State University, Russian Federation).

E-mail: sev@mail.tsu.ru

BURKATOVSKAYA Yulia Borisovna (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, National Research Tomsk Polytechnic University, Russian Federation).

E-mail: tracey@tpu.ru

O.V. Gubina, G.M. Koshkin

NONPARAMETRIC ESTIMATION OF ACTUARIAL PRESENT VALUE OF DEFERRED LIFE ANNUITY

The paper deals with the estimation problem of the actuarial present value of the deferred life annuity. The nonparametric estimator of the deferred life annuity was constructed. We found the principal term of the asymptotic mean squared error (MSE) of the proposed estimator and proved its asymptotic normality. The simulations show that the empirical MSE of the annuity estimator decreases when the sample size increases.

Keywords: nonparametric estimation; deferred life annuity; mean squared error; asymptotic normality.

Let x be the age of an individual and at the moment $t = 0$ payments start. The idea of the r -year deferred life annuity in accordance with [1. P. 174] is this: from the moment $t + r = r$, an individual starts receiving money once a year, which we take as a monetary unit, and payments are made only during the lifetime of an individual. It is known that the deferred life annuity is associated with the appropriate type of insurance. Thus, the average total cost of the present continuous r -year deferred life annuity is given by the following formula (see [1. P. 184]):

$${}_r|\bar{a}_x(\delta) = \frac{1 - {}_r|\bar{A}_x}{\delta},$$

where ${}_r|\bar{A}_x = \int_r^\infty e^{-\delta t} f_x(t) dt$ is the net premium (the expectation of the present value of an insured unit sum for

the deferred life insurance at age x), δ is a force of interest, $f_x(t) = \frac{f(x+t)}{S(x)}$ is a probability density of future

lifetime of an individual $T_x = X - x$ [1. P. 62], $f(x)$ is a probability density of lifetime of an individual X , $S(x) = P(X > x)$ is a survival function. Introduce the random variable

$$z(x) = \frac{1 - e^{-\delta T_x}}{\delta}, T_x > r. \quad (1)$$

Then, by averaging $z(x)$ (1), we get the formula of the deferred life annuity (see [2–4]):

$${}_r|\bar{a}_x(\delta) = E(z) = \frac{1}{\delta} \left(1 - \frac{\Phi(x, \delta, r)}{S(x)} \right), \quad (2)$$

where E is the symbol of the mathematical expectation,

$$\Phi(x, \delta, r) = e^{\delta x} \int_{x+r}^\infty e^{-\delta t} dF(t),$$

$F(x) = P(X \leq x) = 1 - S(x)$ is a distribution function.

Note that the whole life annuity $\bar{a}_x(\delta)$ [2] is the special case of the deferred life annuity (2) at $r = 0$.

1. Construction of the Deferred Annuity Estimator

Assume that we have a random sample $X_1, \dots, X_N$ of N individuals' lifetimes. Using the empirical survival function

$$S_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(X_i > x),$$

where $I(A)$ is the indicator of an event A , obtain the following estimator of (2):

$$\begin{aligned} {}_{r|}\bar{a}_x^N(\delta) &= \frac{1}{\delta} \left(1 - \frac{e^{\delta x}}{S_N(x) \cdot N} \sum_{i=1}^N \exp(-\delta X_i) I(X_i > x + r) \right) = \frac{1}{\delta} \left(1 - \frac{\Phi_N(x, \delta, r)}{S_N(x)} \right), \\ \Phi_N(x, \delta, r) &= \frac{e^{\delta x}}{N} \sum_{i=1}^N \exp(-\delta X_i) I(X_i > x + r). \end{aligned} \quad (3)$$

2. Bias and Mean Squared Error of the Estimator ${}_{r|}\bar{a}_x^N(\delta)$

Here we will obtain the principal term of the asymptotic MSE and the bias convergence rate of the estimator (3). Introduce the notation according to [5]: $t_N = (t_{1N}, t_{2N}, \dots, t_{sN})^T$ is an s -dimensional vector with the components $t_{jN} = t_{jN}(x) = t_{jN}(x; X_1, \dots, X_N)$, $j = \overline{1, s}$, $x \in R^\alpha$, R^α is the α -dimensional Euclidean space; $H(t): R^s \rightarrow R^1$ is a function, where $t = t(x) = (t_1(x), \dots, t_s(x))^T$ is an s -dimensional bounded vector function; $N_s(\mu, \sigma)$ is the s -dimensional normally distributed random variable with a mean vector and covariance matrix $\sigma = \sigma(x)$; $\nabla H(t) = (H_1(t), \dots, H_s(t))^T$, $H_j(t) = \frac{\partial H(z)}{\partial z_j} \Big|_{z=t}$, $j = \overline{1, s}$; $\Rightarrow$ is the symbol of convergence in distribution; $\|x\|$ is the Euclidean norm of a vector x ; $\mathfrak{R}$ is the set of natural numbers.

Definition 1. The function $H(t): R^s \rightarrow R^1$ and the sequence $\{H(t_N)\}$ are said to belong to the class $N_{v,s}(t; \gamma)$, provided that:

1) there exists an ε -neighborhood

$$\sigma = \{z: |z_i - t_i| < \varepsilon, i = \overline{1, s}\},$$

in which the function $H(z)$ and all its partial derivatives up to order v are continuous and bounded;

2) for any values of variables $X_1, \dots, X_N$ the sequence $\{H(t_N)\}$ is dominated by a numerical sequence $C_0 d_N^\gamma$, such that $d_N \uparrow \infty$, as $N \rightarrow \infty$, and $0 \leq \gamma < \infty$.

Theorem 1 [5]. Let the conditions

1) $H(z), \{H(t_N)\} \in N_{2,s}(t; \gamma)$,

2) $E\|t_N - t\|^i = O(d_N^{-i/2})$

hold for all $i \in \mathfrak{R}$. Then, for every $k \in \mathfrak{R}$,

$$\left| E[H(t_N) - H(t)]^k - E[\nabla H(t) \cdot (t_N - t)]^k \right| = O(d_N^{-(k+1)/2}). \quad (4)$$

If in formula (4) $k = 1$, we obtain the principal term of the bias for $H(t_n)$, and at $k = 2$, we have the principal term of the MSE.

Theorem 2. If $S(x) > 0$ and $S(t)$ is continuous at a point x , then

1) for the bias of (3), the following relation holds:

$$\left| b({}_{r|}\bar{a}_x^N(\delta)) \right| = \left| E({}_{r|}\bar{a}_x^N(\delta)) - {}_{r|}\bar{a}_x(\delta) \right| = O(N^{-1});$$

2) the MSE of (3) is given by the formula

$$u^2({}_{r|}\bar{a}_x^N(\delta)) = E({}_{r|}\bar{a}_x^N(\delta) - {}_{r|}\bar{a}_x(\delta))^2 = \frac{\Phi(x, 2\delta, r) - \Phi^2(x, \delta, r) / S(x)}{N\delta^2 S^2(x)} + O(N^{-3/2}).$$

Proof. For the estimator ${}_r\bar{a}_x^N(\delta)$ (3) in the notation of Theorem 1, we have: $s = 2$;

$$\begin{aligned} t_N &= (t_{1N}, t_{2N})^T = (\Phi_N(x, \delta, r), S_N(x))^T; \quad d_N = N; \quad t = (t_1, t_2)^T = (\Phi(x, \delta, r), S(x))^T; \\ H(t) &= \frac{1}{\delta} \left(1 - \frac{t_1}{t_2} \right) = \frac{1}{\delta} \left(1 - \frac{\Phi(x, \delta, r)}{S(x)} \right) = {}_r\bar{a}_x(\delta); \quad H(t_N) = \frac{1}{\delta} \left(1 - \frac{\Phi_N(x, \delta, r)}{S_N(x)} \right) = {}_r\bar{a}_x^N(\delta); \\ \nabla H(t) &= (H_1(t), H_2(t))^T = \left(-\frac{1}{\delta S(x)}, \frac{\Phi(x, \delta, r)}{\delta S^2(x)} \right)^T \neq 0. \end{aligned}$$

The sequence $\{H(t_N)\}$ satisfies the condition 1) of Theorem 1 with $C_0 = \frac{1}{\delta}(1 + e^{-\delta r})$, $\gamma = 0$. Indeed,

$$\begin{aligned} |H(t_N)| &= \frac{1}{\delta} \left| 1 - \frac{\Phi_N(x, \delta, r)}{S_N(x)} \right| \leq \frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{\Phi_N(x, \delta, r)}{S_N(x)} \right) \leq \frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{e^{\delta x} \sum_{i=1}^N \exp(-\delta X_i) I(X_i > x + r)}{\sum_{i=1}^N I(X_i > x)} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{e^{\delta x} e^{-\delta(x+r)} \sum_{i=1}^N I(X_i > x + r)}{\sum_{i=1}^N I(X_i > x)} \right) \leq \frac{1}{\delta} (1 + e^{-\delta r}). \end{aligned}$$

Further, the function $H(t)$ satisfies the condition 1) in view of $t_2 = S(x) > 0$. Also, this function satisfies the condition 2) due to Lemma 3.1 [6], as for all $i \in \mathfrak{R}$ such inequalities hold: $E\{I^i(X > x)\} = S(x) \leq 1$, $E\{e^{i\delta x} e^{-i\delta X} I^i(X > x + r)\} \leq e^{i\delta x} e^{-i\delta x} S(x + r) = S(x + r) \leq 1$.

It is well known that $S_N(x)$ is the unbiased and consistent estimator of $S(x)$. Show that $\Phi_N(x, \delta, r)$ is the unbiased estimator of $\Phi(x, \delta, r)$ and calculate the variance of $\Phi_N(x, \delta, r)$:

$$\begin{aligned} E\Phi_N(x, \delta, r) &= \frac{e^{\delta x}}{N} E \left\{ \sum_{i=1}^N \exp(-\delta X_i) I(X_i > x + r) \right\} = \Phi(x, \delta, r), \\ D\Phi_N(x, \delta, r) &= \frac{e^{2\delta x}}{N^2} \sum_{i=1}^N D \left\{ I(X_i > x + r) e^{-\delta X_i} \right\} = \frac{1}{N} (\Phi(x, 2\delta, r) - \Phi^2(x, \delta, r)). \end{aligned}$$

Considering that $E(t_N - t) = 0$ and all the conditions of Theorem 1 are fulfilled, in accordance with (4) we get the order of the bias of ${}_r\bar{a}_x^N(\delta)$:

$$\left| E({}_r\bar{a}_x^N(\delta) - {}_r\bar{a}_x(\delta)) - E[\nabla H(t)(t_N - t)] \right| = \left| E({}_r\bar{a}_x^N(\delta) - {}_r\bar{a}_x(\delta)) \right| = O(N^{-1}).$$

Find the components of the covariance matrix $\sigma({}_r\bar{a}_x(\delta)) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$ for the statistics $\Phi_N(x, \delta, r)$ and

$S_N(x)$:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= ND\{\Phi_N(x, \delta, r)\} = \Phi(x, 2\delta, r) - \Phi^2(x, \delta, r); \quad \sigma_{22} = ND\{S_N(x)\} = S(x)(1 - S(x)); \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = \\ &= N \text{cov}(S_N(x), \Phi_N(x, \delta, r)) = N(E\{S_N(x)\Phi_N(x, \delta, r)\} - E\{S_N(x)\}E\{\Phi_N(x, \delta, r)\}) = (1 - S(x))\Phi(x, \delta, r). \end{aligned}$$

Using the previous results on the bias and covariance matrix, we obtain

$$\begin{aligned} u^2({}_r\bar{a}_x^N(\delta)) &= E[\nabla H(t)(t_N - t)]^2 + O(N^{-3/2}) = H_1^2(t)\sigma_{11} + H_2^2(t)\sigma_{22} + 2H_1(t)H_2(t)\sigma_{12} + O(N^{-3/2}) = \\ &= \frac{\Phi(x, 2\delta, r) - \Phi^2(x, \delta, r) / S(x)}{N\delta^2 S^2(x)} + O(N^{-3/2}). \end{aligned} \quad (5)$$

The proof of Theorem 2 is completed.

3. Asymptotic Normality of the Estimator ${}_r|\bar{a}_x^N(\delta)$

We need the following two Theorems.

Theorem 3 [7, Appendix 5]. If $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N, \dots$ is a sequence of independent and identically distributed s -dimensional vectors, $E\{\xi_k\} = 0$, $\sigma(x) = E\{\xi_k^T \xi_k\}$, $t_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi_k$, then, as $N \rightarrow \infty$, $\sqrt{N}t_N \Rightarrow N_s(0, \sigma(x))$.

Theorem 4 [8]. Let $\sqrt{N} \cdot t_N \Rightarrow N_s\{\mu, \sigma(x)\}$, $H(z)$ be differentiable at the point μ , $\nabla H(\mu) \neq 0$. Then

$$\sqrt{N}(H(t_N) - H(\mu)) \Rightarrow N_1 \left(\sum_{j=1}^s H_j(\mu) \mu_j, \sum_{p=1}^s \sum_{j=1}^s H_j(\mu) \sigma_{jp} H_p(\mu) \right).$$

Theorem 5. Under the conditions of Theorem 2

$$\sqrt{N}({}_r|\bar{a}_x^N(\delta) - {}_r|\bar{a}_x(\delta)) \Rightarrow N_1 \left(0, \frac{\Phi(x, 2\delta, r) - \Phi^2(x, \delta, r)/S(x)}{\delta^2 S^2(x)} \right).$$

Proof. In the notation of Theorem 3, we have $s = 2$, $\sigma(x) = \sigma({}_r|\bar{a}_x(\delta))$. Thus,

$$\sqrt{N}\{(\Phi_N(x, \delta, r), S_N(x)) - (\Phi(x, \delta, r), S(x))\} \Rightarrow N_2((0, 0), \sigma({}_r|\bar{a}_x(\delta))).$$

The function $H(z)$ is differentiable at the point $t = (\Phi(x, \delta), S(x))$ and $\nabla H(t) \neq 0$. Consequently, all the conditions of Theorem 4 hold, and using (5), we obtain the desired result.

The proof of Theorem 5 is completed.

4. Simulations

Introduce the denotation $I_x(a, b] = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in (a, b] \\ 0, & \text{if } x \notin (a, b] \end{cases}$. Consider de Moivre's model, for which the in-

dividual's lifetime X is uniformly distributed in the interval $(0, \omega)$, where ω is a limiting age. For this model the probability density and survival function are defined by the following formulas:

$$f(x) = \frac{I_x(0, \omega)}{\omega}, \quad S(x) = I_x(-\infty, \omega) - \frac{xI_x(0, \omega)}{\omega}. \quad (6)$$

Now, using (6), we obtain

$$f_x(t) = \frac{f(x+t)}{S(x)} = \frac{I_t(0, \omega-x)}{\omega-x},$$

$${}_r|\bar{a}_x(\delta) = \frac{1}{\delta} \left(1 - \int_r^\infty e^{-\delta t} f_x(t) dt \right) = \frac{1}{\delta} \left(1 - \frac{1}{\omega-x} \int_r^{\omega-x} e^{-\delta t} dt \right) = \frac{1}{\delta} \left(1 - \frac{e^{-\delta r} - e^{-\delta(\omega-x)}}{\delta(\omega-x)} \right). \quad (7)$$

The present value of the 5-years deferred annuity for a person at the age $x = 45$ years when $\omega = 100$ years, $\delta = 0,09531$ (9,531%), and monthly payments in the size of 1000 rubles, is equal to

$$12000 \cdot {}_5|\bar{a}_{45}(0,09531) = 12000 \cdot 9,581854 = 114982 \text{ rubles.}$$

Note that for such δ the effective annual interest rate $i = e^\delta - 1 = 0,1$ (10%).

The simulations were carried out for de Moivre's model under the above presented conditions. The annuities and their estimators are presented in Fig. 1 for random samples $X_1, \dots, X_N$ of the sizes $N = 50, 100, 500$, uniformly distributed in the interval $(0, 100)$.

We will characterize the quality of estimators presented in Fig. 1 using the empirical MSE

$$G(N, r, \delta) = \frac{\sum_{x=0}^{95} ({}_r|\bar{a}_x(\delta) - {}_r|\bar{a}_x^N(\delta))^2}{96}.$$

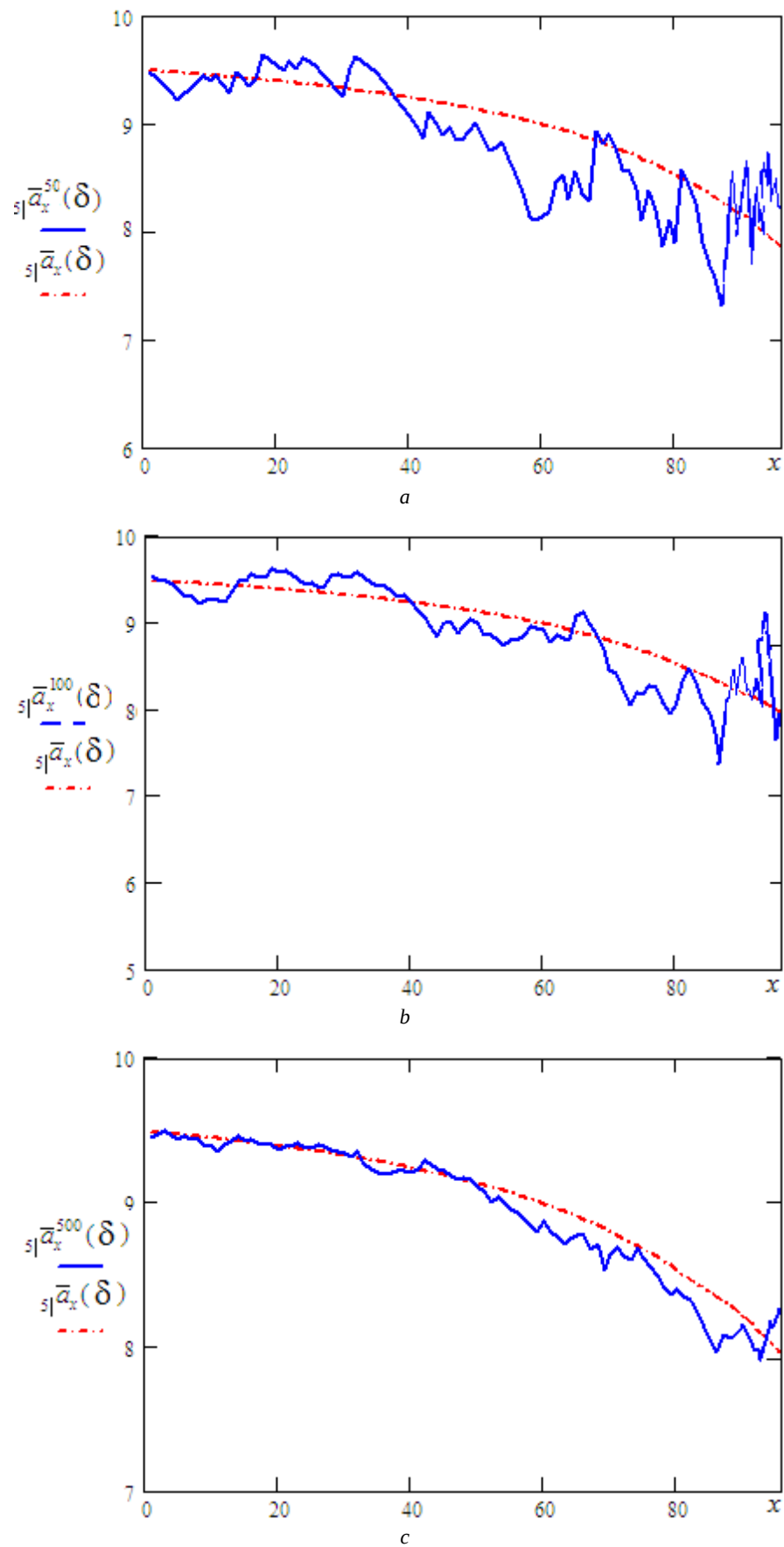


Fig. 1. Dependence on the age x of the 5-years deferred annuity ($\delta = 0,09531$) and its estimators for the sample sizes N : $a - 50$; $b - 100$, $c - 500$

The calculation results are given in Table I.

Table 1

Simulation results for the different sample sizes

N	25	50	100	250	500
$G(N; 5; 0,09531)$	1,632	0,815	0,413	0,117	0,052

So, according to Table 1, the quality of the deferred annuity estimators by the criterion $G(N; 5; 0,09531)$ is improving when the sample size N is increasing.

Conclusion

In the paper, we found the principal term of the asymptotic MSE of the estimator ${}_r\bar{a}_x^N(\delta)$. Also, the following asymptotic properties of the estimator are proved: unbiasedness, consistency, and normality. Statistical modeling within the framework of de Moivre's model shows that the quality of estimation according to the empirical criterion $G(N, r, \delta)$ improves with the growth of the sample size. Note that the improved estimators of life annuities (3) can be obtained by substituting of empirical survival functions by the smooth empirical survival functions (cf. [9–24]) and using auxiliary information of the different type [25–33], for example, connected with random variables X , $T_x = X - x$, $T_x - r$.

REFERENCES

1. Falin, G.I. (2002) *Mathematical foundations of the theory of life insurance and pension schemes*. Moscow: Ankil.
2. Koshkin, G.M. & Gubina, O.V. (2016) Estimation of the present values of life annuities for the different actuarial models. *SMRLO 2016. Proc. The Second International Symposium on Stochastic Models, in Reliability Engineering, Life Science, and Operations Management*. Beer Sheva, Israel. February 15–18, 2016. Conference Publishing Services The Institute of Electrical and Electronics Engineers. pp. 506–510.
3. Bowers, N., Gerber, H., Hickman, J., Jones, D. & Nesbitt, C. (1986) *Actuarial Mathematics*. Itasca: Society of Actuaries.
4. Gerber, H. (1997) *Life Insurance Mathematics*. 3rd ed. New York: Springer-Verlag.
5. Koshkin, G.M. (1999) Deviation moments of the substitution estimator and its piecewise smooth approximations. *Sibirskiy Matematicheskiy Zhurnal – Siberian Mathematical Journal*. 40(3). pp. 515–527.
6. Ibragimov, I.A. & Khasminskii, R.Z. (1981) *Statistical Estimation: Asymptotic Theory*. Berlin; New York: Springer.
7. Borovkov, A.A. (1998) *Mathematical Statistics*. New York: Gordon & Breach.
8. Koshkin, G.M. (1990) Asymptotic properties of functions of statistics and their application to nonparametric estimation. *Automation and Remote Control*. 51(3). pp. 345–357.
9. Nadaraya, E.A. (1964) Some new estimates of distribution function. *Theory of Probability and its Applications*. 9(3). pp. 497–500. DOI: 10.1137/1109069
10. Azzalini, A. (1981) A note on the estimation of a distribution function and quantiles by a kernel method. *Biometrika*. 68(1). pp. 326–328. DOI: 10.1093/biomet/68.1.326
11. Reiss, R.-D. (1981) Nonparametric estimation of smooth distribution functions. *Scandinavian Journal of Statistics*. 8. pp. 116–119.
12. Falk, M. (1983) Relative efficiency and deficiency of kernel type estimators of smooth distribution functions. *Statist. Neerlandica*. 37. pp. 73–83. DOI: 10.1111/j.1467-9574.1983.tb00802.x
13. Swanepoel, J.W.H. (1988) Mean integrated squared error properties and optimal kernels when estimating a distribution function. *Comm. Statist. Theory Methods*. 17(11). pp. 3785–3799. DOI: 10.1080/03610928808829835
14. Jones, M.C. (1990) The performance of kernel density functions in kernel distribution function estimation. *Statist. Probab. Lett.* 9. pp. 129–132. DOI: 10.1016/0167-7152(92)90006-Q
15. Shirahata, S. & Chu, I.S. (1992) Integrated squared error of kernel-type estimator of distribution function. *Ann. Inst. Statist. Math.* 44(3). pp. 579–591. DOI: 10.1007/BF00050707
16. Sarda, P. (1993) Smoothing parameter selection for smooth distribution functions. *J. Statist. Plann. Inference Inf.* 35. pp. 65–75. DOI: 10.1016/0378-3758(93)90068-H
17. Altman, N. & Leger, C. (1995) Bandwidth selection for kernel distribution function estimation. *J. Statist. Plann. Inference*. 46. pp. 195–214. DOI: 10.1016/0378-3758(94)00102-2
18. Bowman, A., Hall, P. & Prvan, T. (1998) Trust bandwidth selection for the smoothing of distribution functions. *Biometrika*. 85(4). pp. 799–808. DOI: 10.1093/biomet/85.4.799
19. Chu, I.S. (1995) Bootstrap smoothing parameter selection for distribution function estimation. *Math. Japon.* 41(1). pp. 189–197.
20. Shao, Y. & Xiang, X. (1997) Some extensions of the asymptotics of a kernel estimator of a distribution function. *Statist. Probab. Lett.* 34. pp. 301–308. DOI: 10.1016/S0167-7152(96)00194-0

21. Una-Alvarez, J., Gonzalez-Manteiga, W. & Cadarso-Suarez, C. (2000) Kernel distribution function estimation under the Koziol-Green model. *J. Statist. Plann. Inference*. 87. pp. 199–219.
22. Koshkin, G.M. (2014) Smooth estimators of the reliability functions for non-restorable elements. *Russian Physics Journal*. 57(5). pp. 672–681. DOI: 10.1007/s11182-014-0290-y
23. Koshkin, G.M. (2015) Smooth recurrent estimators of the reliability functions. *Russian Physics Journal*. 58(7). pp. 1018–1025. DOI: 10.1007/s11182-015-0603-9
24. Fuks, I. & Koshkin, G. (2015) Smooth recurrent estimation of multivariate reliability function. *Proceedings of the International Conference on Information and Digital Technologies 2015*. IDT 2015. Zilina, Slovakia. July 7–9, 2015. pp. 84–89.
25. Dmitriev, Yu.G. & Koshkin, G.M. (1987) On the use of a priori information in nonparametric regression estimation. *IFAC Proceedings Series*. 2. pp. 223–228. DOI: 10.1016/S1474-6670(17)59798-0
26. Dmitriev, Yu.G. & Koshkin, G.M. (1987) Using additional information in nonparametric estimation of density functionals. *Automation and Remote Control*. 48(10). pp. 1307–1316.
27. Dmitriev, Yu.G. & Tarasenko, P.F. (2014) The use of a priori information in the statistical processing of experimental data. *Russian Physics Journal*. 35(9). pp. 888–893.
28. Dmitriev, Yu.G., Tarasenko, P.F. & Ustinov, Y.K. (2014) On estimation of linear functional by utilizing a prior guess. In: Dudin, A. et al. (eds.) *Communications in Computer and Information Science*. ITMM 2014. Vol. 487. pp. 82–90.
29. Levit, B.Ya. (1975) Conditional estimation of linear functionals. *Problems of Information Transmission*. 19(4). pp. 291–302.
30. Owen, A.B. (1991) Empirical likelihood for linear models. *Ann. Statist.* 19. pp. 1725–1747.
31. Qin, J. & Lawless, J. (1994) Empirical likelihood and general estimating equations. *Ann. Statist.* 22. pp. 300–325. DOI: 10.1214/aos/1176325370
32. Tarima, S. & Pavlov, D. (2006) Using auxiliary information in statistical function estimation. *ESAIM: Probability and Statistics*. 10. pp. 11–23. DOI: 10.1051/ps:2005019
33. Zhang, B. (1995) M-estimation and quantile estimation in the presence of auxiliary information. *Journal of Statistical Planning and Inference*. 44. pp. 77–94. DOI: 10.1016/0378-3758(94)00040-3

Received: August 14, 2018

Gubina O.V., Koshkin G.M. (2019) NONPARAMETRIC ESTIMATION OF ACTUARIAL PRESENT VALUE OF DEFERRED LIFE ANNUITY. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 46. pp. 49–55

DOI: 10.17223/19988605/46/6

Губина О.В., Кошкин Г.М. НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ АКТУАРНОЙ СОВРЕМЕННОЙ СТОИМОСТИ ОТСРОЧЕННОЙ РЕНТЫ. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2019. № 46. С. 49–55

Рассматривается проблема оценивания актуарной современной стоимости отсроченной ренты. Синтезируется непараметрическая оценка отсроченной ренты. Находится главная часть асимптотической среднеквадратической ошибки оценки и ее предельное распределение. Моделирование показывает, что эмпирическая среднеквадратическая ошибка оценки ренты уменьшается с ростом объема выборки.

Ключевые слова: непараметрическое оценивание; отсроченная пожизненная рента; среднеквадратическая ошибка; асимптотическая нормальность.

GUBINA Oxana Viktorovna (Post-graduate student of National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: gov7@mail.ru

KOSHKIN Gennady Mikhailovich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of Theoretical Cybernetics of National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: kgm@mail.tsu.ru

Е.В. Капустин, А.С. Шкуркин

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Исследуется модель управления запасами с простейшим потоком заявок потребителей, случайным размером заявки, пополнением запасов до заданного начального уровня через равные промежутки времени. Выводится интегро-дифференциальное уравнение для функции распределения уровня запасов. В случае экспоненциального распределения величины заявок получено его решение, вычислены средние затраты и оптимальный начальный уровень запасов.

Ключевые слова: стохастическая модель управления запасами; пуассоновский поток; функция затрат; интегро-дифференциальное уравнение; оптимизация системы управления запасами.

Модели управления запасами описывают изменение уровня запасов некоторого продукта. Этот продукт расходуется на удовлетворение спроса, т.е. на выполнение заявок потребителей. Для восполнения запасов продукта производятся поставки. Таким образом, модель управления запасами – это модель резервуара [1]. Существует обширная литература, посвященная детерминированным и стохастическим моделям управления запасами [1–10]. Вместе с тем имеется ряд сложностей при построении стохастических моделей управления запасами. Например, однопериодная модель [11] не является моделью резервуара и, соответственно, далека от классической модели Уилсона [3]. Модели управления запасами в виде системы массового обслуживания [12] или управляемой стохастической динамической системы [13–15] слишком сложны для исследования и тоже далеки от модели Уилсона. Здесь рассматривается стохастическая модель управления запасами, не имеющая этих недостатков.

1. Описание модели

Рассмотрим следующую модель управления запасами [16]:

1. Уровень запасов в начальный момент времени $t = 0$ равен J_0 .
2. Изменение уровня запасов происходит мгновенно.
3. Заявки потребителей образуют простейший поток событий интенсивности λ .
4. Величины заявок независимы и имеют одинаковое распределение с плотностью распределения $f(x)$ и математическим ожиданием a .

5. Пополнение запасов происходит через равные промежутки времени длиной T до уровня J_0 .

Пусть $J(t)$ – уровень запасов продукта в момент времени t (рис. 1). Если $J(t) < 0$, то имеется дефицит продукта. Накопленный дефицит ликвидируется в момент очередного пополнения запасов.

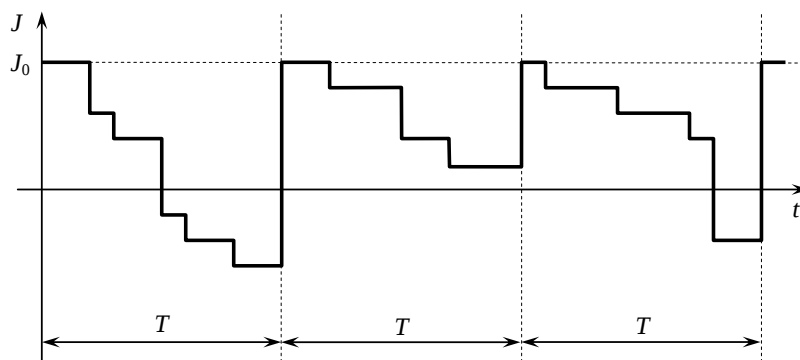


Рис. 1. Уровень запасов в зависимости от времени

Fig. 1. Stock levels based on time

Эффективность управления запасами продукта определяется затратами на его хранение, поставку и штрафами за его отсутствие (дефицит). Предположим, что затраты на хранение единицы продукта в единицу времени равны c_1 , штраф за дефицит единицы продукта в единицу времени равен c_2 , затраты на поставку x единиц продукта составляют $c_3x + c_4$.

Так как поток заявок стационарный и в начале каждого из промежутков $(0, T)$, $(T, 2T)$, $(2T, 3T)$, ... уровень запасов равен J_0 , то затраты достаточно исследовать на промежутке времени $(0, T)$.

Пусть $C(t)$ – затраты на хранение продукта и штрафы за его дефицит на промежутке времени $(0, t)$, $0 < t < T$. Тогда полные затраты на промежутке времени $(0, T)$ с учетом расходов на пополнение запасов равны

$$C_{\text{полн}} = C(T) + c_3(J_0 - J(T)) + c_4.$$

Возьмем в качестве функции затрат математическое ожидание величины $C_{\text{полн}}$:

$$M(C_{\text{полн}}) = M(C(T)) + c_3(J_0 - M(J(T))) + c_4. \quad (1)$$

Функция затрат (1) зависит от J_0 и T . Величину T будем считать фиксированным параметром, величину J_0 будем считать переменной.

Поставим задачу найти значение J_0 , при котором функция затрат $M(C_{\text{полн}})$ принимает наименьшее значение.

2. Математическое ожидание затрат

Теорема 1. Математическое ожидание уровня запасов $M(J(t))$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} M(J(t)) = -\lambda a. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть $0 < t < t + \Delta t < T$, $\Delta J = J(t + \Delta t) - J(t)$. Тогда

$$M(J(t + \Delta t)) = M(J(t)) + M(\Delta J).$$

На отрезке времени $(t, t + \Delta t)$ может произойти три события: «не поступило ни одной заявки», «поступила одна заявка» и «поступило более одной заявки».

Так как поток заявок простейший, то вероятность первого события равна $1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$, вероятность второго равна $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$, вероятность третьего равна $o(\Delta t)$ при $\Delta t \rightarrow 0$.

Если на отрезке времени $(t, t + \Delta t)$ не поступило ни одной заявки, то $\Delta J = 0$, поэтому условное математическое ожидание ΔJ при условии, что не поступило ни одной заявки, равно 0.

Если поступила одна заявка величины X , то $\Delta J = -X$, поэтому условное математическое ожидание ΔJ при условии, что поступила одна заявка, равно $(-a)$.

Условное математическое ожидание величины ΔJ при условии, что поступило более одной заявки, существует и является конечным.

Применяя формулу полной вероятности для математического ожидания, получаем

$$M(J(t + \Delta t)) = M(J(t)) - \lambda a \Delta t + o(\Delta t),$$

или

$$M(J(t + \Delta t)) - M(J(t)) = -\lambda a \Delta t + o(\Delta t).$$

Делим полученное уравнение на Δt и делаем предельный переход при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем уравнение (2). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. В полосе $0 < t < T$, $-\infty < x < \infty$ функция распределения уровня запасов $P(J(t) < x)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} P(J(t) < x) = -\lambda P(J(t) < x) + \lambda \int_0^{+\infty} P(J(t) < v + x) f(v) dv. \quad (3)$$

Доказательство. Рассматривая на отрезке времени $(t, t + \Delta t)$ возможные события (см. выше) и применяя формулу полной вероятности, получаем

$$P(J(t + \Delta t) < x) = (1 - \lambda \Delta t) P(J(t) < x) + \lambda \Delta t P(J(t) - X < x) + o(\Delta t),$$

где X – величина заявки, отсюда

$$\frac{\partial}{\partial t} P(J(t) < x) = -\lambda P(J(t) < x) + \lambda P(J(t) - X < x). \quad (4)$$

Величины $J(t)$ и X независимы, поэтому

$$P(J(t) - X < x) = \iint_{u-v < x} f_{J(t)}(u) f_X(v) du dv = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(v) dv \int_{-\infty}^{v+x} f_{J(t)}(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(v) P(J(t) < v+x) dv.$$

Случайная величина X положительная, поэтому $f_X(v) = f(v) = 0$ при $v < 0$. С учетом этого (4) принимает вид (3). Теорема 2 доказана.

Так как $J(0) = J_0$, то

$$P(J(0) < x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > J_0, \\ 0, & \text{если } x < J_0. \end{cases} \quad (5)$$

Теорема 3. Математическое ожидание затрат на хранение и штрафы $M(C(t))$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} M(C(t)) = c_1 M(J(t)) - (c_1 + c_2) \int_{-\infty}^0 x u(x, t) dx, \quad (6)$$

где $u(x, t)$ – плотность распределения уровня запасов.

Доказательство. Рассматривая на отрезке времени $(t, t + \Delta t)$ возможные события (см. выше), и применяя формулу полной вероятности для математического ожидания, получаем

$$M(C(t + \Delta t)) = M(C(t)) + c_1 P(J(t) > 0) M(J(t) | J(t) > 0) \Delta t - c_2 P(J(t) < 0) M(J(t) | J(t) < 0) \Delta t + o(\Delta t),$$

отсюда

$$\frac{d}{dt} M(C(t)) = c_1 P(J(t) > 0) M(J(t) | J(t) > 0) - c_2 P(J(t) < 0) M(J(t) | J(t) < 0).$$

По формуле полной вероятности для математического ожидания

$$M(J(t)) = P(J(t) > 0) M(J(t) | J(t) > 0) + P(J(t) < 0) M(J(t) | J(t) < 0),$$

поэтому полученное уравнение можно представить в виде:

$$\frac{d}{dt} M(C(t)) = c_1 M(J(t)) - (c_1 + c_2) P(J(t) < 0) M(J(t) | J(t) < 0).$$

Далее,

$$M(J(t) | J(t) < 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dP(J(t) < x | J(t) < 0).$$

Имеем

$$P(J(t) < x | J(t) < 0) = \frac{P(J(t) < x, J(t) < 0)}{P(J(t) < 0)} = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ \frac{P(J(t) < x)}{P(J(t) < 0)}, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

поэтому

$$M(J(t) | J(t) < 0) = \frac{1}{P(J(t) < 0)} \int_{-\infty}^0 x u(x, t) dx.$$

Следовательно, уравнение для $M(C(t))$ принимает вид (6). Теорема 3 доказана.

Для уравнения (2) имеем очевидное начальное условие $M(J(0)) = J_0$, поэтому на отрезке времени $0 < t < T$

$$M(J(t)) = J_0 - \lambda a t. \quad (7)$$

С учетом (7) функция затрат принимает вид:

$$M(C_{\text{полн}}) = M(C(T)) + c_3 \lambda a T + c_4.$$

Это означает, что функция затрат $M(C_{\text{полн}})$ минимальна, если минимально значение $M(C(T))$.

Начальное условие для уравнения (6) имеет вид $M(C(0)) = 0$, с учетом (7) получаем

$$M(C(T)) = \int_0^T \left(c_1 (J_0 - \lambda a t) - (c_1 + c_2) \int_{-\infty}^0 x u(x, t) dx \right) dt. \quad (8)$$

3. Математическое ожидание затрат в случае экспоненциального распределения величины заявок

Теорема 4. Пусть величина заявки имеет экспоненциальное распределение:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} e^{-\frac{x}{a}}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases} \quad (9)$$

Тогда плотность распределения уровня запасов имеет вид:

$$u(x, t) = e^{-\lambda t} \left(\delta(x - J_0) + \frac{1}{a} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)! k!} \left(\frac{J_0 - x}{a} \right)^k \right) e^{-\frac{J_0 - x}{a}} \eta(J_0 - x) \right), \quad (10)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция, $\eta(x)$ – единичная функция,

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Доказательство. Дифференцируя (3) и (5) по переменной x , получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\lambda u(x, t) + \lambda \int_0^{+\infty} u(x + v, t) f(v) dv, \quad (11)$$

$$u(x, 0) = \delta(x - J_0). \quad (12)$$

Применяя преобразование Фурье по переменной x к уравнению (11), получаем

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \lambda(p(\omega) - 1)\hat{u}(\omega, t),$$

где

$$\hat{u}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx, \quad p(\omega) = \int_0^{+\infty} f(v) e^{i\omega v} dv.$$

Пусть $F(x, t)$ – прообраз (обратное преобразование Фурье) функции

$$\hat{F}(\omega, t) = e^{(p(\omega) - 1)\lambda t},$$

то есть

$$F(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(p(\omega) - 1)\lambda t} e^{i\omega x} d\omega.$$

Тогда решение задачи (11)–(12) имеет вид:

$$u(x, t) = \delta(x - J_0) \cdot F(x, t),$$

то есть

$$u(x, t) = F(x - J_0, t).$$

Если величина заявки имеет экспоненциальное распределение (9), то

$$p(\omega) = \frac{1}{1 - ia\omega}, \quad \hat{F}(\omega, t) = e^{-\lambda t} \exp\left(\frac{\lambda t}{1 - ia\omega}\right).$$

Раскладывая экспоненту в ряд, имеем

$$F(x, t) = e^{-\lambda t} \left(\delta(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!} \frac{1}{a} \frac{1}{k!} \left(-\frac{x}{a}\right)^k e^{\frac{x}{a}} \eta(-x) \right),$$

отсюда получаем (10). Теорема 4 доказана.

Подставляя (10) в (8), получаем средние затраты на хранение и штрафы в случае экспоненциального распределения величины заявок:

$$M(C(T)) = c_1 \left(J_0 T - \frac{\lambda a}{2} T^2 \right) - \frac{c_1 + c_2}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{J_0/a}^{+\infty} (J_0 - aw) \frac{w^k}{k!} e^{-w} dw \right) \left(\int_0^{\lambda T} \frac{v^{k+1}}{(k+1)!} e^{-v} dv \right). \quad (13)$$

В общем случае, при любом распределении заявок, найти оценку средних затрат можно методом имитационного моделирования. На рис. 2 представлен график выборочных средних затрат, полученных в результате имитационного моделирования (линия с маркерами), если распределение заявок экспоненциальное со средним $a = 1$, остальные параметры: $\lambda = 2$, $T = 10$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$. Линия без маркеров – график теоретических средних затрат, заданных формулой (13). Видим, что выборочные средние затраты оценивают теоретические очень хорошо, относительная погрешность составляет менее 5%.

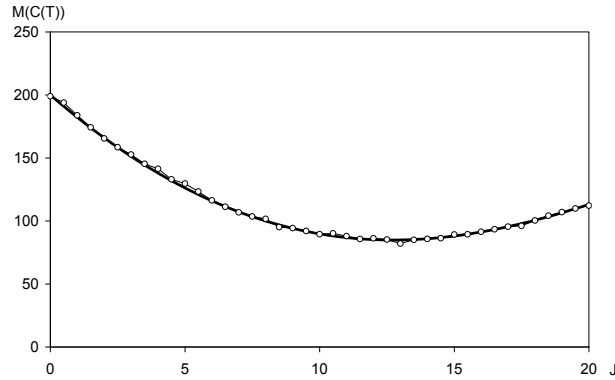


Рис. 2. Средние затраты в зависимости от начального уровня запасов
Fig. 2. Average costs depending on the initial inventory level

Имея оценку средних затрат, можно оценить минимум затрат и оптимальное значение начального уровня запасов.

4. Оптимальный начальный уровень запасов в случае экспоненциального распределения величины заявок

Исследуем монотонность $M(C(T))$ на промежутке $0 \leq J_0 < +\infty$. Имеем

$$\frac{d}{dJ_0} M(C(T)) = c_1 T - \frac{c_1 + c_2}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{J_0/a}^{+\infty} \frac{w^k}{k!} e^{-w} dw \right) \left(\int_0^{\lambda T} \frac{v^{k+1}}{(k+1)!} e^{-v} dv \right). \quad (14)$$

Обозначим $\Phi(J_0)$ правую часть (14). Можно показать, что:

1. $\Phi(J_0)$ возрастает на $[0, +\infty)$;
2. $\Phi(+\infty) = c_1 T > 0$;
3. $\Phi(0) = (c_1 + c_2) \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} - c_2 T$.

Введем обозначение

$$\rho = \frac{c_1 + c_2}{c_2} \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda T}.$$

Если $\rho < 1$, то $\Phi(0) < 0$, поэтому $\Phi(J_0)$ имеет единственный нуль на промежутке $0 \leq J_0 < +\infty$, который можно найти численно. Этот нуль является точкой минимума $M(C(T))$ на данном промежутке.

Если $\rho \geq 1$, то $\Phi(0) \geq 0$, поэтому $\Phi(J_0) > 0$ на всем промежутке $0 \leq J_0 < +\infty$, следовательно, минимум $M(C(T))$ на этом промежутке достигается в точке $J_0 = 0$.

Таким образом, оптимальный начальный уровень запасов в случае экспоненциального распределения величины заявок равен

$$(J_0)_{\text{opt}} = \begin{cases} J_0^*, & \text{если } \rho < 1, \\ 0, & \text{если } \rho \geq 1, \end{cases}$$

где J_0^* – нуль функции $\Phi(J_0)$.

Например, если $a = 1$, $\lambda = 2$, $T = 10$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ (см. выше), то оптимальное значение начального уровня запасов равно 12,7, минимальные затраты равны 84,88.

Заключение

В работе исследуется модель управления запасами с простейшим потоком заявок потребителей, случайным размером заявки, пополнением запасов до заданного начального уровня через равные промежутки времени. Выводится интегро-дифференциальное уравнение для функции распределения уровня запасов. В случае экспоненциального распределения величины заявок получено его решение, вычислены средние затраты и оптимальный начальный уровень запасов.

В общем случае, при любом распределении заявок, провести оптимизацию модели управления запасами можно только приближенными методами, например методом стохастического (имитационного) моделирования. Точные результаты, полученные аналитическими методами, бывают очень полезны при отладке алгоритмов, реализующих эти приближенные методы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прабху А. Методы теории массового обслуживания и управления запасами : пер. с англ. М. : Машиностроение, 1969. 324 с.
2. Черчмен У., Алоф Р., Арноф Л. Введение в исследование операций. М. : Наука, 1966. 488 с.
3. Хедли Дж., Уайтин Т. Анализ систем управления запасами. М. : Наука, 1969. 512 с.
4. Лотоцкий В.А., Мандель А.С. Модели и методы управления запасами. М. : Наука, 1991. 189 с.
5. Рыжиков Ю.И. Теория очередей и управление запасами. СПб. : Питер, 2001. 308 с.
6. Бродецкий Г.Л. Управление запасами. М. : Эксмо, 2008. 352 с.
7. Zipkin P.H. Foundations of inventory management. Boston : McGraw-Hill, 2000. 514 p.
8. Silver E.A. Inventory management and production planning and scheduling. New York : Wiley, 1998. 754 p.
9. Porteus E.L. Foundations of Stochastic Inventory Theory. Stanford, CA : Stanford University Press, 2002. 320 p.
10. Handbook of EOQ Inventory Problems: Stochastic and Deterministic Models and Applications / Ts.-M. Choi (ed.). New York : Springer, 2014. 281 p.
11. Khouja M. The single-period (news-vendor) problem: literature review and suggestions for future research // Omega. 1999. Vol. 27, No. 5. P. 537–553.
12. Krishnamoorthy A., Lakshmy B., Manikandan R. A survey on inventory models with positive service time // OPSEARCH. 2011. Vol. 48 (2). P. 153–169.
13. Мандель А.С., Семенов Д.А. Адаптивные алгоритмы оценки параметров оптимальных стратегий управления запасами при ограниченном дефиците // Автоматика и телемеханика. 2008. № 6. С. 117–128.
14. Åxsäter S. Inventory Control. Cham : Springer, 2015. 268 p.
15. Rossi R., Prestwich S., Armagan T.S., Hnich, B. Replenishment planning for stochastic inventory systems with shortage cost // Integration of AI and OR Techniques in Constraint Programming for Combinatorial Optimization Problems : 4th International Conference, CPAIOR 2007, Brussels, Belgium, May 23–26, 2007 : Proceedings / ed. P. Van Hentenryck; L. Wolsey. LNCS Springer-Verlag GmbH, 2007. Vol. 4510. P. 229–243.
16. Капустин Е.В., Мухаметсафина Ю.В. Модель управления запасами со случайным потоком заявок от потребителей // Научное творчество молодежи. Математика. Информатика : материалы XX Всерос. науч.-практ. конф. (28–29 апреля 2016 г.). Томск : Изд-во Том. ун-та, 2016. Ч. 1. С. 70–74.

Поступила в редакцию 12 марта 2018 г.

Kapustin E.V., Shkurkin A.S. (2019) OPTIMIZATION OF THE PARAMETERS OF THE STOCHASTIC MODEL OF INVENTORY CONTROL. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 46. pp. 56–63

DOI: 10.17223/19988605/46/7

The following model of inventory control is considered:

1. The level of the stock of the product at the initial moment $t = 0$ is equal to J_0 .
2. Change in the level of stocks occurs instantly.
3. Customer requests form a simple events flow of intensity λ .
4. The values of the applications are independent and have the same distribution with the probability density $f(x)$ and mathematical expectation a .

5. Replenishment of stocks occurs at regular intervals of the length T up to the level J_0 .

It is assumed that the cost of storing a unit of product per unit of time is equal to c_1 , the penalty for the deficit of a unit of product per unit of time is equal to c_2 , the cost of supplying of x units of the product is $c_3x + c_4$.

The costs in this model are sufficient to investigate over a period of time $(0, T)$. Let $C(t)$ be the cost of storing the product and the penalties for its deficit at a time interval $(0, t)$, $0 < t < T$. Then the total cost of the time period $(0, T)$, taking into account the cost of replenishment, is equal to

$$C_{\text{full}} = C(T) + c_3(J_0 - J(T)) + c_4.$$

The mathematical expectation of a quantity C_{full} is considered as a cost function. It is required to find the value J_0 at which the cost function takes the smallest value.

It is not difficult to show that the mathematical expectation of the stock level on a time interval $(0, t)$, $0 < t < T$ has the form

$$M(J(t)) = J_0 - \lambda at,$$

so the cost function takes the form

$$M(C_{\text{full}}) = M(C(T)) + c_3\lambda aT + c_4.$$

This means that the cost function is minimal if the value $M(C(T))$ is minimal.

It is shown that the probability distribution function of the stock level $P(J(t) < x)$ satisfies the integro-differential equation

$$\frac{\partial}{\partial t} P(J(t) < x) = -\lambda P(J(t) < x) + \lambda \int_0^{+\infty} P(J(t) < v + x) f(v) dv$$

in the band $0 < t < T$, $-\infty < x < \infty$, and the initial condition

$$P(J(0) < x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > J_0, \\ 0, & \text{если } x < J_0. \end{cases}$$

The mathematical expectation of storage costs and penalties on a time interval $(0, T)$ is obtained

$$M(C(T)) = \int_0^T \left(c_1(J_0 - \lambda at) - (c_1 + c_2) \int_{-\infty}^0 xu(x, t) dx \right) dt,$$

where $u(x, t)$ is the distribution density of the stock level.

In the case of the exponential distribution of the quantity of requests, the density distribution of the inventory level is obtained, and hence the average cost, the minimum average cost and the optimal value of the initial inventory level J_0 .

Keywords: stochastic model of inventory control; Poisson process; cost function; integro-differential equation; optimization of the inventory control system.

KAPUSTIN Evgeny Viktorovich (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Russian Federation).

E-mail: kapustin_ev@mail.ru

SHKURKIN Alexey Sergeevich (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, National Research Tomsk State University, Russian Federation).

E-mail: shkurkin@mail.ru

REFERENCES

1. Prabhu, A. (1969) *Metody teorii massovogo obsluzhivaniya i upravleniya zapasami* [Queues and Inventories: A Study of Their Basic Stochastic Processes]. Translated from English by E. Kovalenko. Moscow: Mashinostroenie.
2. Cherkmen, U., Alof, R. & Arnof, L. (1966) *Vvedenie v issledovanie operatsiy* [Introduction to the study of operations]. Translated from English. Moscow: Nauka.
3. Headley, J. & Whitin, T. (1969) *Analiz sistem upravleniya zapasami* [Analysis of inventory systems]. Translated from English by M.A. Kasner et al. Moscow: Nauka.
4. Lototsky, V.A. & Mandel, A.S. (1991) *Modeli i metody upravleniya zapasami* [Models and methods of inventory management]. Moscow: Nauka.
5. Ryzhikov, Yu.I. (2001) *Teoriya ocheredey i upravlenie zapasami* [Queueing theory and inventory management]. St. Petersburg: Piter.
6. Brodetsky, G.L. (2008) *Upravlenie zapasami* [Inventory Management]. Moscow: Eksmo.
7. Zipkin, P.H. (2000) *Foundations of inventory management*. Boston: McGraw-Hill.
8. Silver, E.A. (1998) *Inventory management and production planning and scheduling*. New York: Wiley.
9. Porteus, E.L. (2002) *Foundations of Stochastic Inventory Theory*. Stanford, CA: Stanford University Press.
10. Choi, Ts.-M. (2014) *Handbook of EOQ Inventory Problems: Stochastic and Deterministic Models and Applications*. New York: Springer.
11. Khouja, M. (1999) The single-period (news-vendor) problem: literature review and suggestions for future research. *Omega*. 27(5). pp. 537–553. DOI: 10.1016/S0305-0483(99)00017-1

12. Krishnamoorthy, A., Lakshmy, B. & Manikandan, R. (2011) A survey on inventory models with positive service time. *OPSEARCH*. 48(2). pp. 153–169. DOI: 10.1007/s12597-010-0032-z
13. Mandel, A.S. & Semenov, D.A. (2008) Adaptive algorithms for estimating the parameters of optimal strategies for managing inventories with a limited deficit. *Automation and Remote Control*. 6. pp.117–128.
14. Axsäter, S. (2015) *Inventory Control*. Cham: Springer.
15. Rossi, R., Prestwich, S., Armagan, T.S. & Hnich, B. (2007) Replenishment planning for stochastic inventory systems with shortage cost. *Integration of AI and OR Techniques in Constraint Programming for Combinatorial Optimization Problems*. 4th International Conference, CPAIOR 2007. Brussels, Belgium, May 23–26, 2007. Vol. 4510 LNCS Springer-Verlag GmbH. pp. 229–243.
16. Kapustin, E.V. & Mukhametsafina, Yu.V. (2016) [Model of inventory management with a random flow of applications from consumers]. *Scientific creativity of youth. Mathematics. Informatics*. Proc. of the 20th All-Russian Conference. April 28–29, 2016. Tomsk: Tomsk State University. pp. 70–74. (In Russian).

В.А. Наумов, К.Е. Самуйлов

УСЛОВИЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОСТИ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ МАРКОВСКИХ РЕСУРСНЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОТЕРЯМИ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 2.882.2017/4.6).

Рассматриваются марковские ресурсные системы массового обслуживания с потерями. Получены необходимые и достаточные условия мультипликативности стационарного распределения состояния системы и объемов занятых заявками ресурсов.

Ключевые слова: ресурсные системы массового обслуживания; марковский процесс; мультипликативность стационарного распределения; марковский поступающий поток.

В классических системах массового обслуживания (СМО) приборы и места ожидания играют роль ресурсов, необходимых для обслуживания заявок. В ресурсных СМО (РСМО) кроме приборов и мест ожидания заявкам могут потребоваться некоторые дополнительные ресурсы. Это может быть некоторый случайный объем ресурса, занимаемый на время ожидания начала обслуживания, либо на время обслуживания, либо на все время пребывания заявки в системе. Объемы доступных заявкам ресурсов обычно ограничены, и в РСМО с потерями поступившая заявка теряется, если у системы недостаточно свободных ресурсов. Такая модель хорошо подходит для анализа различных технических систем, и к настоящему времени опубликовано большое количество работ, анализирующих РСМО (см. обзоры [1, 2]). В подавляющем большинстве опубликованных случаев стационарное распределение процесса, описывающего состояние системы и объемы занятых заявками ресурсов, обладает свойством мультипликативности. Возникает естественный вопрос выяснения условий, при которых мультипликативность стационарного распределения имеет место.

В настоящей работе рассматривается марковская модель РСМО с потерями, являющаяся частным случаем общей модели [3], и анализируются условия мультипликативности стационарного распределения описывающего ее случайного процесса. В следующем разделе описывается поведение общей РСМО с потерями. В разделе 2 рассматривается марковская модель СМО с неограниченными ресурсами, а в разделе 3 – марковская модель СМО с ограниченными ресурсами. В разделе 4 получены условия мультипликативности стационарного распределения состояния системы и занятых заявками ресурсов. В качестве примера в разделе 5 исследуется стационарное распределение РСМО MAP/M/L/0 с марковским поступающим потоком и экспоненциально распределенной длительностью обслуживания.

Жирные строчные буквы обозначают векторы, а жирные прописные буквы – матрицы. Запись $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ означает, что $x_m \leq y_m$ для всех m , и $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ означает, что по крайней мере для одной компоненты m выполняется строгое неравенство $x_m > y_m$. Для вектора, каждая m -я компонента которого является минимумом из чисел x_m и y_m , принято обозначение $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$. $\mathbb{R}_+$ обозначает множество неотрицательных действительных чисел.

1. Описание ресурсной СМО

Рассмотрим СМО, которую можно описать некоторым случайным процессом $X(t)$ с пространством состояний $\mathcal{X}$, траектории которого непрерывны справа и имеют пределы слева. Будем считать,

что процесс $X(t)$ достаточно детально описывает систему и для любого ее состояния $i \in \mathcal{X}$ всегда можно определить число заявок, находящихся в системе, которое обозначим $\theta(i)$. Емкость СМО обозначим L , так что число заявок в системе никогда не превосходит L . Предположим также, что система открыта, т.е. в нее поступают и из нее уходят заявки, причем поодиночке, а не группами. Обозначим $0 < a_1 < a_2 < \dots$ моменты поступления заявок и $0 < d_1 < d_2 < \dots$ моменты ухода заявок из системы.

Пусть система располагает ограниченным объемом неделимых ресурсов M типов. Обозначим через ρ_m общий объем ресурса типа m , $\mathbf{p} = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_M)$, и через $\mathbf{r}_n = (r_{n,1}, r_{n,2}, \dots, r_{n,M})$ – вектор объемов ресурсов, необходимых n -й заявке. Все находящиеся в системе заявки перенумерованы. Если система примет поступившую в момент a_n заявку, то ей будет присвоен некоторый номер φ_n из интервала $1 \leq \varphi_n \leq k+1$, где $k = \theta(X(a_n - 0))$ – число заявок в системе. Номера заявок, имевших до этого номера $\varphi_n, \varphi_n + 1, \dots, k$, будут увеличены на единицу. В момент d_n ухода заявки из системы ее покинет заявка с некоторым номером ψ_n из интервала $1 \leq \psi_n \leq k$, $k = \theta(X(d_n - 0))$, и номера заявок, имевших до этого номера $\psi_n + 1, \psi_n + 2, \dots, k$, будут уменьшены на единицу. Например, при дисциплине обслуживания First In First Out номера поступивших и обслуженных заявок определяются равенствами $\varphi_n = \theta(X(a_n - 0)) + 1$ и $\psi_n = 1$, а для дисциплины обслуживания Last In First Out имеем $\varphi_n = \theta(X(a_n - 0)) + 1$ и $\psi_n = \theta(X(d_n - 0))$.

Информация о ресурсах, занятых в момент t , хранится в виде списка $\mathbf{s}(t) = (\mathbf{s}_1(t), \mathbf{s}_2(t), \dots, \mathbf{s}_k(t))$ длины $k = \theta(X(t))$ из векторов $\mathbf{s}_i(t) \in \mathbb{R}_+^M$ объемов ресурсов, занимаемых заявкой с номером i . При этом будем писать: $\mathbf{s}(t) = \emptyset$, если $\theta(X(t)) = 0$. Список занятых ресурсов может изменяться только при поступлении и уходе заявок. Пусть перед поступлением некоторой заявки список занятых ресурсов имел вид: $\mathbf{s}(a_n - 0) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k)$. Если $k < L$ и $\mathbf{r}_n + \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_k \leq \mathbf{r}$, то заявка принимается, ей присваивается некоторый номер φ_n и в список вставляется вектор ресурсов, выделенных этой заявке: $\mathbf{s}(a_n) = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\varphi_n-1}, \mathbf{r}_n, \mathbf{x}_{\varphi_n}, \dots, \mathbf{x}_k)$. В противном случае заявка теряется и список занятых ресурсов остается неизменным. Если перед уходом заявки с номером ψ_n список занятых ресурсов имел вид $\mathbf{s}(d_n - 0) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k)$, то после ее ухода из списка удаляется вектор занимаемых ею ресурсов, и он становится таким: $\mathbf{s}(d_n) = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\psi_n-1}, \mathbf{x}_{\psi_n+1}, \dots, \mathbf{x}_k)$.

Моменты поступления заявок a_n и моменты их ухода d_n зависят от различных случайных внешних и внутренних факторов, определяющих динамику изменения состояний СМО. Мы будем считать, что описывающий систему процесс является марковским, а моменты поступлений и ухода заявок образуют марковские потоки вызовов [4]. Используемые здесь принципы построения марковских моделей СМО восходят к монографии [5]. Для того чтобы сформулировать условия мультипликативности стационарного распределения процесса, описывающего РСМО, мы рассмотрим сначала систему, объемы ресурсов которой неограничены и нехватка которых не может оказать влияния на поведение системы.

2. Случай неограниченных ресурсов

Рассмотрим систему с неограниченным объемом ресурсов. Предположим, что описывающий систему процесс $X(t)$ является однородным марковским процессом с конечным числом состояний. Разобьем множество его состояний $\mathcal{X}$ на непересекающиеся подмножества $\mathcal{X}_k = \{i \in \mathcal{X} | \theta(i) = k\}$, $k = 0, 1, \dots, L$, и обозначим l_k число элементов подмножества $\mathcal{X}_k$. Поскольку заявки поступают в систему и уходят из нее поодиночке, возможны переходы процесса $X(t)$ только между состояниями, либо принадлежащими какому-то одному подмножеству состояний $\mathcal{X}_k$, либо принадлежащими соседним

подмножествам. Переход из $\mathcal{X}_k$ в $\mathcal{X}_{k+1}$ происходит в момент поступления заявки, а переход из $\mathcal{X}_k$ в $\mathcal{X}_{k-1}$ – в момент ухода заявки из системы. Это означает, что матрица интенсивностей переходов $\mathbf{Q}$ процесса $X(t)$ является блочной трехдиагональной:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0 & \mathbf{A}_0 & & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \mathbf{A}_{L-1} \\ \mathbf{0} & & \mathbf{B}_L & \mathbf{C}_L \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Блоки этой матрицы $\mathbf{A}_k = [a(i, j)]$, $i \in \mathcal{X}_k$, $j \in \mathcal{X}_{k+1}$, имеют размер $l_k \times l_{k+1}$ и образованы интенсивностями изменений состояний системы при поступлении заявок, блоки $\mathbf{B}_k = [b(i, j)]$, $i \in \mathcal{X}_k$, $j \in \mathcal{X}_{k-1}$, размера $l_k \times l_{k-1}$ образованы интенсивностями изменений состояний системы в моменты ухода заявок, внедиагональные элементы блоков $\mathbf{C}_k = [c(i, j)]$, $i, j \in \mathcal{X}_k$, размера $l_k \times l_k$ образованы интенсивностями изменений состояний системы, не связанными с поступлением или уходом заявок, а диагональные элементы матриц $\mathbf{C}_k$ даются равенствами $c(i, i) = -(a(i, i) + b(i, i) + c(i, i))$, $i \in \mathcal{X}_k$, где

$$a(i) = \begin{cases} \sum_{j \in \mathcal{X}_{k+1}} a(i, j), & k < L, \\ 0, & k = L, \end{cases}, \quad b(i) = \begin{cases} \sum_{j \in \mathcal{X}_{k-1}} b(i, j), & k > 0, \\ 0, & k = 0, \end{cases}, \quad c(i) = \sum_{\substack{j \in \mathcal{X}_k \\ j \neq i}} c(i, j). \quad (2)$$

Заметим, что интенсивности переходов $a(i, j)$ и $b(i, j)$ можно выразить через переходные вероятности

$$a(i, j) = a(i) \alpha(i, j), \quad \theta(j) = \theta(i) + 1, \quad b(i, j) = b(i) \beta(i, j), \quad \theta(j) = \theta(i) - 1, \quad (3)$$

где $\alpha(i, j)$ – вероятность того, что при поступлении заявки система перейдет из состояния i в состояние j , а $\beta(i, j)$ – вероятность того, что при уходе заявки система перейдет из состояния i в состояние j .

Будем считать, что все состояния процесса $X(t)$ сообщаются. Тогда матрица $\mathbf{Q}$ неразложима, и стационарное распределение $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_L)$ процесса $X(t)$ является единственным решением системы линейных уравнений

$$\mathbf{q}_0 \mathbf{C}_0 + \mathbf{q}_1 \mathbf{B}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}_{k-1} \mathbf{A}_{k-1} + \mathbf{q}_k \mathbf{C}_k + \mathbf{q}_{k+1} \mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{0}, \quad 1 \leq k \leq L-1, \quad \mathbf{q}_{L-1} \mathbf{A}_{L-1} + \mathbf{q}_L \mathbf{C}_L = \mathbf{0}, \quad (4)$$

удовлетворяющим нормировочному условию

$$\sum_{k=0}^L \mathbf{q}_k \mathbf{u}_k = 1. \quad (5)$$

Здесь $\mathbf{q}_k = (q(i)), i \in \mathcal{X}_k$, – векторы-строки стационарных вероятностей процесса $X(t)$, а $\mathbf{u}_k$ – векторы-столбцы длины l_k из единиц.

Кроме изменений состояний, описанных в этом разделе, состояния РСМО с ограниченными ресурсами могут также изменяться при потере заявки из-за нехватки ресурсов. При этом система остается в том же подмножестве состояний $\mathcal{X}_k$, в котором она была перед поступлением потерянной заявки. В следующем разделе мы рассмотрим такие системы более подробно.

3. Марковская модель ресурсной СМО

Рассмотрим теперь РСМО с ограниченными ресурсами. Обозначим через $\mathcal{S}_k = \{(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) \mid \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}_+^M, \mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_k \leq \mathbf{p}\}$ множество списков ресурсов, занятых k заявками, и через $\mathcal{Y} = \{(i, \mathbf{x}) \mid i \in \mathcal{X}, \mathbf{x} \in \mathcal{S}_{\theta(i)}\}$ – пространство состояний процесса $Y(t) = (X(t), \mathbf{s}(t))$. Предположим, что векторы запросов ресурсов $\mathbf{r}_n$, $n = 1, 2, \dots$ независимы в совокупности и одинаково распределены с функцией распределения $F(\mathbf{x})$, процесс $Y(t)$ является однородным марковским процессом, и рассмотрим переходные вероятности этого процесса:

$$P_{0,0}(t, i, j) = P\{X(t) = j, \mathbf{s}(t) = \emptyset \mid X(0) = i, \mathbf{s}(0) = \emptyset\}, \quad i, j \in \mathcal{X}_0;$$

$$P_{0,n}(t, i, j, \mathbf{w}) = P\{X(t) = j, \mathbf{s}(t) \leq \mathbf{w} \mid X(0) = i, \mathbf{s}(0) = \emptyset\}, \quad i \in \mathcal{X}_0, \quad j \in \mathcal{X}_n, \quad \mathbf{w} \in \mathcal{S}_n, \quad 1 \leq n \leq L;$$

$$P_{k,0}(t, i, j, \mathbf{v}) = P\{X(t) = j, \mathbf{s}(t) = \emptyset \mid X(0) = i, \mathbf{s}(0) = \mathbf{v}\}, \quad i \in \mathcal{X}_k, \quad j \in \mathcal{X}_0, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{S}_k, \quad 1 \leq k \leq L;$$

$$P_{k,n}(t, i, j, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = P\{X(t) = j, \mathbf{s}(t) \leq \mathbf{w} \mid X(0) = i, \mathbf{s}(0) = \mathbf{v}\}, \quad j \in \mathcal{X}_k, \quad j \in \mathcal{X}_n, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{S}_k, \quad \mathbf{w} \in \mathcal{S}_n, \quad 1 \leq k, n \leq L.$$

Процесс $Y(t)$ является скачкообразным марковским процессом [6]. Поскольку переходы процесса $X(t)$ возможны только либо внутри какого-то одного подмножества состояний $\mathcal{X}_k$, либо между соседним подмножествами, только следующие интенсивности переходов процесса $Y(t)$ отличны от нуля:

$$\gamma_0(i, j) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (P_{0,0}(\varepsilon, i, j) - \delta_{i,j}), \quad i, j \in \mathcal{X}_0; \quad (6)$$

$$\gamma_k(i, j, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (P_{k,k}(\varepsilon, i, j, \mathbf{v}, \mathbf{w}) - \delta_{i,j} H(\mathbf{w} - \mathbf{v})), \quad i, j \in \mathcal{X}_k, \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{S}_k, \quad 1 \leq k \leq L; \quad (7)$$

$$\lambda_0(i, j, \mathbf{w}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} P_{0,1}(\varepsilon, i, j, \mathbf{w}), \quad i \in \mathcal{X}_0, \quad j \in \mathcal{X}_1, \quad \mathbf{w} \in \mathcal{S}_1; \quad (8)$$

$$\lambda_k(i, j, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} P_{k,k+1}(\varepsilon, i, j, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad i \in \mathcal{X}_k, \quad j \in \mathcal{X}_{k+1}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{S}_k, \quad \mathbf{w} \in \mathcal{S}_{k+1}, \quad 1 \leq k < L; \quad (9)$$

$$\mu_1(i, j, \mathbf{v}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} P_{1,0}(\varepsilon, i, j, \mathbf{v}), \quad i \in \mathcal{X}_1, \quad j \in \mathcal{X}_0, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{S}_1; \quad (10)$$

$$\mu_k(i, j, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} P_{k,k-1}(\varepsilon, i, j, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad i \in \mathcal{X}_k, \quad j \in \mathcal{X}_{k-1}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{S}_k, \quad \mathbf{w} \in \mathcal{S}_{k-1}, \quad 1 < k \leq L, \quad (11)$$

где $\delta_{i,j} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{i,j} = 0$, если $i \neq j$, $H(\mathbf{x}) = 1$, если $\mathbf{0} \leq \mathbf{x}$, и $H(\mathbf{x}) = 0$, если $\mathbf{0} \succ \mathbf{x}$.

Обозначим через $a_\varphi(i, j)$ интенсивность переходов процесса $X(t)$ из $i \in \mathcal{X}$ в $j \in \mathcal{X}$, $\theta(j) = \theta(i) + 1$, при которых поступившая заявка получает номер φ , и через $b_\psi(i, j)$ – интенсивность переходов из i в j , $\theta(j) = \theta(i) - 1$, сопровождающихся уходом из системы заявок с номером ψ . Эти интенсивности связаны с интенсивностями поступлений заявок $a(i, j)$ и интенсивностями ухода заявок $b(i, j)$ в матрице (1) следующими равенствами:

$$a(i, j) = \sum_{\varphi=1}^{\theta(j)} a_\varphi(i, j), \quad b(i, j) = \sum_{\psi=1}^{\theta(i)} b_\psi(i, j).$$

Кроме того, обозначим через $\gamma(i, j)$ условную вероятность того, что в момент поступления заявки система перейдет из состояния i в состояние j при условии, что поступившая заявка потеряна из-за нехватки ресурсов, и введем матрицы $\Pi_k = [\pi(i, j)]$, $i, j \in \mathcal{X}_k$, размера $l_k \times l_k$, $0 \leq k < L$, где $\pi(i, j) = a(i)\gamma(i, j)$.

Систему уравнений равновесия для стационарного распределение вероятностей процесса $Y(t)$ можно записать в следующем виде:

$$\sum_{i \in \mathcal{X}_0} P(i) \gamma_0(i, j) + \sum_{i \in \mathcal{X}_1} P(i, \mathbf{p}) \mu_1(i, j) = 0, \quad j \in \mathcal{X}_0; \quad (12)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{X}_0} P(i) \lambda_0(i, j, \mathbf{w}) + \sum_{i \in \mathcal{X}_1} \int_{\mathcal{S}_1} P(i, d\mathbf{v}) \gamma_1(i, j, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \sum_{i \in \mathcal{X}_2} \int_{\mathcal{S}_2} P(i, d\mathbf{v}) \mu_1(i, j, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0, \quad j \in \mathcal{X}_1, \quad \mathbf{w} \in \mathcal{S}_1; \quad (13)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{X}_{k-1}} \int_{\mathcal{S}_{k-1}} P(i, d\mathbf{v}) \lambda_{k-1}(i, j, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \sum_{i \in \mathcal{X}_k} \int_{\mathcal{S}_k} P(i, d\mathbf{v}) \gamma_k(i, j, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \sum_{i \in \mathcal{X}_{k+1}} \int_{\mathcal{S}_{k+1}} P(i, d\mathbf{v}) \mu_{k+1}(i, j, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0, \quad (14)$$

$$j \in \mathcal{X}_k, \quad \mathbf{w} \in \mathcal{S}_k, \quad 1 < k \leq L;$$

$$\sum_{i \in \mathcal{X}_{L-1}} \int_{\mathcal{S}_{L-1}} P(i, d\mathbf{v}) \lambda_{L-1}(i, j, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \sum_{i \in \mathcal{X}_L} \int_{\mathcal{S}_L} P(i, d\mathbf{v}) \gamma_L(i, j, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0, \quad j \in \mathcal{X}_L, \quad \mathbf{w} \in \mathcal{S}_L, \quad (15)$$

где интенсивности переходов процесса $Y(t)$ задаются следующими формулами:

$$\gamma_0(i, j) = c(i, j) + \pi(i, j)(1 - F(\mathbf{p})), \quad i, j \in \mathcal{X}_0;$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_k(i, j, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= H(\mathbf{w} - \mathbf{v})(c(i, j) + \pi(i, j)(1 - F(\mathbf{p} - \sum_{n=1}^k \mathbf{v}_n))), \quad i, j \in \mathcal{X}_k, \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{S}_k, \quad 0 < k < L; \\
 \gamma_L(i, j, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= H(\mathbf{w} - \mathbf{v})c(i, j), \quad i, j \in \mathcal{X}_L, \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{S}_L; \quad \lambda_0(i, j, \mathbf{w}) = a_1(i, j)F(\mathbf{w}), \quad i \in \mathcal{X}_0, \quad j \in \mathcal{X}_1, \quad \mathbf{w} \in \mathcal{S}_1; \\
 \lambda_k(i, j, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \sum_{\varphi=1}^{k+1} a_{\varphi}(i, j)F(\mathbf{w}_{\varphi} \wedge (\mathbf{p} - \sum_{n=1}^k \mathbf{v}_n)) \left(\prod_{n=1}^{\varphi-1} H(\mathbf{w}_n - \mathbf{v}_n) \right) \left(\prod_{n=\varphi+1}^{k+1} H(\mathbf{w}_n - \mathbf{v}_{n-1}) \right), \\
 i &\in \mathcal{X}_k, \quad j \in \mathcal{X}_{k+1}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{S}_k, \quad \mathbf{w} \in \mathcal{S}_{k+1}, \quad 0 < k < L; \quad \mu_1(i, j, \mathbf{v}) = b_1(i, j), \quad i \in \mathcal{X}_1, \quad j \in \mathcal{X}_0, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{S}_1; \\
 \mu_k(i, j, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \sum_{\psi=1}^k b_{\psi}(i, j) \left(\prod_{n=1}^{\psi-1} H(\mathbf{w}_n - \mathbf{v}_n) \right) \left(\prod_{n=\psi}^{k-1} H(\mathbf{w}_n - \mathbf{v}_{n+1}) \right), \quad i \in \mathcal{X}_k, \quad j \in \mathcal{X}_{k-1}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{S}_k, \quad \mathbf{w} \in \mathcal{S}_{k-1}, \quad 1 < k \leq L.
 \end{aligned}$$

4. Мультипликативность стационарного распределения

Нас будут интересовать условия, при которых стационарное совместное распределение состояний марковской РСМО и объемов, занимаемых заявками ресурсов

$$P(i) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) = i\}, \quad i \in \mathcal{X}_0, \quad P(i, \mathbf{v}) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) = i, \mathbf{s}(t) \leq \mathbf{v}\}, \quad i \in \mathcal{X}_k, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{S}_k, \quad 0 < k \leq L, \quad (16)$$

обладает свойством мультипликативности:

$$P(i) = cq(i), \quad i \in \mathcal{X}_0, \quad P(i, (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)) = cq(i)F(\mathbf{v}_1) \cdots F(\mathbf{v}_k), \quad i \in \mathcal{X}_k, \quad (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \in \mathcal{S}_k, \quad 0 < k \leq L. \quad (17)$$

Здесь $q(i)$, $i \in \mathcal{X}$, – стационарные вероятности состояний системы с неограниченными ресурсами, являющиеся решением системы уравнений (7)–(9), c – нормировочная константа,

$$c^{-1} = \mathbf{q}_0 \mathbf{u}_0 + \sum_{k=1}^L \mathbf{q}_k \mathbf{u}_k F^{*k}(\mathbf{p}), \quad (18)$$

$F^{*k}(\mathbf{x})$ есть k -кратная свертка функции распределения $F(\mathbf{x})$. Если стационарное распределение вероятностей процесса $Y(t)$ обладает свойством мультипликативности (17), то его можно легко найти, зная лишь стационарное распределение $q(i)$, $i \in \mathcal{X}$, процесса $X(t)$ и функцию распределения объемов требуемых заявок ресурсов $F(\mathbf{x})$. В следующей теореме даются условия мультипликативности стационарного распределения процесса $Y(t)$.

Теорема. Для того чтобы стационарное совместное распределение состояний марковской РСМО и объемов занимаемых заявками ресурсов (16) имело вид (17), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий $F(\mathbf{p}) = 1$ или $\mathbf{q}_0 \mathbf{\Pi}_0 = \mathbf{q}_1 \mathbf{B}_1$ и, кроме того, чтобы для всех $k = 1, 2, \dots, L-1$ выполнялись либо равенства

$$\int_{\substack{0 \leq \mathbf{v}_i \leq \mathbf{w}_i, \\ i=1, \dots, k}} F(\mathbf{p} - \sum_{l=1}^k \mathbf{v}_l) F(d\mathbf{v}_1) \dots F(d\mathbf{v}_k) = F(\mathbf{w}_1) \cdots F(\mathbf{w}_k), \quad (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k) \in \mathcal{S}_k, \quad (19)$$

либо равенство $\mathbf{q}_k \mathbf{\Pi}_k = \mathbf{q}_{k+1} \mathbf{B}_{k+1}$.

Доказательство. Введем матрицы $\mathbf{A}_{k,\varphi} = [a_{\varphi}(i, j)]$, $i \in \mathcal{X}_k$, $j \in \mathcal{X}_{k+1}$, $\varphi = 1, 2, \dots, k+1$, и $\mathbf{B}_{k,\psi} = [b_{\psi}(i, j)]$, $i \in \mathcal{X}_k$, $j \in \mathcal{X}_{k-1}$, $\psi = 1, 2, \dots, k$, а также векторы-строки стационарных вероятностей $\mathbf{p}_0 = (P(i))$, $i \in \mathcal{X}_0$, $\mathbf{p}_k(\mathbf{v}) = (P(i, \mathbf{v}))$, $i \in \mathcal{X}_k$, $\mathbf{v} \in \mathcal{S}_k$, $0 < k \leq L$, и запишем систему уравнений равновесия (12)–(15) в матричном виде:

$$\mathbf{p}_0 \mathbf{C}_0 + (1 - F(\mathbf{p})) \mathbf{p}_0 \mathbf{\Pi}_0 + \mathbf{p}_1(\mathbf{p}) \mathbf{B}_1 = \mathbf{0}; \quad (20)$$

$$F(\mathbf{w}) \mathbf{p}_0 \mathbf{A}_0 + \mathbf{p}_1(\mathbf{w}) \mathbf{C}_1 + \int_{0 \leq \mathbf{v} \leq \mathbf{w}} (1 - F(\mathbf{p} - \mathbf{v})) \mathbf{p}_1(d\mathbf{v}) \mathbf{\Pi}_1 + \quad (21)$$

$$+ \int_{0 \leq \mathbf{v} \leq \mathbf{w}} \mathbf{p}_2(d\mathbf{v}, \mathbf{p} - \mathbf{v}) \mathbf{B}_{2,2} + \int_{0 \leq \mathbf{v} \leq \mathbf{w}} \mathbf{p}_2(\mathbf{p} - \mathbf{v}, d\mathbf{v}) \mathbf{B}_{2,1} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{w} \in \mathcal{S}_1;$$

$$\sum_{\varphi=1}^k F(\mathbf{w}_{\varphi}) \mathbf{p}_{k-1}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{\varphi-1}, \mathbf{w}_{\varphi+1}, \dots, \mathbf{w}_k) \mathbf{A}_{k-1,\varphi} + \mathbf{p}_k(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k) \mathbf{C}_k + \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\substack{0 \leq \mathbf{v}_i \leq \mathbf{w}_i, \\ i=1, \dots, k}} (1 - F(\mathbf{p} - \mathbf{v}_1 - \dots - \mathbf{v}_k)) \mathbf{p}_k(d\mathbf{v}_1, \dots, d\mathbf{v}_k) \mathbf{\Pi}_k + \\
 & + \sum_{\psi=1}^{k+1} \int_{\substack{0 \leq \mathbf{v}_i \leq \mathbf{w}_i, \\ i=1, \dots, k}} \mathbf{p}_{k+1}(d\mathbf{v}_1, \dots, d\mathbf{v}_{\psi-1}, \mathbf{p} - \sum_{l=1}^k \mathbf{v}_l, d\mathbf{v}_{\psi}, \dots, d\mathbf{v}_k) \mathbf{B}_{k+1, \psi} = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k) \in \mathcal{S}_k, \quad 1 < k < L; \\
 & \sum_{\varphi=1}^L F(\mathbf{w}_{\varphi}) \mathbf{p}_{L-1}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{\varphi-1}, \mathbf{w}_{\varphi+1}, \dots, \mathbf{w}_L) \mathbf{A}_{L-1, \varphi} + \mathbf{p}_L(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_L) \mathbf{C}_L = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_L) \in \mathcal{S}_L. \quad (23)
 \end{aligned}$$

Подставив вероятности (17) в равенства (20)–(23) и воспользовавшись уравнениями (4), исключим из полученных выражений векторы $\mathbf{q}_k \mathbf{C}_k$. В результате после некоторых элементарных преобразований получим, что для мультипликативности стационарного распределения процесса $Y(t)$ необходимо и достаточно выполнение равенств

$$(1 - F(\mathbf{p}))(\mathbf{q}_0 \mathbf{\Pi}_0 - \mathbf{q}_1 \mathbf{B}_1) = \mathbf{0},$$

$$\int_{\substack{0 \leq \mathbf{v}_i \leq \mathbf{w}_i, \\ i=1, \dots, k}} (1 - F(\mathbf{p} - \sum_{l=1}^k \mathbf{v}_l)) F(d\mathbf{v}_1) \dots F(d\mathbf{v}_k) (\mathbf{q}_k \mathbf{\Pi}_k - \mathbf{q}_{k+1} \mathbf{B}_{k+1}) = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k) \in \mathcal{S}_k, \quad 1 < k < L,$$

которые эквивалентны условиям теоремы. Что и требовалось доказать.

Следствие. Для того чтобы стационарное совместное распределение состояний марковской РСМО и объемов занимаемых заявками ресурсов имело вид (17), при любой функции распределения $F(\mathbf{x})$ требуемых заявок ресурсов необходимо и достаточно выполнение равенств

$$\mathbf{q}_k \mathbf{\Pi}_k = \mathbf{q}_{k+1} \mathbf{B}_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, L-1. \quad (24)$$

Нетрудно проверить, что любая функция распределения $F(\mathbf{x})$, для которой $F(\frac{1}{L} \mathbf{p}) = 1$, удовлетворяет условиям теоремы. В этом случае любым L заявкам достаточно имеющихся ресурсов, и система фактически функционирует как РСМО с неограниченными ресурсами. Отметим также, что мультипликативные стационарные распределения не зависят от нумерации поступающих и уходящих заявок определяющей интенсивности $a_{\varphi}(i, j)$ и $b_{\psi}(i, j)$, а зависят лишь от суммарных интенсивностей $a(i, j)$ и $b(i, j)$ поступления и ухода заявок.

5. Пример – ресурсная система MAP/M/L/0

Известно, что стационарное распределение РСМО без мест ожидания M/M/L/0 с пуассоновским входящим потоком и экспоненциально распределенной длительностью обслуживания мультипликативно при любой совместной функции распределения объемов требуемых множественных ресурсов [7]. Результаты настоящей работы позволяют ответить на вопрос, а не обладает ли таким же свойством стационарное распределение РСМО MAP/M/L/0 с марковским поступающим потоком (MAP) [4].

Обозначим через $N(t) = \sup\{n \mid a_n \leq t\}$ число заявок поступивших к системе за время t . Поступающий поток называется марковским, если для некоторого случайного процесса $\xi(t)$ с конечным пространством состояний $\mathcal{J}$ процесс $(\xi(t), N(t))$ является однородным марковским процессом, однородным по второй компоненте [8]. В этом случае для всех $i, j \in \mathcal{J}$, $n \geq k$ и $h, t > 0$ мы имеем $P\{\xi(h+t) = j, N(h+t) = n \mid \xi(h) = i, N(h) = k\} = P_{i,j}(n-k, t)$, и процесс $\xi(t)$, называемый фазовым процессом поступающего потока, также является однородным марковским процессом с переходными вероятностями $P_{i,j}(t) = \mathbb{P}\{\xi(h+t) = j \mid \xi(h) = i\} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{i,j}(n, t)$.

Для простого марковского поступающего потока, сокращенно называемого MC-потоком, вероятность поступления в интервале длины ε более одной заявки составляет $o(\varepsilon)$. MC-поток характеризуется двумя матрицами: $\mathbf{S} = [s_{i,j}], i, j \in \mathcal{J}$, и $\mathbf{R} = [r_{i,j}], i, j \in \mathcal{J}$, сумма которых $\mathbf{A} = \mathbf{S} + \mathbf{R}$ является

матрицей интенсивностей переходов фазового процесса $\xi(t)$, а элементы которых определяются равенствами [9]

$$s_{i,j} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (p_{i,j}(0, \varepsilon) - \delta_{i,j}), \quad r_{i,j} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} p_{i,j}(1, \varepsilon), \quad i, j \in \mathcal{J}. \quad (25)$$

Будем считать, что матрица $\mathbf{A}$ неразложима, и обозначим через $\mathbf{p}$ вектор стационарного распределения состояний процесса $\xi(t)$.

Матрица интенсивностей переходов процесса, описывающего систему MAP/M/L/0 с поступающим MC-поток, имеет вид (1) с блоками $\mathbf{A}_k = \mathbf{R}$, $k = 0, 1, \dots, L-1$; $\mathbf{B}_k = k\mu\mathbf{I}$, $k = 1, 2, \dots, L$; $\mathbf{C}_k = \mathbf{S} - k\mu\mathbf{I}$, $k = 0, 1, \dots, L-1$; $\mathbf{C}_L = \mathbf{A} - L\mu\mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ – единичная матрица, μ – интенсивность обслуживания [10]. В момент потери заявки из-за нехватки ресурсов фазовый процесс меняет состояние в соответствии с матрицей интенсивностей переходов $\mathbf{R}$, но число заявок в системе при этом не меняется. Поэтому для матриц $\mathbf{\Pi}_k$, описывающих изменение состояний системы в момент потери заявки из-за нехватки ресурсов, справедливы равенства $\mathbf{\Pi}_k = \mathbf{R}$ для всех $k = 0, 1, \dots, L-1$, и условие мультипликативности (24) приобретает следующий вид:

$$\mathbf{q}_k \mathbf{R} = (k+1)\mu \mathbf{q}_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, L-1.$$

Отсюда из равенств (7)–(9) вытекает, что условия (24) равносильны равенствам $\mathbf{q}_k \mathbf{A} = \mathbf{0}$, $k = 0, 1, \dots, L$. Поскольку матрица $\mathbf{A}$ неразложима, решения этих уравнений имеют вид: $\mathbf{q}_k = c_k \mathbf{p}$, где c_k – некоторые константы. Однако такой вид стационарного распределения состояний СМО с оступающим простым марковским потоком возможен лишь в случае, когда поступающий поток является пуассоновским [9].

Таким образом стационарное распределение РСМО MAP/M/L/0 с поступающим простым марковским потоком обладает свойством мультипликативности лишь в случае, когда поступающий поток является пуассоновским. Поскольку такими потоками можно аппроксимировать любые случайные потоки [11], можно предположить, что это справедливо для произвольных поступающих потоков.

Заключение

В настоящей работе исследуются условия, при которых стационарное совместное распределение состояний марковской РСМО и объемов занимаемых заявками ресурсов мультипликативно. Поскольку понятие марковской СМО довольно широко, мы сначала детально рассматриваем интенсивности переходов случайного процесса, описывающего рассматриваемые здесь РСМО, а затем анализируем условия мультипликативности их стационарных распределений. Наиболее просто проверяются условия, гарантирующие мультипликативность при любых функциях распределения векторов запрашиваемых заявками объемов ресурсов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбунова А.В., Наумов В.А., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е. Ресурсные системы массового обслуживания как модели беспроводных систем связи // Информатика и ее применения. 2018. Т. 12, вып. 3. С. 48–55.
2. Горбунова А.В., Наумов В.А., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е. Ресурсные системы массового обслуживания с произвольным обслуживанием // Информатика и ее применения. 2019. Т. 13, вып. 1. С. 54–61.
3. Наумов В.А., Самуйлов К.Е. О моделировании систем массового обслуживания с множественными ресурсами // Вестник РУДН. Сер. Математика, информатика, физика. 2014. № 3. С. 60–64.
4. Basharin G., Naumov V., Samouylov K. On Markovian Modelling of Arrival Processes // Statistical Papers. URL: <https://doi.org/10.1007/s00362-018-1042-9>
5. Башарин Г.П., Харкевич А.Д., Шнепс М.А. Массовое обслуживание в телефонии. М.: Наука, 1968. 246 с.
6. Дынкин Е.Б. Скачкообразные марковские процессы // Теория вероятностей и ее применения. 1958. Т. 3, № 1. С. 41–60.
7. Наумов В.А., Самуйлов К.Е., Самуйлов А.К. О суммарном объеме ресурсов, занимаемых обслуживаемыми заявками // Автоматика и телемеханика. 2016. № 8. С. 125–135.

8. Ежов И.И., Скороход А.В. Марковские процессы, однородные по второй компоненте // Теория вероятностей и ее применения. 1969. Т. 14, № 1. С. 3–14; № 4. С. 679–692.
9. Наумов В.А. О независимой работе подсистем сложной системы // Труды 3-й Всесоюзной школы-совещания по теории массового обслуживания, Пущино-на-Оке, 1974 / ред. В.В. Гнеденко, Ю.И. Громак, Е.В.Чепурин. М. : Моск. гос. ун-т, 1976. Т. 2. С. 169–177.
10. Наумов В.А. Матричный аналог формулы Эрланга // Модели распределения информации и методы их анализа : труды 10-й Всесоюзной школы-семинара по теории телетрафика. М. : ВИНТИ, 1988. С. 39–43.
11. Asmussen S., Koole G. Marked point processes as limits of Markovian arrival streams // Journal of Applied Probability. 1993. V. 30, is. 2. P. 365–372.

Поступила в редакцию 7 августа 2018 г.

Naumov V.A., Samouylov K.E. (2019) CONDITIONS FOR THE PRODUCT FORM OF THE STATIONARY PROBABILITY DISTRIBUTION OF MARKOVIAN RESOURCE LOSS SYSTEMS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 46. pp. 64–72

DOI: 10.17223/19988605/46/8

In classical queueing systems, servers and waiting places play the role of resources required for service of customers. In resource queueing systems in addition to servers and waiting places, customers may require some additional resources. This may be some random amount of resource occupied for the duration of the waiting time, service time, or residence time. In this paper, we consider Markovian resource queueing systems in which an arriving customer is lost if the system does not have enough available resources. First, the class of Markovian resource loss systems considered is described. Then, the necessary and sufficient conditions for the product form of the stationary probability distribution of the system state and the volumes of the resources occupied by the customers are derived. As an example, the results obtained are applied to the analysis of the stationary distribution of resource loss system MAP/M/L/0 with a Markovian arrival process and exponentially distributed service times. It is shown that for this system the stationary probability distribution has product form only if the arrival process is Poisson.

Keywords: resource queueing systems; Markov process; product form; stationary probability distribution; Markovian arrival process.

NAUMOV Valeriy Arent'evich (Candidate of Physics and Mathematics, Research Director of the Service Innovation Research Institute, Helsinki, Finland).

E-mail: valeriy.naumov@pfu.fi

SAMOUYLOV Konstantin Evgen'evich (Doctor of Technical Sciences, Professor, Director of the Institute of Applied Mathematics & Communications Technology, Russian Peoples Friendship University, Moscow, Russian Federation, and senior scientist of Federal Research Center "Computer Science and Control" (FRC CSC RAS)).

E-mail: samuylov-ke@rudn.ru

REFERENCES

1. Gorbunova, A.V., Naumov, V.A., Gaidamaka, Yu.V. & Samouylov, K.E. (2018) Resource queueing systems as models of wireless communication systems. *Informatika i ee primeneniya – Informatics and Applications*. 12(3). pp. 48–55. (In Russian).
2. Gorbunova, A.V., Naumov, V.A., Gaidamaka, Yu.V. & Samouylov, K.E. (2019) Resursnye sistemy massovogo obsluzhivaniya s proizvolnym obsluzhivaniem [Resource queueing systems with random service]. *Informatics and Applications*. 13(1). pp. 54–61. (In Russian).
3. Naumov, V.A. & Samouylov, K.E. (2014) On the Modeling of Queueing Systems with Multiple Resources. *Vestnik RUDN. Ser. Matematika, informatika, fizika – RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics*. 3. pp. 60–64. (In Russian).
4. Basharin, G., Naumov, V. & Samouylov, K. (2018) On Markovian Modelling of Arrival Processes. *Statistical Papers*. 59(4). pp. 1533–1540. DOI: 10.1007/s00362-018-1042-9
5. Basharin, G.P., Kharkevich, A.D. & Shneps, M.A. (1968) *Massovoe obsluzhivanie v telefonii* [Mass service in telephony]. Moscow: Nauka.
6. Dynkin, E.B. (1958) Discontinuous Markov Processes. *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniya – Theory of Probability and its Applications*. 3(1). pp. 38–57. (In Russian).
7. Naumov, V.A., Samouylov, K.E. & Samouylov, A.K. (2016) On the total amount of resources occupied by serviced customers. *Automation and Remote Control*. 77(8). pp. 1419–1427. DOI: 10.1134/S0005117916080087
8. Ezhov, I.I. & Skorokhod, A.V. (1969) Markovskie protsessy, odnorodnye po vtoroy komponente [Markov processes with homogeneous second component]. *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniya – Theory of Probability and its Applications*. 14(1/1). pp. 1–13.
9. Naumov, V.A. (1976) O nezavisimoy rabote podsystem slozhnoy sistemy [On the independent work of subsystems of a complex system]. In: Gnedenko, B.V., Gromak, Yu. & Chepurin, E.V. (eds) *Trudy 3 shkoly-soveschaniya po teorii massovogo obsluzhivaniyay*.

- Pushtschino-na-Oke* [Proceedings of the 3rd All-Union School-Meeting on the Theory of Queuing, Pushchino-on-Oka]. Vol. 2. Moscow: Moscow State University. pp. 169–177.
10. Naumov, V.A. (1988) Matrichnyy analog formuly Erlanga [The matrix analogue of the Erlang formula]. In: *Modeli raspredeleniya informatsii i metody ikh analiza* [Information distribution models and methods for their analysis]. Moscow: VINITI. pp. 39–43 (in Russian).
 11. Asmussen, S. & Koole, G. (1993) Marked point processes as limits of Markovian arrival streams. *Journal of Applied Probability*. 30(2). pp. 365–372. DOI: 10.2307/3214845

УДК 519.21

DOI: 10.17223/19988605/46/9

Л.А. Нежелская, Д.А. Тумашкина

ОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЙ ПОЛУСИНХРОННОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕМСЯ МЕРТВОМ ВРЕМЕНИ

Рассматривается задача оптимального оценивания состояний полусинхронного потока событий второго порядка, являющегося одной из адекватных математических моделей информационных потоков заявок, функционирующих в современных цифровых сетях интегрального обслуживания, телекоммуникационных сетях, спутниковых сетях связи. Поток функционирует в условиях непродлевающегося мертвого времени. Находится явный вид апостериорных вероятностей состояний потока. Решение о состоянии потока принимается по методу максимума апостериорной вероятности. Формулируется алгоритм оптимального оценивания состояний. Приводятся результаты статистических экспериментов.

Ключевые слова: полусинхронный поток событий второго порядка; непродлевающееся мертвое время; оптимальное оценивание состояний; апостериорные вероятности; метод максимума апостериорной вероятности.

При описании и анализе реальных экономических, технических, физических и других процессов часто возникает необходимость применять математические модели теории массового обслуживания (ТМО). В настоящее время в связи с бурным развитием информационных технологий важнейшими сферами приложений ТМО являются проектирование и создание цифровых сетей интегрального обслуживания (ЦСИО). Так как на практике параметры, определяющие поток событий, как правило, случайным образом изменяются со временем, то адекватными математическими моделями информационных потоков сообщений, функционирующих в ЦСИО, являются дважды стохастические потоки событий [1–8]. В данных потоках событий не только случайны моменты наступления событий, но и интенсивность потока представляет собой случайный процесс, т.е. имеет место двойная стохастика. Объектом изучения настоящей работы является полусинхронный поток событий второго порядка.

В большинстве случаев рассматриваются модели входящих потоков событий, когда события потока полностью наблюдаемы. Однако на практике любое регистрирующее устройство затрачивает некоторое время на регистрацию события, в течение которого оно не способно обработать следующие события, т.е. событие, поступившее на прибор, порождает период мертвого времени [9], в течение которого другие наступившие события потока недоступны для наблюдения. Принимается, что этот период продолжается некоторое фиксированное время (непродлевающееся мертвое время).

Основными задачами при изучении дважды стохастических потоков событий являются следующие: 1) оценка состояний потока [10–12]; 2) оценка параметров потока [13–19].

В настоящей работе предлагается алгоритм оптимального оценивания состояний рассматриваемого потока в условиях его неполной наблюдаемости методом максимума апостериорной вероятности [20]. Применение данного метода обусловлено тем, что апостериорная вероятность является характеристикой, обладающей наиболее полной информацией об исследуемом процессе, содержащейся в выборке наблюдений, а также в силу того, что метод максимума апостериорной вероятности обеспечивает минимум полной вероятности ошибки принятия решения [21]. Данная статья является непосредственным развитием работ [11, 12].

1. Постановка задачи

Рассматривается стационарный режим функционирования полусинхронного дважды стохастического потока событий второго порядка (поток), сопровождающий случайный процесс которого $\lambda(t)$

является кусочно-постоянным с двумя состояниями S_1 и S_2 . Длительность интервала между событиями потока в первом состоянии определяется случайной величиной $\eta = \min(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$, где случайная величина $\xi^{(1)}$ имеет функцию распределения $F_1^{(1)}(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}$, случайная величина $\xi^{(2)}$ – функцию распределения $F_1^{(2)}(t) = 1 - e^{-\alpha_1 t}$; $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ – независимые случайные величины. Таким образом, длительность интервала между событиями потока в первом состоянии процесса $\lambda(t)$ является случайной величиной с функцией распределения $F_1(t) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)t}$.

В момент наступления события потока процесс $\lambda(t)$ переходит из первого состояния во второе либо с вероятностью $P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1)$, либо с вероятностью $P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)$ в зависимости от того, какое значение приняла случайная величина η . В момент наступления события потока процесс $\lambda(t)$ остается в первом состоянии либо с вероятностью $P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1)$, либо с вероятностью $P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)$ в зависимости от значения случайной величины η . Здесь $P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) = 1$, $P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) = 1$.

Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ во втором состоянии есть случайная величина с функцией распределения $F_2(t) = 1 - e^{-\alpha_2 t}$. В течение времени пребывания процесса $\lambda(t)$ во втором состоянии имеет место пуассоновский поток событий с параметром λ_2 .

В последующем изложении полагается, что имеет место состояние S_i (i -е состояние) процесса $\lambda(t)$, если $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = 1, 2$; $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$.

Матрицы инфинитезимальных характеристик процесса $\lambda(t)$ имеют вид:

$$D_0 = \begin{bmatrix} -(\lambda_1 + \alpha_1) & 0 \\ \alpha_2 & -(\lambda_2 + \alpha_2) \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиagonальные элементы матрицы D_0 – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события; диагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком.

После каждого зарегистрированного в момент времени t_k события наступает период мертвого времени фиксированной длительности T , в течение которого другие события рассматриваемого потока являются недоступными наблюдению (теряются). По окончании периода мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности T (непродлевающееся мертвое время) и т.д.

Для наглядности на рис. 1 приведен пример возникающей ситуации, где $t_1, t_2, \dots$ – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке; периоды мертвого времени длительности T обозначены штриховкой; черными кружками обозначены события полусинхронного потока второго порядка, недоступные наблюдению.

Процесс $\lambda(t)$ является марковским. Поскольку $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым, наблюдаются только моменты времени наступления событий $t_1, t_2, \dots$, то $\lambda(t)$ – скрытый марковский процесс или ненаблюдаемый сопровождающий марковский процесс.

Требуется по наблюдениям $t_1, t_2, \dots$ за потоком событий на временном интервале (t_0, t) оценить состояние процесса $\lambda(t)$ (потока) в момент окончания наблюдений t , где t_0 – момент начала наблюдений. Без ограничений общности можно положить $t_0 = 0$.

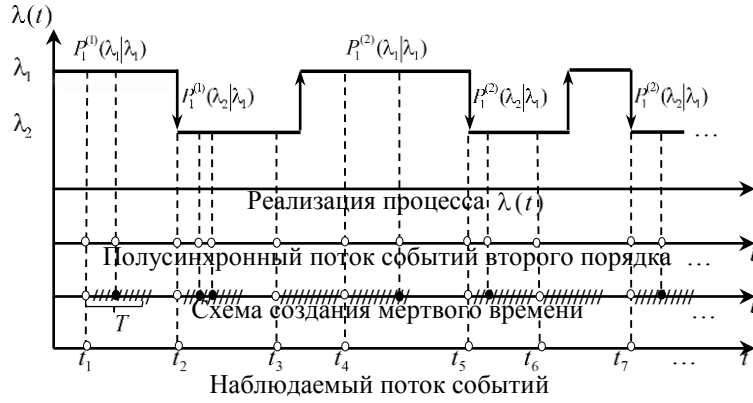


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Fig. 1. Formation of the observed event flow

Для вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в момент времени t необходимо определить апостериорные вероятности $w(\lambda_i | t) = w(\lambda_i | t_1, \dots, t_m, t) = P(\lambda(t) = \lambda_i | t_1, \dots, t_m, t)$, $i = 1, 2$, того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_i$ (m – количество событий потока за время t), при этом $w(\lambda_1 | t) + w(\lambda_2 | t) = 1$. Оптимальное оценивание по критерию максимума апостериорной вероятности выглядит следующим образом: если $w(\lambda_i | t) \geq w(\lambda_j | t)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, то оценка состояния процесса есть $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$, иначе $\hat{\lambda}(t) = \lambda_j$, $i, j = 1, 2$.

2. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий второго порядка

Момент вынесения решения t принадлежит интервалу (t_k, t_{k+1}) , $k = 1, 2, \dots$, между соседними событиями наблюдаемого потока. Для начального интервала (t_0, t_1) момент t лежит между началом наблюдения и первым событием в наблюдаемом потоке. Рассмотрим интервал (t_k, t_{k+1}) , значение длительности которого есть $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 0, 1, \dots$. Однако, так как наблюдаемое в момент t_k событие порождает период мертвого времени длительности T , то $\tau_k = T + \eta_k$, где η_k – значение длительности интервала между моментом окончания периода мертвого времени $t_k + T$ и моментом t_{k+1} , т.е. интервал (t_k, t_{k+1}) разбивается на два смежных: полуинтервал $(t_k, t_k + T]$ и интервал $(t_k + T, t_{k+1})$. Отметим, что условия нахождения апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ на данных интервалах разные, так как на полуинтервале $(t_k, t_k + T]$ поток недоступен наблюдению, а на интервале $(t_k + T, t_{k+1})$ поток наблюдаем.

2.1. Выражения для апостериорной вероятности в условиях отсутствия мертвого времени

Рассмотрим ситуацию, когда $T = 0$, т.е. мертвое время отсутствует. В работе [11] сформулирован алгоритм расчета апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ для данного случая.

Лемма 1. На временных интервалах $(0, t_1)$ и (t_k, t_{k+1}) , $k = 1, 2, \dots$, апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Риккати:

$$\frac{dw(\lambda_1 | t)}{dt} = (\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)w^2(\lambda_1 | t) - (\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 + \alpha_2)w(\lambda_1 | t) + \alpha_2. \quad (1)$$

Лемма 2. Апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ в момент t_k , $k = 1, 2, \dots$, наступления события полусинхронного потока второго порядка определяется формулой пересчета

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = \frac{[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)]w(\lambda_1 | t_k - 0)}{\lambda_2 + [\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2]w(\lambda_1 | t_k - 0)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

В [11] показано, что априорная вероятность $\pi_1(t | t^0)$ того, что значение процесса $\lambda(t) = \lambda_1$ в момент времени t при условии, что функционирование потока началось в момент времени t^0 , удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\pi_1'(t | t^0) = -[\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_2] \pi_1(t | t^0) + \alpha_2. \quad (3)$$

Интегрирование уравнения (3) [22] и переход в полученном решении к стационарному случаю ($t \rightarrow \infty$ или $t^0 \rightarrow -\infty$) определяют явный вид априорной финальной вероятности первого состояния процесса $\lambda(t)$:

$$\pi_1 = \alpha_2 / [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_2]. \quad (4)$$

Интегрирование уравнения (1) с учетом начального условия приводит к следующей теореме.

Теорема 1. На временных интервалах $(0, t_1)$ и (t_k, t_{k+1}) , $k = 1, 2, \dots$, поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ определяется явной формулой

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{w_1[1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)] - [w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)]e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(1 - w_1)(t - t_k)}}{[1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)] - [w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)]e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(1 - w_1)(t - t_k)}}, \quad (5)$$

где $w_1 = \frac{\alpha_2}{\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1}$, $t_k < t < t_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots$; $w(\lambda_1 | t_k + 0)$, $k = 1, 2, \dots$, задается формулой (2);

$w(\lambda_1 | t_0 + 0) = \pi_1$, π_1 определено в (4).

2.2. Алгоритм оптимального оценивания состояний при непродлеваемом мертвом времени

Вернемся к случаю, когда длительность мертвого времени $T \neq 0$. Рассмотрим полуинтервал $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \dots$, на котором событие потока наступает в граничной точке t_k .

Теорема 2. Поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ на временных полуинтервалах $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \dots$, определяется формулой

$$w(\lambda_1 | t) = \pi_1 + [w(\lambda_1 | t_k + 0) - \pi_1]e^{-(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_2)(t - t_k)}, \quad (6)$$

$t_k < t \leq t_k + T$; $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ задается формулой (2), а π_1 – формулой (4).

Доказательство. В течение периода мертвого времени T полусинхронный поток событий второго порядка недоступен наблюдению. В этой связи можно заключить, что на полуинтервалах $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \dots$, поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ аналогично поведению априорной вероятности $\pi_1(t | t^0)$. Разница заключается в определении начального значения $w(\lambda_1 | t)$ в момент времени t_k наступления наблюдаемого события потока. Нетрудно показать, что вероятность $w(\lambda_1 | t)$ на $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \dots$, задается уравнением (3) с начальным условием в момент времени t_k наступления события потока $w(\lambda_1 | t = t_k) = w(\lambda_1 | t_k + 0)$, $k = 1, 2, \dots$. Интегрируя (3), получаем (6). Теорема доказана.

Рассмотрим интервал $(t_k + T, t_{k+1})$, смежный с полуинтервалом $(t_k, t_k + T]$. На данном интервале поток наблюдаем, поэтому вычисление апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ осуществляется по формуле (5); при этом начальное условие для $w(\lambda_1 | t)$ привязывается к моменту времени $t_k + T$:

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{w_1[1 - w(\lambda_1 | t_k + T)] - [w_1 - w(\lambda_1 | t_k + T)]e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(1 - w_1)(t - t_k - T)}}{[1 - w(\lambda_1 | t_k + T)] - [w_1 - w(\lambda_1 | t_k + T)]e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1)(1 - w_1)(t - t_k - T)}}, \quad (7)$$

$t_k + T < t < t_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$; $w(\lambda_1 | t_k + T)$, $k = 1, 2, \dots$, рассчитывается по формуле (6) для $t = t_k + T$.

В момент времени t_k наступления события потока, которое порождает период мертвого времени, апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ рассчитывается по формуле пересчета (2).

Полученные формулы позволяют сформулировать алгоритм расчета апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ ($w(\lambda_2 | t) = 1 - w(\lambda_1 | t)$) и алгоритм принятия решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ (потока) в произвольный момент времени t :

- 1) в момент времени $t_0 = 0$ по формуле (4) вычисляется априорная вероятность $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = w(\lambda_1 | t_0 = 0) = \pi_1$;
 - 2) в любой момент времени t , $0 < t < t_1$, где t_1 – момент наступления первого наблюдаемого события потока, для $k = 0$ вычисляется вероятность $w(\lambda_1 | t)$ по формуле (5);
 - 3) для $k = 0$ в момент наступления первого наблюдаемого события потока t_1 вычисляется вероятность $w(\lambda_1 | t_1) = w(\lambda_1 | t_1 - 0)$ по формуле (5);
 - 4) k увеличивается на единицу и для $k = 1$ вычисляется $w(\lambda_1 | t_1 + 0)$ по формуле (2), при этом $w(\lambda_1 | t_1 + 0)$ – начальное условие для $w(\lambda_1 | t)$ в формуле (6) на следующем шаге алгоритма;
 - 5) для $k = 1$ рассчитывается $w(\lambda_1 | t)$ по формуле (6) для любого t , $t_1 < t < t_1 + T$;
 - 6) для $k = 1$ по формуле (6) вычисляется $w(\lambda_1 | t = t_1 + T)$, являющаяся начальным значением для $w(\lambda_1 | t)$ на следующем шаге алгоритма;
 - 7) для $k = 1$ в любой момент времени t , $t_1 + T < t < t_2$, где t_2 – момент наступления второго наблюдаемого события потока, вычисляется вероятность $w(\lambda_1 | t)$ по формуле (7);
 - 8) для $k = 1$ в момент времени t_2 вычисляется вероятность $w(\lambda_1 | t = t_2) = w(\lambda_1 | t_2 - 0)$ по формуле (7);
 - 9) алгоритм переходит на шаг 4, затем шаги 4–8 повторяются для $k = 2$ и т.д.
- Параллельно по ходу вычисления апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ в любой момент времени t выносится решение о состоянии процесса $\lambda(t)$ по критерию максимума апостериорной вероятности [20]: если $w(\lambda_1 | t) \geq w(\lambda_2 | t)$, то оценка $\hat{\lambda}(t) = \lambda_1$, иначе $\hat{\lambda}(t) = \lambda_2$.

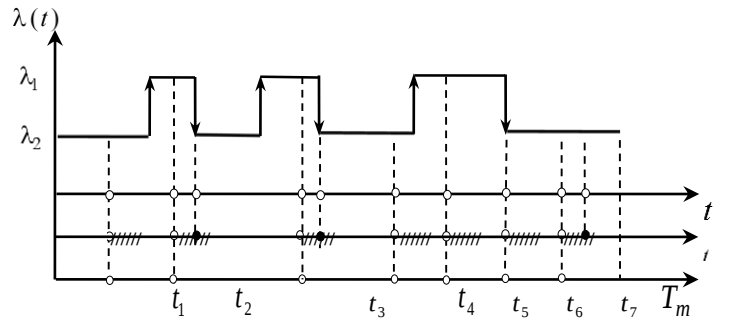
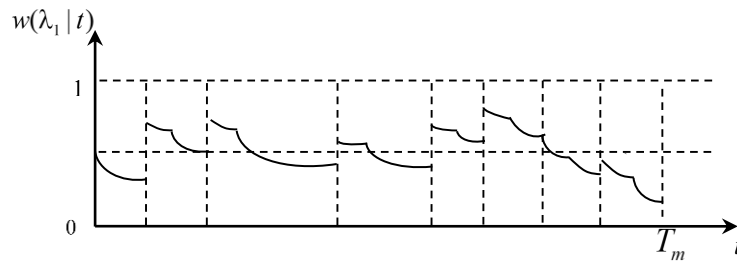
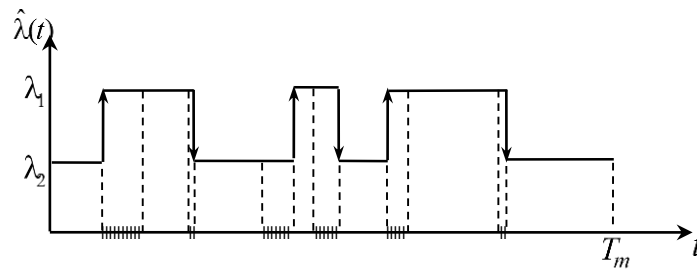
3. Результаты статистических экспериментов

Для получения численных результатов был разработан алгоритм вычисления апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ и проведены статистические эксперименты. На первом этапе алгоритма производится имитационное моделирование потока [23] в условиях его неполной наблюдаемости. На втором этапе на основании полученной выборки моментов наступления наблюдаемых событий $t_1, t_2, \dots$ осуществляется вычисление апостериорных вероятностей $w(\lambda_1 | t)$, $t_0 \leq t < t_1$; $w(\lambda_1 | t_k + 0)$; $w(\lambda_1 | t)$, $t_k < t \leq t_k + T$; $w(\lambda_1 | t)$, $t_k + T < t < t_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, а также строятся оценки $\hat{\lambda}(t)$ траекторий истинного процесса $\lambda(t)$.

В качестве иллюстрации на рис. 2 приведена траектория случайного процесса $\lambda(t)$, полученная путем имитационного моделирования; на рис. 3 показана траектория оценки $\hat{\lambda}(t)$. Расчеты произведены для следующих значений параметров: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0,8$, $P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) = 0,4$, $P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) = 0,6$; $T = 1$, $T_m = 10$ ед. времени (время моделирования).

Заштрихованные области на оси времени (см. рис. 3) – области принятия ошибочных решений, т.е. это – промежутки времени, на которых оценка $\hat{\lambda}(t)$ не совпадает с истинным значением процесса $\lambda(t)$.

На рис. 4 приведена траектория поведения вероятности $w(\lambda_1 | t)$ для данного случая.

Рис. 2. Траектория процесса $\lambda(t)$ Fig. 2. The trajectory of the process $\lambda(t)$ Рис. 3. Траектория апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ Fig. 3. Trajectory of a posteriori probability $w(\lambda_1 | t)$ Рис. 4. Траектория оценки $\hat{\lambda}(t)$ Fig. 4. Trajectory of estimate $\hat{\lambda}(t)$

Для установления частоты принятия ошибочных решений о состоянии процесса $\lambda(t)$ проведены статистические эксперименты, осуществляемые по следующему алгоритму: 1) для фиксированного набора параметров $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_1), P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_1), j=1, 2, T$ (ед. времени) моделируется полусинхронный поток событий второго порядка на заданном отрезке времени $[0, T_m]$ (отдельная i -я реализация (опыт)); 2) осуществляется расчет апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ на заданном отрезке времени $[0, T_m]$ по формулам (2), (4)–(7); 3) строится оценка $\hat{\lambda}(t)$ траектории истинного процесса $\lambda(t)$ на заданном отрезке $[0, T_m]$; 4) определяется для i -го опыта значение d_i – суммарной протяженности интервалов времени, на которых значение оценки $\hat{\lambda}(t)$ не совпадает с истинным значением процесса $\lambda(t)$; 5) вычисляется доля ошибочных решений $\hat{p}_i = d_i / T_m$; 6) осуществляется повторение шагов 1–5 N раз ($i = \overline{1, N}$) для расчета оценки безусловной (полной) вероятности принятия ошибочного решения о состояниях процесса $\lambda(t)$ на $[0, T_m]$.

Результатом выполнения данного алгоритма является выборка $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_N$ долей ошибочных решений в N опытах, по которой находятся выборочное среднее полной вероятности ошибочного решения $\hat{P}_{er} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{p}_i$ и выборочная дисперсия $\hat{D} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\hat{p}_i - \hat{P}_{er})^2$.

В первом статистическом эксперименте устанавливается зависимость $\hat{P}_{er}, \hat{D}$ от значения длительности мертвого времени $T = 0, 1, \dots, 6$ ед. времени. Результаты приведены в табл. 1–3 при значениях $T_m = 100$ ед. времени, $N = 100$ и параметрах $\lambda_2 = 1, \alpha_1 = 4, \alpha_2 = 1, P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) = 0,4, P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) = 0,6$. При этом в каждой из последующих таблиц эксперимента значение разности $\lambda_1 - \lambda_2$ увеличивается на 50% по сравнению с предыдущей.

Таблица 1

Результаты первого статистического эксперимента при $\lambda_1 - \lambda_2 = 3$ ($\lambda_1 = 4$)

T	0	1	2	3	4	5	6
$\hat{P}_{er}$	0,1581	0,2373	0,2599	0,2761	0,2880	0,2946	0,2989
$\hat{D}$	0,0018	0,0026	0,0030	0,0035	0,0039	0,0041	0,0044

Таблица 2

Результаты первого статистического эксперимента при $\lambda_1 - \lambda_2 = 4,5$ ($\lambda_1 = 5,5$)

T	0	1	2	3	4	5	6
$\hat{P}_{er}$	0,1301	0,1915	0,2223	0,2463	0,2585	0,2676	0,2697
$\hat{D}$	0,0015	0,0022	0,0027	0,0033	0,0037	0,0041	0,0042

Таблица 3

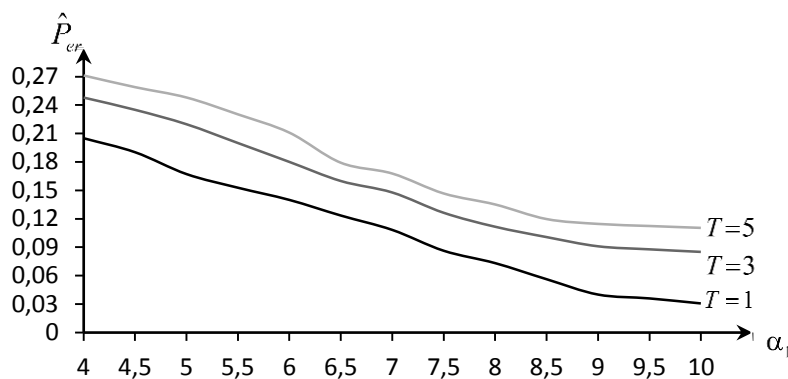
Результаты первого статистического эксперимента при $\lambda_1 - \lambda_2 = 6,75$ ($\lambda_1 = 7,75$)

T	0	1	2	3	4	5	6
$\hat{P}_{er}$	0,0929	0,1554	0,1901	0,2157	0,2284	0,2391	0,2412
$\hat{D}$	0,0010	0,0019	0,0022	0,0029	0,0030	0,0035	0,0038

Анализ численных результатов показывает, что при фиксированном значении T оценка $\hat{P}_{er}$ уменьшается с увеличением значения разности $\lambda_1 - \lambda_2$, что является естественным в силу лучшей различимости состояний потока. Заметим, что чем больше значение длительности мертвого времени T , тем меньше темп улучшения качества оценивания при увеличении значения $\lambda_1 - \lambda_2$. При этом при фиксированных параметрах потока с ростом значения T качество оценки состояний ухудшается, так как происходит увеличение потерь информации о потоке (некоторые события теряются). Отметим, что при $T \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$) апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$, определяемая теоремой 2, стремится к априорной финальной вероятности π_1 первого состояния процесса $\lambda(t)$, что является понятным в силу того, что периоды наблюдаемости в данном случае практически отсутствуют.

При данных значениях параметров алгоритм оптимального оценивания состояний потока обеспечивает достаточно приемлемую оценку безусловной вероятности ошибочного решения, причем выборочная дисперсия данной оценки мала.

Во втором статистическом эксперименте при $N = 100, T_m = 100$ ед. времени и параметрах потока $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 0,8, \alpha_2 = 0,8, P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) = 0, P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) = 1$ рассматривается зависимость оценки $\hat{P}_{er}$ от значений параметра $\alpha_1 = 4, \dots, 10$ с шагом 0,5. Результаты данного эксперимента отражены на рис. 5.

Рис. 5. График зависимости $\hat{P}_{er}$ от α_1 при $T=1$, $T=3$, $T=5$ Fig. 5. $\hat{P}_{er}$ as a function of α_1 at $T=1$, $T=3$, $T=5$

Анализируя полученные результаты, можно заключить, что при данных значениях параметров потока качество оценивания улучшается с ростом значения параметра α_1 (в силу лучшей различимости состояний при больших значениях $\alpha_1 - \alpha_2$) и заметно ухудшается при увеличении значения длительности мертвого времени T (в силу увеличения потерь информации о потоке при больших значениях T).

Заключение

В настоящей работе приведены формулы для расчета апостериорных вероятностей $w(\lambda_1 | t)$, $w(\lambda_2 | t)$ состояний полусинхронного потока событий второго порядка в условиях непродлевающегося мертвого времени. На основании полученных формул разработан алгоритм оптимального оценивания состояний потока (процесса $\lambda(t)$) в произвольный момент времени t на основании выборки моментов наступления событий $t_1, \dots, t_m$ в наблюдаемом потоке, обеспечивающий минимум полной вероятности ошибки вынесения решения. Алгоритм реализован на языке программирования C# в среде Visual Studio 2013. На имитационной модели проведены статистические эксперименты для установления частоты ошибочных решений о состоянии случайного процесса $\lambda(t)$, численные результаты которых не противоречат физической интерпретации и иллюстрируют приемлемую оценку полной вероятности ошибки оценивания и достаточно малую выборочную дисперсию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
2. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
3. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
4. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1955. V. 51, No. 3. P. 433–441.
5. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, is. 4. P. 923–930.
6. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a bath markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
7. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск : Изд-во Белорус. гос. ун-та, 2000. 175 с.
8. Basharin G.P., Gaidamaka Yu.V., Samouylov K.E. Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multi-service communication of the next generation networks // Automatic Control and Computer Sciences. 2013. V. 47, No. 2. P. 62–69.
9. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.
10. Nezhelskaya L. Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Science. 2014. V. 487. P. 342–350.

11. Nezhe'skaya L., Tumashkina D. Optimal state estimation of semi-synchronous event flow of the second order under its complete observability // Communications in Computer and Information Science. 2018. V. 912. P. 93–105.
12. Нежелская Л.А., Тумашкина Д.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий второго порядка // Труды Томского государственного университета. Сер. физико-математическая. Томск : Изд. Дом ТГУ, 2017. Т. 301. С. 97–105.
13. Nezhe'skaya L. Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Science. 2015. V. 564. P. 141–151.
14. Бушланов И.В., Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценка параметров синхронного дважды стохастического потока событий // Автоматика и телемеханика. 2008. № 9. С. 76–93.
15. Gortsev A.M., Nezhe'skaya L.A. Estimate of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method // Telecommunications and Radio Engineering. 1996. V. 50, is. 1. P. 56–63.
16. Gortsev A.M., Klimov I.S. Estimation of the parameters of an alternating Poisson stream of events // Telecommunications and Radio Engineering. 1993. V. 48, is. 10. P. 40–45.
17. Gortsev A.M., Klimov I.S. Estimation of intensity of Poisson stream of events for conditions under which it is partially unobservable // Telecommunications and Radio Engineering. 1992. V. 47, is. 1. P. 33–38.
18. Vasil'eva L.A., Gortsev A.M. Estimation of parameters of a double-stochastic flow of events under conditions of its incomplete observability // Automation and Remote Control. 2002. V. 63, is. 3. P. 511–515.
19. Bakholdina M., Gortsev A. Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions // Communications in Computer and Information Science. 2014. V. 487. P. 18–25.
20. Хазен Э.М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М. : Сов. радио, 1968. 256 с.
21. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М. : Сов. радио, 1968. 504 с.
22. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. : Наука, 1969. 424 с.
23. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М. : Наука, 1973. 312 с.

Поступила в редакцию 15 мая 2015 г.

Nezhe'skaya L.A., Tumashkina D.A. (2019) OPTIMAL STATE ESTIMATION OF SEMI-SYNCHRONOUS EVENTS FLOW OF THE SECOND ORDER UNDER CONDITIONS OF UNEXTENDABLE DEAD TIME. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 46. pp. 73–82

DOI: 10.17223/19988605/46/9

We solve the optimal estimation problem for the states of a semi-synchronous events flow of the second order. We consider the stationary operation mode of the flow in conditions of an unextendable dead time, i.e. after each registered event at the moment t_k , there is a dead time period of fixed duration T , during which other events of the considered flow are inaccessible to observation. At the end of the dead time period, the first event that occurred again creates a period of dead time, etc.

The accompanying random process of the flow is a piecewise constant process $\lambda(t)$ with two states: if $\lambda(t) = \lambda_1$, then there is the first process state, if $\lambda(t) = \lambda_2$, then there is the second one. The process is unobservable in principle, and we can only observe moments $t_1, t_2, \dots$, when events occur in the flow. We have to estimate the state of the process $\lambda(t)$ (flow) at moment t when the observations have stopped by observations $t_1, t_2, \dots$ of the events flow over the time interval (t_0, t) , where t_0 denotes the beginning of observations.

The optimal estimation of states is performed using the maximum method of a posteriori probability. To make the decision regarding the state of the process $\lambda(t)$ at the moment t , we have to determine posterior probabilities $w(\lambda_i | t) = w(\lambda_i | t_1, \dots, t_m, t) = P(\lambda(t) = \lambda_i | t_1, \dots, t_m, t)$, $i = 1, 2$, that at the moment t the value of the process $\lambda(t) = \lambda_i$ (m is the number of events per time t), wherein $w(\lambda_1 | t) + w(\lambda_2 | t) = 1$. The optimal estimation is as follows: if $w(\lambda_i | t) \geq w(\lambda_j | t)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, then the estimate of the process state is $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$, otherwise $\hat{\lambda}(t) = \lambda_j$, $i, j = 1, 2$.

In the paper we find an explicit form for posterior probabilities on the intervals of the flow observability and unobservability. Based on these formulas, the algorithms have been obtained for calculating the posterior probability $w(\lambda_1 | t)$ ($w(\lambda_2 | t) = 1 - w(\lambda_1 | t)$) and for deciding on the state of the process $\lambda(t)$ at an arbitrary moment t . The algorithms were implemented by C# programming language in Visual Studio 2013. Statistical experiments were conducted on the imitational model to establish the frequency of making erroneous decisions about the state of the process $\lambda(t)$, the numerical results of which are given in the paper and illustrate an acceptable estimate of the total probability of making the erroneous decision.

Keywords: semi-synchronous event flow of the second order; unextendable dead time; optimal state estimation; posterior probabilities; maximum method of a posteriori probability.

NEZHEL'SKAYA Lyudmila Alekseevna (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Operations Research Department of the Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: ludne@mail.tsu.ru

TUMASHKINA Diana Aleksandrovna (Master student of the Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: diana1323@mail.ru

REFERENCES

1. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. CH. 1 [On the Equivalent Substitutions Method for Computing Fragments of Communication Networks]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 6. pp. 92–99.
2. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. CH. 2 [On the Equivalent Substitutions Method for Computing Fragments of Communication Networks]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 1. pp. 55–61.
3. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764–779. DOI: 10.2307/3213143
4. Cox, D.R. (1955) The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 51(3). pp. 433–441. DOI: 10.1017/S0305004100030437
5. Kingman, J.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923–930. DOI: 10.1017/S030500410003838X
6. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a bath markovian arrival process. *Communications in Statistics Stochastic Models*. 7. pp. 1–46. DOI: 10.1080/15326349108807174
7. Dudin, A.N. & Klimenok, V.I. (2000) *Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami* [Queueing Systems with Correlated Flows]. Minsk: Belarus State University.
8. Basharin, G.P., Gaidamaka, Yu.V. & Samouylov, K.E. (2013) Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multiservice communication of the next generation networks. *Automatic Control and Computer Sciences*. 47(2). pp. 62–69. DOI: 10.3103/S0146411613020028
9. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavskiy, A.F. (1988) *Statisticheskii analiz sluchaynykh potokov v fizicheskoy eksperimente* [The statistical analysis of series of random events in physical experiment]. Minsk: Universitetskoe.
10. Nezhelskaya, L. (2014) Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Science*. 487. pp. 342–350. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_39
11. Nezhelskaya, L. & Tumashkina, D. (2018) Optimal state estimation of semi-synchronous event flow of the second order under its complete observability. *Communications in Computer and Information Science*. 912. pp. 93–105. DOI: 10.1007/978-3-319-97595-5_8
12. Nezhelskaya, L.A. & Tumashkina, D.A. (2017) Optimalnoe otsenivanie sostoyaniy polusinkhronnogo potoka sobytii vtorogo por-yadka [Optimal state estimation of a semi-synchronous event flow of the second order]. In: Smyrin, I.S. (ed.) *Matematicheskiye i programnoye obespecheniye informatsionnykh, tekhnicheskikh i ekonomicheskikh sistem* [Mathematical and software informational, technical and economic systems]. Tomsk: Tomsk state University. pp. 97–105.
13. Nezhelskaya, L. (2015) Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 141–151.
14. Bushlanov, I.V., Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2008) Otsenka parametrov sinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobytii [Parameter estimation of a synchronous double stochastic flow of events]. *Avtomatika i Telemekhanika – Automation and Remote Control*. 9. pp. 76–93.
15. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (1996) Estimate of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method. *Telecommunications and Radio Engineering*. 50(1). pp. 56–63.
16. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1993) Estimation of the parameters of an alternating Poisson stream of events. *Telecommunications and Radio Engineering*. 48(10). pp. 40–45.
17. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1992) Estimation of intensity of Poisson stream of events for conditions under which it is partially unobservable. *Telecommunications and Radio Engineering*. 47(1). pp. 33–38.
18. Vasilieva, L.A. & Gortsev, A.M. (2002) Estimation of parameters of a double-stochastic flow of events under conditions of its incomplete observability. *Automation and Remote Control*. 63(3). pp. 511–515. DOI: 10.1023/A:1014718921138
19. Bakholdina, M. & Gortsev, A. (2014) Joint probability density of the intervals length of the modulated semy-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions. *Communications in Computer and Information Science*. 487. pp. 18–25. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_3
20. Khazen, E.M. (1968) *Metody optimal'nykh statisticheskikh resheniy i zadachi optimal'nogo upravleniya* [Methods of optimal statistical decisions]. Moscow: Sovetskoe radio.
21. Levin, B.R. (1968) *Teoriticheskie osnovy statisticheskoy radiotekhniki* [Theoretical foundations of statistical radio engineering]. Moscow: Sovetskoe radio.
22. Elsgolts, L.E. (1969) *Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe ischislenie* [The differential equations and calculus of variations]. Moscow: Nauka.
23. Sobol, I.M. (1973) *Chislennyye metody Monte-Karlo* [Numerical methods of Monte Carlo]. Moscow: Nauka.

A.I. Rouban

**THE SENSITIVITY FUNCTIONALS IN THE BOLTS PROBLEM
FOR MULTIVARIATE DYNAMIC SYSTEMS
DESCRIBED BY INTEGRAL EQUATIONS WITH DELAY TIME**

The variational method of calculation of sensitivity functionals (connecting first variation of quality functionals with variations of variable parameters) and sensitivity coefficients (components of vector gradient from the quality functional to constant parameters) for multivariate non-linear dynamic systems described by continuous vectorial Volterra's integral equations of the second-kind with delay time is developed. The presence of a discontinuity in an initial value of coordinates and dependence the initial and final instants and magnitude of delay time from parameters are taken into account also. The base of calculation is the decision of corresponding integral conjugate equations for Lagrange's multipliers in the opposite direction of time.

Keywords: variational method; sensitivity functional; sensitivity coefficient; integral equation; conjugate equation; delay time.

The sensitivity functional (SF) connect the first variation of quality functional with variations of variable and constant parameters and the sensitivity coefficients (SC) are components of vector gradient from quality functional according to constant parameters. Sensitivity coefficients are components of SF.

The problem of calculation of SF and SC of dynamic systems is principal in the analysis and syntheses of control laws, identification, optimization, stability [1–25]. The first-order sensitivity characteristics are mostly used. Later on we shall examine only SC and SF of the first-order. The most difficult are the distributed objects which are described by the dynamic equations with delays and in partial derivatives [2, 10, 11, 13, 17, 18, 20, 23–25].

Consider a vector output $y(t)$ of dynamic object model under continuous time $t \in [t_0, t^1]$, implicitly depending on vectors parameters $\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}$ and functional I constructed on $y(t)$ under $t \in [t_0, t^1]$. The first variation δI of functional I and variations $\delta \tilde{\alpha}(t)$ are connected with each other with the help of a single-line

functional – SF with respect to variable parameters $\tilde{\alpha}(t)$: $\delta_{\tilde{\alpha}(t)} I = \int_{t_0}^{t^1} V(t) \delta \tilde{\alpha}(t) dt$. SC with respect to constant

parameters $\bar{\alpha}$ are called a gradient of I on $\bar{\alpha}$: $(dI/d\bar{\alpha})^T \equiv \nabla_{\bar{\alpha}} I$. SC are a coefficients of single-line relationship between the first variation of functional δI and the variations $\delta \bar{\alpha}$ of constant parameters $\bar{\alpha}$:

$$\delta_{\bar{\alpha}} I = (\nabla_{\bar{\alpha}} I)^T \delta \bar{\alpha} = (dI/d\bar{\alpha}) \delta \bar{\alpha} \equiv \sum_{j=1}^m \frac{\partial I}{\partial \bar{\alpha}_j} \delta \bar{\alpha}_j.$$

The direct method of SC calculation (by means of the differentiation of quality functional with respect to constant parameters) inevitably requires a solution of cumbersome sensitivity equations to sensitivity functions $W(t)$. $W(t)$ is the matrix of single-line relationship of the first variation of dynamic model output with

parameter variations $\delta y(t) = W(t) \delta \bar{\alpha}$. For instance, for functional $I = \int_{t_0}^{t^1} f_0(y(t), \bar{\alpha}, t) dt$ we have following SC

vector (row vector): $dI/d\bar{\alpha} = \int_{t_0}^{t^1} [(\partial f_0/\partial y) W(t) + \partial f_0/\partial \bar{\alpha}] dt$. For obtaining the matrix $W(t)$ it is necessary

to decide a bulky system equations – sensitivity equations. The j -th column of matrix $W(t)$ is made of

the sensitivity functions $dy(t)/d\bar{\alpha}_j$ with respect to component $\bar{\alpha}_j$ of vector $\bar{\alpha}$. They satisfy a vector equation (if y is a vector) resulting from dynamic model (for y) by derivation on a parameter $\bar{\alpha}_j$.

To variable parameters such a method is inapplicable because the sensitivity functions exist with respect to constant parameters.

For relatively simply classes of dynamic systems it is shown that in the SC calculation it is possible to get rid of deciding the bulky sensitivity equations due to the passage of deciding the conjugate equations – conjugate with respect to dynamic equations of object. Method of receipt of conjugate equations (it was offered in 1962) is cumbersome, because it is based on the analysis of sensitivity equations, and it does not get its developments.

Variational method [7], ascending to Lagrange's, Hamilton's, Euler's memoirs, makes possible to simplify the process of determination of conjugate equations and formulas of account of SF and SC. On the basis of this method it is an extension of quality functional by means of inclusion into it object dynamic equations by means of Lagrange's multipliers and obtaining the first variation of extended functional on phase coordinates of object and on interesting parameters. Dynamic equations for Lagrange's multipliers are obtained due to set equal to a zero (in the first variation of extended functional) the functions before the first variations of phase coordinates. Given simplification first variation of extended functional brings at presence in the right part only parameter variations, i.e. it is got the SF. If all parameters are constant that the parameters variations are carried out from corresponding integrals and at the final result in obtained functional variation the coefficients before parameters variations are the required SC. Given method was used in [21] for dynamic systems described by ordinary continuous Volterra's of the second-kind integral and integro-differential equations (the Lagrange problem) and in [22] for dynamic systems described by ordinary continuous general Volterra's of the second-kind integral equations (the Bolts problem). In this article the variational method of account of SC and of SF develops more general (on a comparison with papers [23–25]) continuous many-dimensional non-linear dynamic systems circumscribed by the vectorial non-linear continuous more common Volterra's of the second-kind integral equations with delay time. The more common quality functional (the Bolts problem) is used also.

1. Problem statement

We suppose that the dynamic object is described by system of non-linear continuous Volterra's of the second-kind integral equations (IE) with delay time τ [17. P. 75]

$$y(t) = r(\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t_0, t) + \int_{t_0}^t K(t, y(s), y(s - \tau), \tilde{\alpha}(s), \bar{\alpha}, s) ds, \quad t_0 \leq t \leq t^1, \quad (1)$$

$$y(t) = \psi(\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t), \quad t_0 - \tau \leq t < t_0, \quad 0 < \tau,$$

$$t_0 = t_0(\bar{\alpha}), \quad t^1 = t^1(\bar{\alpha}), \quad \tau = \tau(\bar{\alpha}).$$

Here: initial t_0 and final t^1 instants and also the delay time τ are known functions of constant parameters $\bar{\alpha}$. $\tilde{\alpha}(t)$, $\bar{\alpha}$ are a vector-columns of interesting variable and constant parameters; y is a vector-column of phase coordinates; $r(\cdot)$, $K(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ are known continuously differentiated limited vector-functions. The phase coordinate y in an index point t_0 makes a discontinuity, if certainly $y^+(t_0) \equiv y(t_0 + 0) \equiv r(\tilde{\alpha}(t_0), \bar{\alpha}, t_0, t_0) \neq y(t_0 - 0) \equiv \psi(\tilde{\alpha}(t_0), \bar{\alpha}, t_0)$. At the expense of it the right member of the IE (1) (the magnitude of a phase coordinates y) is continuous in points $t_0 + n\tau$, $n = 1, 2, \dots$.

Variables $\eta(t)$ at each current moment of time t are connected with phase coordinates $y(t)$ by known transformation

$$\eta(t) = \eta(y(t), \tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t), \quad t \in [t_0, t^1], \quad (2)$$

where $\eta(\cdot)$ – also continuous, continuously differentiable, limited (together with the first derivatives) vector-

function. Equation (2) is often known as model of a measuring apparatus. The required parameters $\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}$ are inserted also in it. A dimensionalities of vectors y and η can be various.

The quality of functioning of system it is characterised of functional

$$I(\alpha) = \int_{t_0}^{t^1} f_0(\eta(t), \tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t) dt + I_1(\eta(t^1), \bar{\alpha}, t^1) \quad (3)$$

depending on $\tilde{\alpha}(t)$ and $\bar{\alpha}$. The conditions for function $f_0(\cdot)$, $I_1(\cdot)$ are the same as for $K(\cdot)$, $r(\cdot)$, $\psi(\cdot)$. With use of a functional (3) the optimization problem (in the theory of optimal control) are named as the Bolts problem. From it as the individual variants follow: Lagrange's problem (when there is only integral component) and Mayer's problem (when there is only second component – function from phase coordinates at a finishing point).

With the purpose of simplification of appropriate deductions with preservation of a generality in all transformations (1)–(3) there are two vectors of parameters $\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}$. If in the equations (1)–(3) parameters are different then it is possible formally to unit them in two vectors $\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}$, to use obtained outcomes and then to make appropriate simplifications, taking into account a structure of a vectors $\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}$.

By obtaining of results the obvious designations:

$$r(t) \equiv r(\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t_0, t), \quad K(t, s) \equiv K(t, y(s), y(s - \tau), \tilde{\alpha}(s), \bar{\alpha}, s),$$

$$\psi(t) \equiv \psi(\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t), \quad \eta(t) \equiv \eta(y(t), \tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t), \quad f_0(t) \equiv f_0(\eta(t), \tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t), \quad I_1(t^1) \equiv I_1(\eta(t^1), \bar{\alpha}, t^1)$$

are used.

It is shown also that the variation method without basic modifications allows to receive SF $\delta I(\alpha) = \int_{t_0 - \tau}^{t^1} V(t) \delta \tilde{\alpha}(t) dt + (dI(\alpha)/d\tilde{\alpha}(t^1)) \delta \tilde{\alpha}(t^1) + (dI(\alpha)/d\bar{\alpha}) \delta \bar{\alpha}$ in relation to variable and constant parameters.

2. Variational method at use of models (1)–(3)

Complement a quality functional (2) by restrictions-equalities (1) by means of Lagrange's multipliers $\gamma(t)$, $t \in [t_0, t^1]$; $\bar{\gamma}(t)$, $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ (column vectors) and get the extended functional

$$I = I(\alpha) + \int_{t_0}^{t^1} \gamma^T(t) [r(t) + \int_{t_0}^t K(t, s) ds - y(t)] dt + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \bar{\gamma}^T(t) [\psi(t) - y(t)] dt, \quad (4)$$

which complies with $I(\alpha)$ when (1) is fulfilled. Take into account the form of functional I , change an order

of integrating in double integral inside of triangular area (see fig. 1) $\left(\text{i.e. } \int_{t_0}^{t^1} \int_{t_0}^t A(t, s) ds dt = \int_{t_0}^{t^1} \int_t^{t^1} A(s, t) ds dt \right)$

$$\int_{t_0}^{t^1} \gamma^T(t) \int_{t_0}^t K(t, s) ds dt = \int_{t_0}^{t^1} \int_t^{t^1} \gamma^T(s) K(s, t) ds dt \quad (5)$$

and then extended functional (4) accepts a form:

$$I = I_1(t^1) + \int_{t_0}^{t^1} \{ f_0(t) + \gamma^T(t) [r(t) - y(t)] + \int_t^{t^1} \gamma^T(s) K(s, t) ds \} dt + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \bar{\gamma}^T(t) [\psi(t) - y(t)] dt \quad (6)$$

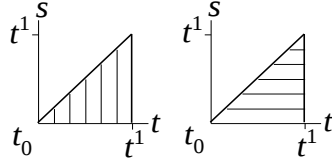


Fig. 1. Triangular area and order of an integration

Find the first variation for I with respect to $\delta y(t)$ and to $\delta \tilde{\alpha}(t)$ ($t \in [t_0, t^1]$), $\delta \tilde{\alpha}(t^1)$, $\delta \bar{\alpha}$ taking account:

- 1) continuity solution of IE (1) in singular points: $y(t_0 + n\tau + 0) = y(t_0 + n\tau - 0)$, $n = 1, 2, \dots$, 2) dependence the right member of IE (1) on $y(t)$ and on $y(t - \tau)$, 3) interconnection (3) between $\eta(t)$ and $y(t)$, $\tilde{\alpha}(t)$, $\bar{\alpha}$, 4) dependence t_0 , t^1 , τ , $I_1(t^1)$ on $\bar{\alpha}$ (i.e. $t_0 = t_0(\bar{\alpha})$, $t^1 = t^1(\bar{\alpha})$, $\tau = \tau(\bar{\alpha})$, $I_1(t^1) \equiv I_1(\eta(t^1), \bar{\alpha}, t^1)$):

$$\begin{aligned}
 \delta I = & \Phi(t^1) \delta y(t^1) + \int_{t_0}^{t^1} \left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial y(t)} + \int_t^{t^1} \gamma^\top(s) \frac{\partial K(s, t)}{\partial y(t)} ds - \gamma^\top(t) \right] \delta y(t) dt + \\
 & + \int_{t_0}^{t^1} \int_t^{t^1} \gamma^\top(s) \frac{\partial K(s, t)}{\partial y(t - \tau)} ds \delta y(t - \tau) dt - \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \bar{\gamma}^\top(t) \delta y(t) dt + \\
 & + \int_{t_0}^{t^1} \left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \gamma^\top(t) \frac{\partial r(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \int_t^{t^1} \gamma^\top(s) \frac{\partial K(s, t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} ds \right] \delta \tilde{\alpha}(t) dt + \\
 & + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \bar{\gamma}^\top(t) \frac{\partial \psi(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} \delta \tilde{\alpha}(t) dt + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial \tilde{\alpha}(t^1)} \delta \tilde{\alpha}(t^1) + \\
 & + \left\{ \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial \bar{\alpha}} + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \bar{\alpha}} + \int_{t_0}^{t^1} \left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \bar{\alpha}} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \bar{\alpha}} + \gamma^\top(t) \frac{\partial r(t)}{\partial \bar{\alpha}} + \int_t^{t^1} \gamma^\top(s) \frac{\partial K(s, t)}{\partial \bar{\alpha}} ds \right] dt + \right. \\
 & + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \bar{\gamma}^\top(t) \frac{\partial \psi(t)}{\partial \bar{\alpha}} dt + \left[-f_0(t_0) + \int_{t_0}^{t^1} \gamma^\top(t) \left[\frac{\partial r(t)}{\partial t_0} - K(t, t_0) \right] dt + \right. \\
 & + \left. \left. 1(t^1 - t_0 - \tau) \int_{t_0 + \tau}^{t^1} \gamma^\top(t) [K(t, t_0 + \tau - 0) - K(t, t_0 + \tau + 0)] dt \right] \frac{dt_0}{d\bar{\alpha}} + \right. \\
 & + \left[\frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial t^1} + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial t^1} + f_0(t^1) \right] \frac{dt^1}{d\bar{\alpha}} + \left[1(t^1 - t_0 - \tau) \int_{t_0 + \tau}^{t^1} \gamma^\top(t) [K(t, t_0 + \tau - 0) - K(t, t_0 + \tau + 0)] dt - \right. \\
 & \left. \left. - \int_{t_0}^{t^1} \gamma^\top(t) \int_{t_0}^t \frac{\partial K(t, s)}{\partial y(s - \tau)} \frac{dy(s - \tau)}{d(s - \tau)} ds dt \right] \frac{d\tau}{d\bar{\alpha}} \right\} \delta \bar{\alpha}. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Here $\frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial y(t^1)} \equiv \Phi(t^1)$. $1(z)$ – single function: it is equal to zero under negative values of argument and is equal to unit under positive values z . The appropriate addends with single function are absent in (7) if the singular point $t_0 + \tau$ is outside of an interval $[t_0, t^1]$. The argument $(t_0 + \tau - 0)$ in appropriate functions designates that the function undertakes to the left of a point $t_0 + \tau$ and the argument $(t_0 + \tau + 0)$ is similar specifies that the function undertakes to the right of a point $t_0 + \tau$.

Out of object equation (1) we calculate the first variation $\delta y(t^1)$ (variation, included in the first addend of (7))

$$\delta y(t^1) = \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial K(t^1, s)}{\partial y(s)} \delta y(s) ds + \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial K(t^1, s)}{\partial y(s - \tau)} \delta y(s - \tau) ds + \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial K(t^1, s)}{\partial \tilde{\alpha}(s)} \delta \tilde{\alpha}(s) ds +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial r(t^1)}{\partial \tilde{\alpha}(t^1)} \delta \tilde{\alpha}(t^1) + \left\{ \frac{\partial r(t^1)}{\partial \bar{\alpha}} + \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial K(t^1, s)}{\partial \bar{\alpha}} ds + \right. \\
 & + \left[\frac{\partial r(t^1)}{\partial t_0} - K(t^1, t_0) + 1(t^1 - t_0 - \tau)(K(t^1, t_0 + \tau - 0) - K(t^1, t_0 + \tau + 0)) \right] \frac{dt_0}{d\bar{\alpha}} + \\
 & + \left[\frac{\partial r(t^1)}{\partial t^1} + K(t^1, t^1) + \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial K(t^1, s)}{\partial t^1} ds \right] \frac{dt^1}{d\bar{\alpha}} + \\
 & \left. + [1(t^1 - t_0 - \tau)(K(t^1, t_0 + \tau - 0) - K(t^1, t_0 + \tau + 0)) - \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial K(t^1, s)}{\partial y(s - \tau)} \frac{dy(s - \tau)}{d(s - \tau)} ds] \frac{d\tau}{d\bar{\alpha}} \right\} \delta \bar{\alpha}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Then the first variation (7) obtains the following form:

$$\delta I = \delta_{y(t)} I + \delta_{\tilde{\alpha}(t)} I + \delta_{\alpha(t^1)} I + \delta_{\bar{\alpha}} I; \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 \delta_{y(t)} I = & \int_{t_0}^{t^1} [\Phi(t^1) \frac{\partial K(t^1, t)}{\partial y(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial y(t)} + \int_t^{t^1} \gamma^T(s) \frac{\partial K(s, t)}{\partial y(t)} ds - \gamma^T(t)] \delta y(t) dt + \\
 & + \int_{t_0}^{t^1} [\Phi(t^1) \frac{\partial K(t^1, t)}{\partial y(t - \tau)} + \int_t^{t^1} \gamma^T(s) \frac{\partial K(s, t)}{\partial y(t - \tau)} ds] \delta y(t - \tau) dt - \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \bar{\gamma}^T(t) \delta y(t) dt; \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta_{\tilde{\alpha}(t)} I = & \int_{t_0}^{t^1} \left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \gamma^T(t) \frac{\partial r(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \Phi(t^1) \frac{\partial K(t^1, t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \right. \\
 & \left. + \int_t^{t^1} \gamma^T(s) \frac{\partial K(s, t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} ds \right] \delta \tilde{\alpha}(t) dt + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \bar{\gamma}^T(t) \frac{\partial \psi(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} \delta \tilde{\alpha}(t) dt; \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\delta_{\tilde{\alpha}(t^1)} I = \left[\frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial \tilde{\alpha}(t^1)} + \Phi(t^1) \frac{\partial r(t^1)}{\partial \tilde{\alpha}(t^1)} \right] \delta \tilde{\alpha}(t^1); \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 \delta_{\bar{\alpha}} I = & \left\{ \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial \bar{\alpha}} + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \bar{\alpha}} + \Phi(t^1) \left[\frac{\partial r(t^1)}{\partial \bar{\alpha}} + \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial K(t^1, s)}{\partial \bar{\alpha}} ds \right] + \right. \\
 & + \int_{t_0}^{t^1} \left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \bar{\alpha}} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \bar{\alpha}} + \gamma^T(t) \frac{\partial r(t)}{\partial \bar{\alpha}} + \int_t^{t^1} \gamma^T(s) \frac{\partial K(s, t)}{\partial \bar{\alpha}} ds \right] dt + \\
 & + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \bar{\gamma}^T(t) \frac{\partial \psi(t)}{\partial \bar{\alpha}} dt + \left[\Phi(t^1) \left[\frac{\partial r(t^1)}{\partial t_0} - K(t^1, t_0) + 1(t^1 - t_0 - \tau)(K(t^1, t_0 + \tau - 0) - K(t^1, t_0 + \tau + 0)) \right] - \right. \\
 & - f_0(t_0) + \int_{t_0}^{t^1} \gamma^T(t) \left(\frac{\partial r(t)}{\partial t_0} - K(t, t_0) \right) dt + 1(t^1 - t_0 - \tau) \int_{t_0 + \tau}^{t^1} \gamma^T(t) [K(t, t_0 + \tau - 0) - K(t, t_0 + \tau + 0)] dt \left. \right] \frac{dt_0}{d\bar{\alpha}} + \\
 & + \left[\Phi(t^1) \left[\frac{\partial r(t^1)}{\partial t^1} + K(t^1, t^1) + \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial K(t^1, s)}{\partial t^1} ds \right] + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial t^1} + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial t^1} + f_0(t^1) \right] \frac{dt^1}{d\bar{\alpha}} + \\
 & + \left[\Phi(t^1) [1(t^1 - t_0 - \tau)(K(t^1, t_0 + \tau - 0) - K(t^1, t_0 + \tau + 0)) - \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial K(t^1, s)}{\partial y(s - \tau)} \frac{dy(s - \tau)}{d(s - \tau)} ds] + \right. \\
 & + 1(t^1 - t_0 - \tau) \int_{t_0 + \tau}^{t^1} \gamma^T(t) (K(t, t_0 + \tau - 0) - K(t, t_0 + \tau + 0)) dt - \\
 & \left. - \int_{t_0}^{t^1} \gamma^T(t) \int_{t_0}^t \frac{\partial K(t, s)}{\partial y(s - \tau)} \frac{dy(s - \tau)}{d(s - \tau)} ds dt \right] \frac{d\tau}{d\bar{\alpha}} \left. \right\} \delta \bar{\alpha}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

For union of integrals with identical variations δy we shift back interval of an integration on magnitude τ in integral with $\delta y(t - \tau)$ (in this connection the argument in integrand thus will increase on τ) and obtain a following result:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t^1} [\Phi(t^1) \frac{\partial K(t^1, t)}{\partial y(t - \tau)} + \int_t^{t^1} \gamma^\top(s) \frac{\partial K(s, t)}{\partial y(t - \tau)} ds] \delta y(t - \tau) dt = \\ & = \int_{t_0}^{t^1} 1(t^1 - \tau - t) [\Phi(t^1) \frac{\partial K(t^1, t + \tau)}{\partial y(t)} + \int_{t + \tau}^{t^1} \gamma^\top(s) \frac{\partial K(s, t + \tau)}{\partial y(t)} ds] \delta y(t) dt + \\ & + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} 1(t^1 - \tau - t) [\Phi(t^1) \frac{\partial K(t^1, t + \tau)}{\partial y(t)} + \int_{t + \tau}^{t^1} \gamma^\top(s) \frac{\partial K(s, t + \tau)}{\partial y(t)} ds] \delta y(t) dt. \end{aligned}$$

Here for compact writing the single function $1(z)$ (which equals to zero by negative value z) is introduced. In this connection such variants are taken into account when instant $t^1 - \tau$ is found inside and outside of interval of system operating period $[t_0, t^1]$.

We substitute this formula in the first variation (10), join components with identical variations and obtain that

$$\begin{aligned} \delta_{y(t)} I = & \int_{t_0}^{t^1} \left[\Phi(t^1) \frac{\partial K(t^1, t)}{\partial y(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial y(t)} + \int_t^{t^1} \gamma^\top(s) \frac{\partial K(s, t)}{\partial y(t)} ds + \right. \\ & \left. + 1(t^1 - \tau - t) [\Phi(t^1) \frac{\partial K(t^1, t + \tau)}{\partial y(t)} + \int_{t + \tau}^{t^1} \gamma^\top(s) \frac{\partial K(s, t + \tau)}{\partial y(t)} ds] - \gamma^\top(t) \right] \delta y(t) dt + \\ & + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \left[1(t^1 - \tau - t) [\Phi(t^1) \frac{\partial K(t^1, t + \tau)}{\partial y(t)} + \int_{t + \tau}^{t^1} \gamma^\top(s) \frac{\partial K(s, t + \tau)}{\partial y(t)} ds] - \bar{\gamma}^\top(t) \right] \delta y(t) dt. \end{aligned} \quad (14)$$

In a variation (14) we equate with zero factors before variations of phase coordinates δy and discover: the conjugate equations for basic Lagrange's multipliers $\gamma(t)$

$$\begin{aligned} \gamma^\top(t) = & \Phi(t^1) \frac{\partial K(t^1, t)}{\partial y(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial y(t)} + \int_t^{t^1} \gamma^\top(s) \frac{\partial K(s, t)}{\partial y(t)} ds + \\ & + 1(t^1 - \tau - t) [\Phi(t^1) \frac{\partial K(t^1, t + \tau)}{\partial y(t)} + \int_{t + \tau}^{t^1} \gamma^\top(s) \frac{\partial K(s, t + \tau)}{\partial y(t)} ds], \quad t_0 \leq t \leq t^1, \end{aligned} \quad (15)$$

and equation of account of Lagrange's multipliers $\bar{\gamma}(t)$ appropriate to initial function of integral equations with delay time (1)

$$\bar{\gamma}^\top(t) = 1(t^1 - \tau - t) [\Phi(t^1) \frac{\partial K(t^1, t + \tau)}{\partial y(t)} + \int_{t + \tau}^{t^1} \gamma^\top(s) \frac{\partial K(s, t + \tau)}{\partial y(t)} ds], \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \quad (16)$$

These equations are decided in the opposite direction of time (from t^1).

From the conjugate equations (15), (16) it is possible to remove single function and to add them a customary aspect.

If $t_0 \leq t^1 - \tau \leq t^1$, i.e. length of an interval $[t_0, t^1]$ transcends magnitude of a delay time τ , then:

$$\begin{aligned} \gamma^\top(t) = & \Phi(t^1) \frac{\partial K(t^1, t)}{\partial y(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial y(t)} + \int_t^{t^1} \gamma^\top(s) \frac{\partial K(s, t)}{\partial y(t)} ds \quad \text{for } t^1 - \tau \leq t \leq t^1, \\ \gamma^\top(t) = & \Phi(t^1) \frac{\partial K(t^1, t)}{\partial y(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial y(t)} + \int_t^{t^1} \gamma^\top(s) \frac{\partial K(s, t)}{\partial y(t)} ds + \\ & + \Phi(t^1) \frac{\partial K(t^1, t + \tau)}{\partial y(t)} + \int_{t + \tau}^{t^1} \gamma^\top(s) \frac{\partial K(s, t + \tau)}{\partial y(t)} ds \quad \text{for } t_0 \leq t \leq t^1 - \tau, \end{aligned}$$

$$\bar{\gamma}^T(t) = \Phi(t^1) \frac{\partial K(t^1, t + \tau)}{\partial y(t)} + \int_{t+\tau}^{t^1} \gamma^T(s) \frac{\partial K(s, t + \tau)}{\partial y(t)} ds \text{ for } t_0 - \tau \leq t \leq t_0.$$

If $t^1 - \tau \leq t_0$, i.e. the magnitude of delay τ transcends length of an interval $[t_0, t^1]$, (in this case magnitude $t_0 + \tau$ transcends t^1 – goes out for an interval of object work):

$$\begin{aligned} \gamma^T(t) &= \Phi(t^1) \frac{\partial K(t^1, t)}{\partial y(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial y(t)} + \int_t^{t^1} \gamma^T(s) \frac{\partial K(s, t)}{\partial y(t)} ds \text{ for } t_0 \leq t \leq t^1, \\ \bar{\gamma}^T(t) &= 0 \text{ for } t^1 - \tau \leq t \leq t_0, \\ \bar{\gamma}^T(t) &= \Phi(t^1) \frac{\partial K(t^1, t + \tau)}{\partial y(t)} + \int_{t+\tau}^{t^1} \gamma^T(s) \frac{\partial K(s, t + \tau)}{\partial y(t)} ds \text{ for } t_0 - \tau \leq t \leq t^1 - \tau. \end{aligned}$$

As a result three components of the first variation $\delta I = \delta_{\tilde{\alpha}(t)} I + \delta_{\tilde{\alpha}(t^1)} I + \delta_{\bar{\alpha}} I$ of functional (3) in relation to variables $\tilde{\alpha}(t)$ and constant parameters $\tilde{\alpha}(t^1)$, $\bar{\alpha}$, are presented accordingly by formulas (11), (12) and (13).

This result is more common in relation to appropriate results of works [17, 21–25]. An additional important summand $I_1(\eta(t^1), \bar{\alpha}, t^1)$ in a quality functional I and dependence t_0, t^1, τ from $\bar{\alpha}$ are taken into account.

Example 2.1. (The integral equations without delay time [22]). We shall consider an object model as **ordinary** non-linear continuous vector of Volterra's of the second-kind integral equations with variable and constant parameters $\tilde{\alpha}(t)$, $\bar{\alpha}$:

$$y(t) = r(\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t_0, t) + \int_{t_0}^t K(t, y(s), \tilde{\alpha}(s), \bar{\alpha}, s) ds, \quad t_0 \leq t \leq t^1, \quad t_0 = t_0(\bar{\alpha}), \quad t^1 = t^1(\bar{\alpha}).$$

The model of measuring apparatus and quality functional are the same as before:

$$\eta(t) = \eta(y(t), \tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t), \quad t \in [t_0, t^1], \quad I(\alpha) = \int_{t_0}^{t^1} f_0(\eta(t), \tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t) dt + I_1(\eta(t^1), \bar{\alpha}, t^1).$$

From (15) we have the conjugate equations for Lagrange's multipliers $\gamma(t)$:

$$\gamma^T(t) = \Phi(t^1) \frac{\partial K(t^1, t)}{\partial y(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial y(t)} + \int_t^{t^1} \gamma^T(s) \frac{\partial K(s, t)}{\partial y(t)} ds, \quad t_0 \leq t \leq t^1,$$

and from (11), (12), (13) – SF:

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta_{\tilde{\alpha}(t)} I + \delta_{\tilde{\alpha}(t^1)} I + \delta_{\bar{\alpha}} I, \\ \delta_{\tilde{\alpha}(t)} I &= \int_{t_0}^{t^1} \left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \gamma^T(t) \frac{\partial r(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \Phi(t^1) \frac{\partial K(t^1, t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \int_t^{t^1} \gamma^T(s) \frac{\partial K(s, t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} ds \right] \delta \tilde{\alpha}(t) dt, \\ \delta_{\tilde{\alpha}(t^1)} I &= \left[\frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial \tilde{\alpha}(t^1)} + \Phi(t^1) \frac{\partial r(t^1)}{\partial \tilde{\alpha}(t^1)} \right] \delta \tilde{\alpha}(t^1), \\ \delta_{\bar{\alpha}} I &= \left\{ \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial \bar{\alpha}} + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \bar{\alpha}} + \Phi(t^1) \left[\frac{\partial r(t^1)}{\partial \bar{\alpha}} + \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial K(t^1, s)}{\partial \bar{\alpha}} ds \right] + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_0}^{t^1} \left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \bar{\alpha}} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \bar{\alpha}} + \gamma^T(t) \frac{\partial r(t)}{\partial \bar{\alpha}} + \int_t^{t^1} \gamma^T(s) \frac{\partial K(s, t)}{\partial \bar{\alpha}} ds \right] dt + \right. \\ &\quad \left. + \left[\Phi(t^1) \left[\frac{\partial r(t^1)}{\partial t_0} - K(t^1, t_0) - f_0(t_0) + \int_{t_0}^{t^1} \gamma^T(t) \left(\frac{\partial r(t)}{\partial t_0} - K(t, t_0) \right) dt \right] \frac{dt_0}{d\bar{\alpha}} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ \left[\Phi(t^1) \left[\frac{\partial r(t^1)}{\partial t^1} + K(t^1, t^1) + \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial K(t^1, s)}{\partial t^1} ds \right] + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial t^1} + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial t^1} + f_0(t^1) \right] \frac{dt^1}{d\bar{\alpha}} \Bigg\} d\bar{\alpha}.$$

This result is more common in relation to appropriate results of works [7–9] and certainly agrees with result in [10]. An additional important summand $I_1(\eta(t^1), \bar{\alpha}, t^1)$ in a quality functional I and dependence t_0, t^1, τ from $\bar{\alpha}$ are taken into account.

Example 2.2. (The differential equations with delay time). Consider that the dynamic object is described by system of non-linear continuous differential equations with delay time and with variable and constant parameters $\tilde{\alpha}(t)$, $\bar{\alpha}$:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f(y(t), y(t-\tau), \tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t), \quad t_0 \leq t \leq t^1, \\ y(t) &= \psi(\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0), \quad y(t_0) = y_0(\bar{\alpha}, t_0). \end{aligned} \quad (17)$$

In an index point t_0 the phase coordinates y can have a break: $y_0(\bar{\alpha}, t_0) \neq \psi(\tilde{\alpha}(t_0), \bar{\alpha}, t_0)$.

We transform model (17) in Volterra's integral equation of the second genus with delay time (1)

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0(\bar{\alpha}, t_0) + \int_{t_0}^t f(y(s), y(s-\tau), \tilde{\alpha}(s), \bar{\alpha}, s) ds, \quad t_0 \leq t \leq t^1, \\ y(t) &= \psi(\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0). \end{aligned} \quad (18)$$

Now

$$r(t) = y_0(\bar{\alpha}, t_0), \quad K(t, s) = f(y(s), y(s-\tau), \tilde{\alpha}(s), \bar{\alpha}, s) \equiv f(s).$$

We write the conjugate equations (15), (16) for Lagrange's multipliers

$$\begin{aligned} \gamma^T(t) &= \frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial y(t)} + [\Phi(t^1) + \int_t^{t^1} \gamma^T(s) ds] \frac{\partial f(t)}{\partial y(t)} + \\ &+ 1(t^1 - \tau - t) [\Phi(t^1) + \int_{t+\tau}^{t^1} \gamma^T(s) ds] \frac{\partial f(t+\tau)}{\partial y(t)}, \quad t_0 \leq t \leq t^1, \\ \bar{\gamma}^T(t) &= 1(t^1 - \tau - t) [\Phi(t^1) + \int_{t+\tau}^{t^1} \gamma^T(s) ds] \frac{\partial f(t+\tau)}{\partial y(t)}, \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0 \end{aligned}$$

and SF (11)–(13)

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta_{\tilde{\alpha}(t)} I + \delta_{\alpha(t^1)} I + \delta_{\bar{\alpha}} I, \quad \delta_{\tilde{\alpha}(t)} I = \int_{t_0}^{t^1} \left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \Phi(t^1) \frac{\partial f(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \right. \\ &+ \int_t^{t^1} \gamma^T(s) \frac{\partial f(s)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} ds \Big] \delta \tilde{\alpha}(t) dt + \int_{t_0-\tau}^{t_0} \bar{\gamma}^T(t) \frac{\partial \psi(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} \delta \tilde{\alpha}(t) dt, \quad \delta_{\alpha(t^1)} I = \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial \tilde{\alpha}(t^1)} \delta \tilde{\alpha}(t^1), \\ \delta_{\bar{\alpha}} I &= \left\{ \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial \bar{\alpha}} + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \bar{\alpha}} + \Phi(t^1) \left[\frac{\partial y_0(\bar{\alpha}, t_0)}{\partial \bar{\alpha}} + \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial f(s)}{\partial \bar{\alpha}} ds \right] + \right. \\ &+ \int_{t_0}^{t^1} \left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \bar{\alpha}} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \bar{\alpha}} + \gamma^T(t) \frac{\partial y_0(\bar{\alpha}, t_0)}{\partial \bar{\alpha}} + \int_t^{t^1} \gamma^T(s) ds \right] \frac{\partial f(t)}{\partial \bar{\alpha}} dt + \int_{t_0-\tau}^{t_0} \bar{\gamma}^T(t) dt \frac{\partial y_0(\bar{\alpha}, t_0)}{\partial \bar{\alpha}} + \\ &+ \left[\Phi(t^1) \left[\frac{\partial y_0(\bar{\alpha}, t_0)}{\partial t_0} - f(t_0) + 1(t^1 - t_0 - \tau)(f(t_0 + \tau - 0) - f(t_0 + \tau + 0)) \right] - \right. \\ &- f_0(t_0) + \int_{t_0}^{t^1} \gamma^T(t) dt \left(\frac{\partial y_0(\bar{\alpha}, t_0)}{\partial t_0} - f(t_0) \right) + 1(t^1 - t_0 - \tau) \int_{t_0+\tau}^{t^1} \gamma^T(t) dt [f(t_0 + \tau - 0) - f(t_0 + \tau + 0)] \Big] \frac{dt_0}{d\bar{\alpha}} + \\ &+ \left[\Phi(t^1) f(t^1) + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial t^1} + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial t^1} + f_0(t^1) \right] \frac{dt^1}{d\bar{\alpha}} + \end{aligned}$$

$$+ \left[\Phi(t^1) [1(t^1 - t_0 - \tau)(f(t_0 + \tau - 0) - f(t_0 + \tau + 0)) - \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial f(s)}{\partial y(s - \tau)} \frac{dy(s - \tau)}{d(s - \tau)} ds] + \right. \\ \left. + 1(t^1 - t_0 - \tau) \int_{t_0 + \tau}^{t^1} \gamma^T(t) dt [f(t_0 + \tau - 0) - f(t_0 + \tau + 0)] - \int_{t_0}^{t^1} \gamma^T(t) dt \int_{t_0}^t \frac{\partial f(s)}{\partial y(s - \tau)} \frac{dy(s - \tau)}{d(s - \tau)} ds \right] \frac{d\tau}{d\bar{\alpha}} \Big\} \delta \bar{\alpha}.$$

These results it is possible to represent in more customary (for differential equations) form. After change of variables:

$$\Phi(t^1) + \int_t^{t^1} \gamma^T(s) ds = \lambda^T(t); \quad \text{ore} \quad -\dot{\lambda}^T(t) = \gamma^T(t), \quad \lambda^T(t^1) = \Phi(t^1);$$

we obtain the conjugate equations in differential form

$$-\dot{\lambda}^T(t) = \frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial y(t)} + \lambda^T(t) \frac{\partial f(t)}{\partial y(t)} + 1(t^1 - \tau - t) \lambda^T(t + \tau) \frac{\partial f(t + \tau)}{\partial y(t)}, \quad \lambda^T(t^1) = \Phi(t^1), \quad t_0 \leq t \leq t^1, \\ \bar{\gamma}^T(t) = 1(t^1 - \tau - t) \lambda^T(t + \tau) \frac{\partial f(t + \tau)}{\partial y(t)}, \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0.$$

and than SF have the form

$$\delta I = \delta_{\tilde{\alpha}(t)} I + \delta_{\alpha(t^1)} I + \delta_{\bar{\alpha}} I, \quad \delta_{\tilde{\alpha}(t)} I = \int_{t_0}^{t^1} \left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \lambda^T(t) \frac{\partial f(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} \right] \delta \tilde{\alpha}(t) dt + \\ + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} 1(t^1 - \tau - t) \lambda^T(t + \tau) \frac{\partial f(t + \tau)}{\partial y(t)} \frac{\partial \Psi(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} \delta \tilde{\alpha}(t) dt, \quad \delta_{\tilde{\alpha}(t^1)} I = \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial \tilde{\alpha}(t^1)} \delta \tilde{\alpha}(t^1), \\ \delta_{\bar{\alpha}} I = \left\{ \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial \bar{\alpha}} + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \bar{\alpha}} + \lambda^T(t_0) \frac{\partial y_0(\bar{\alpha}, t_0)}{\partial \bar{\alpha}} + \right. \\ \left. + \int_{t_0}^{t^1} \left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \bar{\alpha}} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \bar{\alpha}} + \lambda^T(t) \frac{\partial f(t)}{\partial \bar{\alpha}} \right] dt + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} 1(t^1 - \tau - t) \lambda^T(t + \tau) \frac{\partial f(t + \tau)}{\partial y(t)} dt + \frac{\partial y_0(\bar{\alpha}, t_0)}{\partial \bar{\alpha}} + \right. \\ \left. + \left[\lambda^T(t_0) \left[\frac{\partial y_0(\bar{\alpha}, t_0)}{\partial t_0} - f(t_0) + 1(t^1 - t_0 - \tau)(f(t_0 + \tau - 0) - f(t_0 + \tau + 0)) \right] - f_0(t_0) \right] \frac{dt_0}{d\bar{\alpha}} + \right. \\ \left. + \left[\Phi(t^1) f(t^1) + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial t^1} + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial t^1} + f_0(t^1) \right] \frac{dt^1}{d\bar{\alpha}} + \right. \\ \left. + \left[\lambda^T(t^1) [1(t^1 - t_0 - \tau)(f(t_0 + \tau - 0) - f(t_0 + \tau + 0)) - \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial f(s)}{\partial y(s - \tau)} \frac{dy(s - \tau)}{d(s - \tau)} ds] \right] \frac{d\tau}{d\bar{\alpha}} \right\} \delta \bar{\alpha}.$$

Conclusion

The merit of variational method is applicability of its both for calculation of SF and SC. Besides the equations for Lagrange's multipliers remain without change.

Variables and constant parameters are present also at model of the measuring device and at generalized quality functional for system (the Bolts problem). In a basis of calculation of sensitivity functionals the decision of the integrated equations of model in a forward direction of time and obtained integrated equations for Lagrange's multipliers in the opposite direction of time lays.

Variation method of calculation of SF and SC allows a generalization on objects described by vectorial Volterra's second-kind integro-differential equations with delay time.

Results are applicable at design of high-precision systems and devices.

This paper continues research in [17, 21–25].

REFERENCES

1. Ostrovsky, G.M. & Volin, Yu.M. (1967) *Methods of optimization of chemical reactors*. Moscow: Khimiya.
2. Bellman, R. & Kuk, K.L. (1967) *Differential-difference equation*. Moscow: Mir.
3. Rosenwasser, E.N. & Yusupov, R.M. (1969) *Sensitivity of automatic control systems*. Leningrad: Energiya.
4. Krutyko, P.D. (1969) The decision of a identification problem by a sensitivity theory method. *News of Sciences Academy of the USSR. Technical Cybernetics*. 6. pp. 146–153.
5. Petrov, B.N. & Krutyko, P.D. (1970) Application of the sensitivity theory in automatic control problems. *News of Sciences Academy of the USSR. Technical Cybernetics*. 2. pp. 202–212.
6. Gorodetsky, V.I., Zacharin, F.M., Rosenwasser, E.N. & Yusupov, R.M. (1971) *Methods of Sensitivity Theory in Automatic Control*. Leningrad: Energiya.
7. Bryson, A.E. & Ho, Ju-Chi. (1972) *Applied Theory of Optimal Control*. Moscow: Mir.
8. Speedy, C.B., Brown, R.F. & Goodwin, G.C. (1973) *Control Theory: Identification and Optimal Control*. Moscow: Mir.
9. Gekher, K. (1973) *Theory of Sensitivity and Tolerances of Electronic Circuits*. Moscow: Sovetskoe radio.
10. Ruban, A.I. (1975) *Nonlinear Dynamic Objects Identification on the Base of Sensitivity Algorithm*. Tomsk: Tomsk State University.
11. Bedy, Yu.A. (1976) About asymptotic properties of decisions of the equations with delay time. *Differential Equations*. 12(9). pp. 1669–1682
12. Rosenwasser, E.N. & Yusupov, R.M. (1977) *Sensitivity Theory and Its Application*. Vol. 23. Moscow: Svyaz.
13. Mishkis, A.D. (1977) Some problems of the differential equations theory with deviating argument. *Successes of Mathematical Sciences*. 32(2). pp. 173–202
14. Voronov, A.A. (1979) *Stability, controllability, observability*. Moscow: Nauka.
15. Rosenwasser, E.N. & Yusupov, R.M. (1981) *Sensitivity of Control Systems*. Moscow: Nauka.
16. Kostyuk, V.I. & Shirokov, L.A. (1981) *Automatic Parametrical Optimization of Regulation Systems*. Moscow: Energoizdat.
17. Ruban, A.I. (1982) *Identification and Sensitivity of Complex Systems*. Tomsk: Tomsk State University.
18. Tsikunov, A.M. (1984) *Adaptive Control of Objects with Delay Time*. Moscow: Nauka.
19. Haug, E.J., Choi, K.K. & Komkov, V. (1988) *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*. Moscow: Mir.
20. Afanasyev, V.N., Kolmanovskiy, V.B. & Nosov, V.R. (1998) *The Mathematical Theory of Designing of Control Systems*. Moscow: Vysshaya shkola.
21. Rouban, A.I. (1999) Coefficients and functionals of sensitivity for multivariate systems described by integral and integro-differential equations. *AMSE Jourvajs, Series Advances A*. 35(1). pp. 25–34.
22. Rouban, A.I. (2017) The sensitivity functionals in the Bolts's problem for multivariate dynamic systems described by ordinary integral equations. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika –Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 38. pp. 30–36. DOI: 10.17223/19988605/38/5
23. Rouban, A.I. (1999) Sensitivity coefficients for many-dimensional continuous and discontinuous dynamic systems with delay time. *AMSE Jourvajs, Series Advances A*. 36(2). pp. 17–36.
24. Rouban, A.I. (2000) Coefficients and functionals of sensitivity for continuous many-dimensional dynamic systems described by integral equations with delay time. *5th International Conference on Topical Problems of Electronic Instrument Engineering. Proceedings APEIE-2000*. Vol. 1. Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University. pp. 135–140.
25. Rouban, A.I. (2002) Coefficients and Functional of Sensitivity for dynamic Systems described by integral Equations with dead Time. *AMSE Jourvajs, Series Advances C*. 57(3). pp. 15–34.

Received: September 19, 2018

Rouban A.I. (2019) THE SENSITIVITY FUNCTIONALS IN THE BOLTS PROBLEM FOR MULTIVARIATE DYNAMIC SYSTEMS DESCRIBED BY INTEGRAL EQUATIONS WITH DELAY TIME. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 46. pp. 83–92

DOI: 10.17223/19988605/46/10

Рубан А.И. ФУНКЦИОНАЛЫ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ БОЛЬЦА ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2019. № 46. С. 83–92

Вариационный метод применен для расчета функционалов чувствительности, которые связывают первую вариацию функционалов качества работы систем с вариациями переменных и постоянных параметров, для многомерных нелинейных динамических систем, описываемых обобщенными интегральными уравнениями Вольтерра второго рода с запаздывающим аргументом и обобщенным функционалом качества работы системы (функционалом Больца).

Ключевые слова: вариационный метод; функционал чувствительности; интегральное уравнение с запаздывающим аргументом; функционал качества работы системы; задача Больца; сопряженное уравнение.

ROUBAN Anatoly Ivanovich (Doktor of Technical Sciences, Professor of Computer Science Department of Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation).

E-mail: ai-rouban@mail.ru

Г.Ш. Цициашвили, М.А. Осипова

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ В ПРОСТЕЙШЕЙ RQ-СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке фонда РФФИ (проект № 17-07-00177).

Работа посвящена вычислению предельного распределения в модели одноканальной RQ-системы в предположении, что интенсивности входного потока и обслуживания зависят от числа заявок на орбите. Эти вычисления основаны на решении системы стационарных уравнений Колмогорова–Чепмена для процесса, описывающего RQ-систему, и предельном распределении процесса гибели и рождения с произвольными интенсивностями гибели и рождения.

Ключевые слова: RQ-система; процесс гибели и рождения; стационарные уравнения Колмогорова–Чепмена.

В монографии [1] приведен подробный обзор результатов по расчету RQ-систем массового обслуживания. Исследование стабильности случайных процессов, описывающих RQ-системы, проведено в [2, 3]. В [4] и последующих работах исследование RQ-систем продолжено в направлении их асимптотического анализа. Однако остаются не вполне исследованными возможности точного вычисления стационарного распределения в различных RQ-системах, особенно если их характеристики зависят от числа заявок на орбите.

Настоящая работа посвящена поиску точных решений этой задачи в символьном виде для отдельных моделей RQ-систем. В ее основе лежат стационарные уравнения Колмогорова–Чепмена для марковских процессов, описывающих RQ-системы. Для поиска этих решений используются известные стационарные распределения процессов гибели и рождения [5]. С помощью полученных формул удастся получить необходимые условия существования стационарных распределений в RQ-системах и построить аналоги коэффициентов загрузки в них.

1. Основные результаты

Следуя [4], рассмотрим RQ-систему, описываемую марковским процессом $(k(t), i(t))$, где $i(t)$ – число заявок на орбите RQ-системы, $k(t)$ характеризует состояние обслуживающего устройства: $k(t) = 1$, если устройство обслуживает очередную заявку, $k(t) = 0$, если оно по каким-либо причинам простаивает. Если прибор свободен, то интенсивность ухода заявки с орбиты равна σ_i и зависит от числа заявок i на орбите, $\sigma_0 = 0$. Если прибор занят, то интенсивность ухода заявки с орбиты равна нулю (заявка мгновенно уходит с орбиты и возвращается на нее). Интенсивность обслуживания заявки на приборе равна μ_i , а интенсивность входного пуассоновского потока равна λ_i , где $i \geq 0$ – число заявок на орбите.

В работе рассматриваются две модели ухода заявок с орбиты: $\sigma_i = \sigma$, $\sigma_i = i\sigma$, $i > 0$. Первая модель предполагает, что на орбите формируется очередь заявок, ждущих перехода на прибор, а уйти на прибор может только первая заявка очереди. Вторая модель предполагает, что все заявки на орбите независимо друг от друга могут перейти на прибор. Для таких моделей выводятся явные формулы вычисления стационарных вероятностей и необходимые условия существования этих вероятностей.

Обозначим

$$\alpha_i = \frac{\lambda_i(\lambda_i + \sigma_i)}{\mu_i}, \quad \gamma_i = \frac{\lambda_i + \sigma_i}{\mu_i}, \quad i \geq 0, \quad \rho_0 = 1, \quad \rho_i = \prod_{l=1}^i \frac{\alpha_{l-1}}{\sigma_l}, \quad i > 0.$$

Пусть $p(k, i)$, $k, i = 0, 1, \dots$, предельное распределение процесса $(k(t), i(t))$, $t \geq 0$.

Теорема 1. Предельное распределение $p(k, i)$ удовлетворяет равенствам

$$p(0, i) = p(0, 0)\rho_i, \quad p(1, i) = p(0, i)\gamma_i, \quad i \geq 0, \quad p(0, 0) = \left[\sum_{i=0}^{\infty} \rho_i(1 + \gamma_i) \right]^{-1}. \quad (1)$$

Если марковский процесс $(k(t), i(t))$, $t \geq 0$, является эргодическим, то

$$\sum_{i=0}^{\infty} \rho_i(1 + \gamma_i) < \infty. \quad (2)$$

Доказательство. Переходные интенсивности RQ-системы с одним обслуживающим устройством определяются рис. 1.

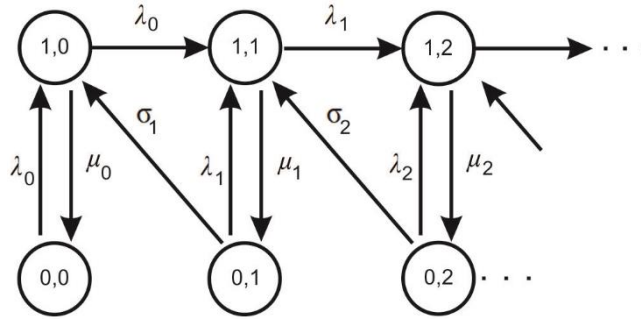


Рис. 1. Граф переходных интенсивностей RQ-системы

Fig. 1. Transient RQ-system intensity graph

Выпишем систему уравнений Колмогорова–Чепмена для данной системы обслуживания, используя рис. 1:

$$p(0, 0)\lambda_0 = p(1, 0)\mu_0, \quad (3)$$

$$p(0, i)(\lambda_i + \sigma_i) = p(1, i)\mu_i, \quad i > 0, \quad (4)$$

$$p(1, 0)(\lambda_0 + \mu_0) = p(0, 0)\lambda_0 + p(0, 1)\sigma_1, \quad (5)$$

$$p(1, i)(\lambda_i + \mu_i) = p(0, i)\lambda_i + p(0, i+1)\sigma_{i+1} + p(1, i-1)\lambda_{i-1}, \quad i > 0. \quad (6)$$

Из формулы (3) находим:

$$p(1, 0) = p(0, 0) \frac{\lambda_0}{\mu_0}. \quad (7)$$

Из формулы (4) получаем:

$$p(1, i) = p(0, i) \frac{\lambda_i + \sigma_i}{\mu_i}, \quad i > 0. \quad (8)$$

Из формул (5), (7) следует, что

$$p(0, 0) \frac{\lambda_0(\lambda_0 + \mu_0)}{\mu_0} = p(0, 0)\lambda_0 + p(0, 1)\sigma_1,$$

и значит

$$p(0, 1)\sigma_1 = p(0, 0) \frac{\lambda_0(\lambda_0 + \sigma_0)}{\mu_0}. \quad (9)$$

Из формул (6), (8) следует, что

$$p(0, i) \left(\frac{\lambda_i(\lambda_i + \sigma_i)}{\mu_i} + \sigma_i \right) = p(0, i+1)\sigma_{i+1} + p(0, i-1) \frac{\lambda_{i-1}(\lambda_{i-1} + \sigma_{i-1})}{\mu_{i-1}}, \quad i > 0. \quad (10)$$

Перепишем формулы (7) – (10) в виде:

$$p(0,0)\alpha_0 = p(0,1)\sigma_1, \quad p(0,i)(\alpha_i + \sigma_i) = p(0,i+1)\sigma_{i+1} + p(0,i-1)\alpha_{i-1}, \quad i > 0, \quad (11)$$

$$p(1,i) = p(0,i)\gamma_i, \quad i \geq 0. \quad (12)$$

Тогда из формул (11), (12) (см.: [5. Гл. 7, § 4]) следуют равенства (1). Таким образом, если марковский процесс $(k(t), i(t))$, $t \geq 0$, эргодический, то выполняется неравенство (2).

Следствие. Если марковский процесс $(k(t), i(t))$, $t \geq 0$, является эргодическим, то, используя результаты статьи [6], можно доказать, что стационарные пуассоновские потоки заявок, уходящих из RQ-системы, поступающих с орбиты на свободный прибор, поступающих на орбиту, имеют следующие интенсивности:

$$\Lambda_1 = \sum_{i=0}^{\infty} p(1,i)\mu_i, \quad \Lambda_2 = \sum_{i=0}^{\infty} p(0,i)\lambda_i, \quad \Lambda_3 = \sum_{i=0}^{\infty} p(1,i)\lambda_i.$$

2. Примеры

Модель 1. Рассмотрим введенную в [7] модель RQ - системы:

$$\lambda_i \equiv \lambda, \quad \mu_i \equiv \mu, \quad i \geq 0, \quad \sigma_i \equiv \sigma, \quad i > 0, \quad \sigma_0 = 0.$$

Из теоремы 1 следует, что

$$p(0,0) = \left[1 + \gamma_0 + (1 + \gamma) \frac{\alpha_0}{\sigma - \alpha} \right]^{-1}, \quad p(1,0) = p(0,0)\gamma_0, \quad (13)$$

$$p(0,i) = p(0,0) \frac{\alpha_0}{\sigma} \left(\frac{\alpha}{\sigma} \right)^{i-1}, \quad p(1,i) = p(0,i)\gamma, \quad i > 0, \quad (14)$$

где

$$\alpha_i \equiv \alpha = \frac{\lambda(\lambda + \sigma)}{\mu}, \quad \gamma_i \equiv \gamma = \frac{\lambda + \sigma}{\mu}, \quad \rho_i = \frac{\alpha_0}{\sigma} \left(\frac{\alpha}{\sigma} \right)^{i-1}, \quad i > 0, \quad \alpha_0 = \frac{\lambda^2}{\mu}, \quad \gamma_0 = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \rho_0 = 1.$$

Следовательно, в соответствии с формулами (13), (14) необходимым условием эргодичности процесса $(k(t), i(t))$, $t \geq 0$, является соотношение

$$\frac{\alpha}{\sigma} = \frac{\lambda(\lambda + \sigma)}{\mu\sigma} = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu\sigma} < 1. \quad (15)$$

В [3] доказано, что неравенство (15) является достаточным условием эргодичности марковского процесса $(k(t), i(t))$, $t \geq 0$.

Модель 2. Рассмотрим теперь еще один интересный для приложений частный случай, когда $\lambda_i \equiv \lambda$, $\mu_i \equiv \mu$, $\sigma_i = i\sigma$ [7]. В этом случае

$$\rho_0 = 1, \quad \gamma_0 = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \rho_i = \prod_{l=1}^i \left(\frac{\lambda(l-1)}{\mu l} + \frac{\lambda^2}{\mu l \sigma} \right), \quad \gamma_i = \frac{\lambda + i\mu}{\mu}, \quad i > 0, \quad (16)$$

и выполняются равенства (1).

Исследуем условие (2) сходимости ряда $\sum_{i=0}^{\infty} \rho_i(1 + \gamma_i)$, являющееся необходимыми для эргодичности марковского процесса $(k(t), i(t))$, $t \geq 0$. Этот ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \rho_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda + i\sigma}{\mu} \prod_{l=1}^i \left(\frac{\lambda(l-1)}{\mu l} + \frac{\lambda^2}{\mu l \sigma} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda + i\sigma}{\mu} \prod_{l=1}^i \frac{\lambda}{\mu} \left(1 + \frac{1}{l} \left(\frac{\lambda}{\sigma} - 1 \right) \right).$$

Необходимым условием сходимости ряда $\sum_{i=0}^{\infty} \rho_i \gamma_i$, является неравенство $\lambda < \mu$. Докажем достаточность этого условия. Пусть $\lambda < \mu$, определим L условием $\frac{\lambda}{\mu} \left(1 + \frac{\lambda}{L\sigma}\right) = a < 1$, тогда

$$\sum_{i=L+1}^{\infty} \gamma_i \rho_i \leq \prod_{l=1}^L \frac{\lambda}{\mu} \left(1 + \frac{\lambda}{l\sigma}\right) \sum_{i=L+1}^{\infty} \frac{\lambda + i\sigma}{\mu} a^{i-L} < \infty.$$

Таким образом, ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \rho_i (1 + \gamma_i)$ сходится при $\lambda < \mu$. Автором статьи [3] в устном докладе отмечено, что неравенство $\lambda < \mu$ является достаточным условием эргодичности марковского процесса $(k(t), i(t))$, $t \geq 0$.

Заключение

Особенностью полученных в работе результатов является возможность рассчитывать распределение в марковской модели RQ-системы при достаточно произвольных зависимостях интенсивностей входного потока и обслуживания от числа заявок на орбите. Это позволяет рассматривать различные механизмы адаптации RQ-системы к текущему числу заявок на орбите, а также ставить и решать различные оптимизационные задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Artalejo J.R., Gomez-Corral A. Retrial Queueing Systems. A Computational Approach. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2008.
2. Вишневский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И. Стохастические системы с коррелированными потоками : теория и применение в телекоммуникационных сетях. М. : Техносфера, 2018.
3. Afanaseva L.G. Stability conditions for constant retrial rate queueing system with a regenerative input flow // Proceedings of IX Moscow International Conference on Operations Research. 2018. V. 1. P. 308–313.
4. Назаров А.А., Моисеева Е. А. Исследование RQ-системы MMPP|M|1 методом асимптотического анализа в условии большой загрузки // Известия Томского политехнического университета. 2013. Т. 322, № 2. С. 19–23.
5. Карлин С. Основы теории случайных процессов. М. : Мир, 1971.
6. Tsitsiashvili G.Sh., Osipova M.A. Modelling of output flows in queueing systems and networks // Information Technologies and Mathematical Modelling – Queueing Theory and Applications. Vol. 912 of the Communications in Computer and Information Science series. ITMM-2018. P. 106–116.
7. Fayolle G. A simple telephone exchange with delayed feedbacks. In Teletraffic Analysis and Computer Performance Evaluation / O.J. Boxma, J.W. Cohen, H.C. Tijms (eds.). Amsterdam : Elsevier, 1986.

Поступила в редакцию 14 сентября 2018 г.

Tsitsiashvili G.Sh., Osipova M.A. (2019) STATIONARY DISTRIBUTIONS IN THE SIMPLEST RQ-QUEUEING SYSTEM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 46. pp. 93–97

DOI: 10.17223/19988605/46/11

This paper is devoted to the search for exact solutions of the considered problem in symbolic form for individual models of RQ-systems. It is basing on the stationary Kolmogorov-Chapman equations for Markov processes describing RQ-systems. With the help of the obtained formulas, it is possible to obtain the necessary conditions for the existence of stationary distributions in RQ-systems and to construct analogues of loading coefficients in them.

Consider the RQ-system described by the Markov process $(k(t), i(t))$, where $i(t)$ is the number of customers in the orbit of the RQ-system, $k(t)$ characterizes the state of the server, $k(t) = 1$, if it serves the customer, $k(t) = 0$, if it is idle for any reason. If the server is free, the intensity σ_i of the withdrawal of the customer from the orbit depends on the number i of customers in orbit $\sigma_0 = 0$. If the server is occupied, the intensity of the withdrawal of the customer from orbit is zero (the customer instantly goes out of orbit and returns to it). The service intensity of the customer on the server is equal to μ_i , and the intensity of the input Poisson flow is equal to λ_i , where $i \geq 0$ is the number of customers.

The paper considers two models of customers leaving the orbit: $\sigma_i = \sigma$, $\sigma_i = i\sigma$, $i > 0$. First model assumes that a queue of customers waiting for the transition to the server is formed in the orbit, and only the first customer of the queue can go to the server. The second model assumes that all customers in orbit can independently switch to the server. For these models, explicit formulas for calculating stationary probabilities and the necessary conditions for the existence of these probabilities are derived.

Denote

$$\alpha_i = \frac{\lambda_i(\lambda_i + \sigma_i)}{\mu_i}, \quad \gamma_i = \frac{\lambda_i + \sigma_i}{\mu_i}, \quad i \geq 0, \quad \rho_0 = 1, \quad \rho_i = \prod_{l=1}^i \frac{\alpha_{l-1}}{\sigma_l}, \quad i > 0.$$

Assume that $p(k, i)$, $k, i = 0, 1, \dots$, is the limit distribution of the process $(k(t), i(t))$, $t \geq 0$.

Theorem. The limit distribution $p(k, i)$ satisfies the equalities

$$p(0, i) = p(0, 0)\rho_i, \quad p(1, i) = p(0, i)\gamma_i, \quad i \geq 0, \quad p(0, 0) = \left[\sum_{i=0}^{\infty} \rho_i(1 + \gamma_i) \right]^{-1}.$$

If Markov process $(k(t), i(t))$, $t \geq 0$, is ergodic, then

$$\sum_{i=0}^{\infty} \rho_i(1 + \gamma_i) < \infty.$$

Keywords: RQ-system; process of death and birth; stationary Kolmogorov–Chapman equations.

TSITSIAISHVILI Gurami Shalvovich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Main Researcher of Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch of Russian Academy Sciences, Vladivostok, Russian Federation).

E-mail: guram@iam.dvo.ru

OSIPOVA Marina Anatolievna (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Researcher of Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch of Russian Academy Sciences, Vladivostok, Russian Federation).

E-mail: mao1975@list.ru

REFERENCES

1. Artalejo, J.R. & Gomez-Corral, A. (2008) *Retrial Queueing Systems. A Computational Approach*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
2. Vishnevsky, V.M., Dudin, A.N. & Klimenok, V.I. (2018) *Stokhasticheskie sistemy s korrelirovannymi potokami: teoriya i primeneniye v telekommunikatsionnykh setyakh* [Stochastic systems with correlated flows. Theory and application in telecommunication networks]. Moscow: Tekhnosfera.
3. Afanaseva, L.G. (2018) Stability conditions for constant retrial rate queueing system with a regenerative input flow. *Proceedings of IX Moscow International Conference on Operations Research*. 1. pp. 308–313.
4. Nazarov, A.A. & Moiseeva, E.A. (2013) Issledovanie RQ-sistemy metodom asimptoticheskogo analiza v uslovii bol'shoy zagruzki [A Research of RQ-system by the method of asymptotic analysis in the condition of large load]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta – Bulletin of Tomsk Polytechnic University*. 322(2). pp. 19–23.
5. Karlin, S. (1971) *Osnovy teorii sluchaynykh protsessov* [Fundamentals of the theory of random processes]. Moscow: Mir.
6. Tsitsiashevili, G.Sh. & Osipova, M.A. (2018) Modelling of output flows in queueing systems and networks. *Information Technologies and Mathematical Modelling - Queueing Theory and Applications*. 912. pp. 106–116.
7. Fayolle, G. (1986) A simple telephone exchange with delayed feedbacks. In: Boxma, O.J., Cohen, J.W. & Tijms, H.C. (eds) *Teletraffic Analysis and Computer Performance Evaluation*. Amsterdam: Elsevier.

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

УДК 004.436.2

DOI: 10.17223/19988605/46/12

С.Е. Рыжова, Е.А. Мыцко, А.Н. Мальчуков

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕАЛИЗАЦИЙ ДЕКОДЕРОВ БЧХ-КОДА
С ПАРАМЕТРАМИ (15, 7, 5) НА ПЛИС*Работа выполнена в рамках гранта РФФИ № 18-47-700010 р_а от 07 июня 2018 г.*

Рассматриваются реализации табличного и циклического методов декодирования для исправления двукратных независимых ошибок с длиной кодового слова 15 бит и длиной информационного блока 7 бит на основе программируемой логической интегральной схемы (ПЛИС). Описаны способы увеличения быстродействия реализуемых устройств за счет применения параллельной структуры и матричного алгоритма деления полиномов. Приведено сравнение по быстродействию различных реализаций декодеров с применением табличного и циклического методов декодирования. Установлено, что при реализации циклического метода минимальное время декодирования входной кодовой комбинации можно уменьшить до 12 нс.

Ключевые слова: помехоустойчивый код; код Боуза–Чоудхури–Хоквингема; табличный метод декодирования; циклический метод декодирования; аппаратная реализация; ПЛИС.

В современном мире большие объемы данных передаются по различным каналам связи. В процессе передачи существует вероятность возникновения ошибок в данных, вызванных влиянием окружающей среды. Для обнаружения и исправления таких ошибок используются помехоустойчивые коды. Наиболее часто встречающимися в данной области являются коды Боуза–Чоудхури–Хоквингема (БЧХ) [1, 2], которые относятся к широкому классу циклических кодов и способны обнаруживать и исправлять большое количество независимых ошибок в принимаемой комбинации. Область применения кодов БЧХ охватывает широкий спектр систем передачи данных: системы цифрового телевидения (стандарты DVB-S2X, DVB-C2) [3], единую европейскую систему связи, сотовую и космическую связь, системы автоматизации производства, системы пейджинговой связи (POCSAG, БЧХ-код (31,21)) [4]. Коды БЧХ можно использовать не только для промышленных целей, но и для военных, например для систем кодирования–декодирования информации, передаваемой с беспилотных летательных аппаратов (БПЛА).

Во многих таких стандартах передачи данных применяются коды большой длины (от 1 024 бит), однако коды малой длины (до 31) и с корректирующей способностью до 2–3 бит также могут быть востребованными в системах с передачей небольших пакетов команд или данных, а также при разработке собственных протоколов. Так, коды длиной до 15 бит используются в системах автоматизации производства или в БПЛА [5]. Однако для одного и того же БЧХ-кода существуют разные подходы к реализации, которые будут отличаться по быстродействию и аппаратным затратам, что требует дополнительного исследования.

1. Обзор существующих алгоритмов

В системах связи при передаче данных используется два устройства — кодер и декодер, которые находятся на отправляющей и принимающей стороне соответственно. Алгоритмы декодирования имеют свои особенности и различаются по степени сложности реализации. Одними из простых методов декодирования являются: табличный, основанный на применении таблицы предвычисленных

синдромов ошибок, и циклический, основанный на проверке веса остатка от деления кодового слова на образующий полином [6].

1.1. Табличный метод декодирования

Наиболее простым в реализации методом декодирования является табличный метод. Он применим как для нециклических, так и для циклических помехоустойчивых полиномиальных кодов. Такие коды строятся на основе образующих полиномов, которые должны удовлетворять следующим условиям: 1) расстояние Хэмминга должно удовлетворять условию $d_{\min} \geq 2t + 1$, где t – корректирующая способность кода; 2) синдромы ошибок кратности t должны быть уникальными. Основой метода является наличие таблицы, в которой хранятся все возможные значения шаблонов ошибок до кратности t . Адресами шаблонов ошибок являются синдромы ошибок. Имея такую таблицу, процесс декодирования сводится к следующему алгоритму:

1. Формируются все варианты шаблонов ошибок заданной кратности t .
2. Осуществляется процесс деления шаблона ошибки на образующий полином с целью получения остатка.
3. Остаток, полученный на этапе 2, является адресом для соответствующего делимого (шаблона ошибки).

Процесс декодирования имеет следующую последовательность этапов:

1. Входная кодовая комбинация делится на образующий полином.
2. По остатку от деления, полученному на этапе 1, выбирается шаблон ошибки из таблицы.
3. Выбранный шаблон суммируется по модулю 2 («исключающее или») с входной кодовой комбинацией.
4. Результатом сложения является исправленное кодовое слово.

Преимуществами данного метода являются простота его реализации и отсутствие необходимости выполнения циклических сдвигов кодовой комбинации, в отличие от циклического метода декодирования.

Основным недостатком данного метода является то, что при увеличении длины входной кодовой комбинации и корректирующей способности кода таблица будет расти согласно выражению $2^k n$ где k – длина контрольного блока сообщения; m – длина информационного блока сообщения; n – длина всей кодовой комбинации ($n = m + k$).

1.2. Циклический метод декодирования

Коды Боуза–Чоудхури–Хоквингема относятся к классу циклических кодов, поэтому для их декодирования можно применить циклический метод.

Алгоритм, реализующий циклический метод, заключается в следующем:

1. Производится деление по модулю 2 входной кодовой комбинации на образующий многочлен с целью получения остатка от деления.
2. Проверка условия, что вес остатка (w – количество единиц в комбинации) должен быть меньше или равен количеству исправляемых декодером ошибок ($w \leq t$).
3. Если условие не выполняется, то необходимо осуществить циклический сдвиг входной кодовой комбинации влево на 1 бит и вернуться к пункту 1, иначе – перейти к пункту 4.
4. Если условие $w \leq t$ выполняется, то необходимо произвести суммирование кодовой комбинации с остатком и получить исправленную кодовую комбинацию.
5. Если кодовая комбинация была циклически сдвинута влево, то необходимо исправленную комбинацию циклически сдвинуть на такое же количество бит вправо.
6. Если осуществлено $n - 1$ циклических сдвигов, но условие $w \leq t$ не выполнено, то регистрируется неисправимая ошибка.

Преимуществом данного метода является возможность распараллеливания промежуточных этапов декодирования для достижения наибольшего быстродействия декодера.

Недостатком данного метода является зависимость времени выполнения декодирования кодовой комбинации от позиции ошибки. Также при увеличении степени параллелизма устройства растет количество занимаемых логических ячеек ПЛИС.

2. Реализации декодеров

В данной работе приведены различные варианты реализации декодера БЧХ-кода на ПЛИС семейства Altera Cyclone III с применением языка описания аппаратуры Verilog [7]. Моделирование процесса декодирования проводилось в САПР Quartus II 9.1 service pack 2.

Рассматриваемый код БЧХ имеет следующие параметры:

- $n = 15$ – длина входной кодовой комбинации;
- $m = 7$ – длина информационного блока сообщения;
- $k = 8$ – длина контрольного блока сообщения;
- $t = 2$ – количество исправляемых кодом ошибок;
- $d = 5$ – максимальное расстояние по Хэммингу между двумя комбинациями;
- $q(x) = 111010001$ – образующий полином.

Реализации методов декодирования БЧХ-кода с такими параметрами встречаются во многих научных трудах [1, 8–15]. В связи с этим в данной работе приводится сравнение реализаций различных методов декодирования на примере кода БЧХ (15, 7, 5).

Далее приведены реализации табличного и циклического методов декодирования. Для достижения большего быстродействия осуществлены модификации с применением параллельной структуры и заменой классического алгоритма деления входной кодовой комбинации на образующий полином на матричный.

2.1. Реализация табличного метода декодирования с классическим делением полиномов

Реализация табличного метода декодирования занимает малое количество логических ячеек и имеет высокую скорость работы устройства. Однако для хранения самой таблицы шаблонов необходимо использование памяти ROM. Это также увеличивает сложность разработки декодера за счет необходимости вычисления таблицы шаблонов ошибок, о чем упоминалось ранее.

На рис. 1 представлена схема, которая используется [1] для реализации процедуры деления входной кодовой комбинации на образующий полином. Этот процесс обычно реализуется посредством линейного регистра обратной связи (ЛРОС), который представляет собой итеративный процесс, на выполнение которого необходимо тактов не меньше, чем длина кодового слова, — количество тактов не может быть меньше $2n$.

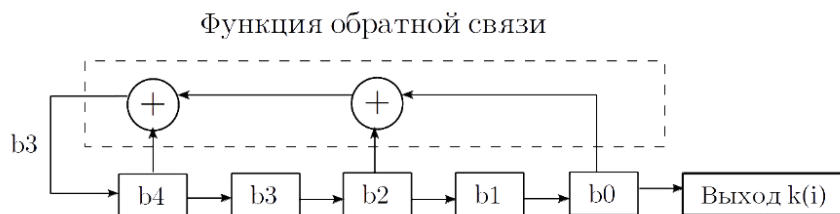


Рис. 1. Схема реализации линейного регистра обратной связи (ЛРОС)

Fig. 1. Scheme of implementation of the linear feedback register (LROS)

На рис. 2 представлена структурная схема реализации табличного метода декодирования, в соответствии с которой будет реализован декодер на ПЛИС. Схема содержит два вычислительных блока и блок памяти, в котором хранится таблица шаблонов ошибок.

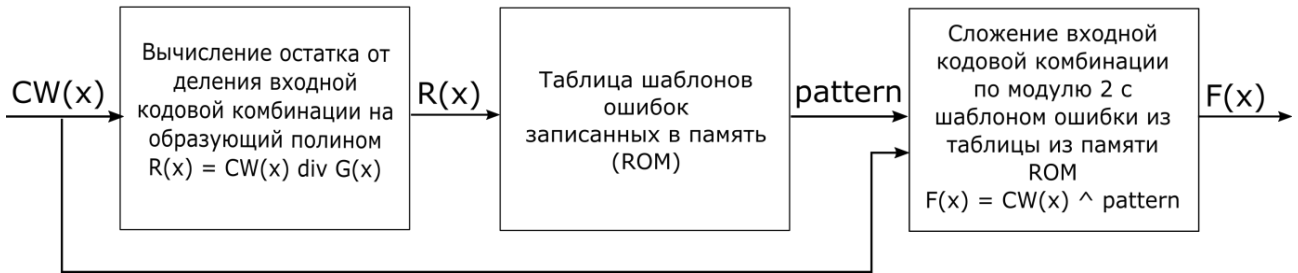


Рис. 2. Структурная схема реализации табличного метода декодирования
Fig. 2. Structural scheme of implementation of the tabular method of decoding

По результатам тестирования для выполнения процесса декодирования необходимо 36 тактов с частотой 275,2 МГц (реализация № 1 в таблице), из которых 30 тактов – это процедура деления входной кодовой комбинации на образующий полином. За 6 тактов происходит выбор необходимого синдрома ошибки из таблицы, записанной в память, и сложение выбранного шаблона с кодовой комбинацией. Данная реализация требует 65 логических элементов и 1 792 бита памяти.

2.2. Реализация циклического метода с классическим делением полиномов

Декодер, основанный на циклическом методе декодирования, с реализацией ЛРОС для выполнения процесса деления имеет четкую последовательную структуру. Переходы от одного этапа декодирования к другому происходят по строго заданным условиям при помощи управляющих сигналов разрешения работы конкретного блока. На рис. 3 приведена структурная схема декодера с применением циклического метода декодирования. Остаток от деления входной кодовой комбинации на образующий полином вычисляется по схеме, представленной на рис. 1.

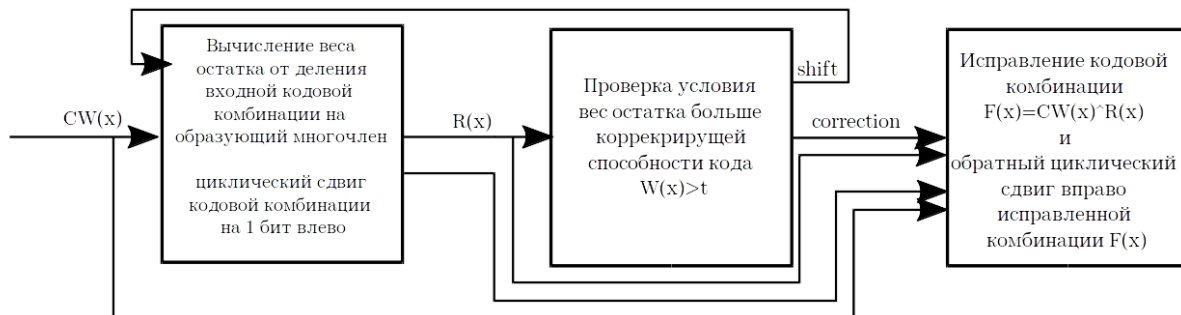


Рис. 3. Структурная схема декодера с применением циклического метода декодирования
Fig. 3. The block diagram of the decoder with the application of a cyclic method of decoding

Такой декодер с последовательной структурой имеет большое время работы, однако занимает малое количество ресурсов. В процессе декодирования выделяется три основных этапа:

- процесс деления входной кодовой комбинации на образующий полином и циклический сдвиг кодовой комбинации на 1 бит влево;
- процесс подсчета веса полученного остатка и проверка условия $w \leq t$;
- сложение кодовой комбинации с соответствующим остатком и циклический сдвиг исправленной кодовой комбинации на необходимое количество бит вправо.

По результатам тестирования декодера были определены характеристики, оценивающие декодер: количество тактов, необходимое для максимального количества сдвигов кодовой комбинации; максимальная частота работы устройства; количество использованных логических элементов. Полная процедура декодирования производится за 627 тактов с частотой 192,8 МГц (реализация № 2 в таблице). Каждая процедура деления входной кодовой комбинации на образующий полином осуществляется за 30 тактов. Процедура сложения сдвинутой кодовой комбинации с остатком и обратный циклический сдвиг на 14 бит влево выполняется за 27 тактов. Наименее трудоемкими из всех являются 15 процедур

подсчета веса остатка от деления входной кодовой комбинации на образующий полином, каждая из которых выполняется за 10 тактов. Данная реализация требует 211 логических элементов ПЛИС.

2.3. Реализация циклического метода, с параллельной структурой и классическим алгоритмом деления полиномов

Одной из возможных модификаций для достижения быстродействия устройства является распараллеливание структуры декодера. На рис. 4 представлена структурная схема для реализации циклического метода декодирования с распараллеливанием промежуточных процессов декодирования: деление входной кодовой комбинации на образующий полином и подсчет весов остатков, полученных в процессе деления.

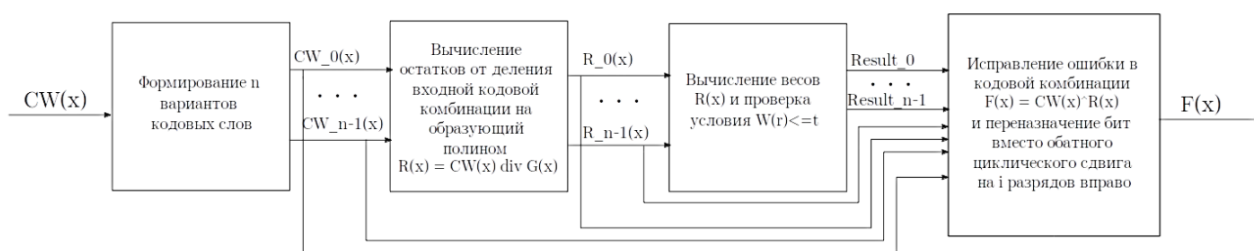


Рис. 4. Структурная схема для реализации циклического метода декодирования с параллельной структурой
Fig. 4. Block diagram for realization of cyclic decoding method with parallel structure

В отличие от предыдущей реализации, каждый циклический сдвиг кодового слова обрабатывается параллельно. Вместо выполнения циклического сдвига в результате невыполнения условия $w \leq t$ производится одновременное деление всех сдвигов кодовой комбинации на образующий полином. Для реализуемого кода с длиной кодовой комбинации $n = 15$ реализовано 15 вычислительных блоков, задействованных в процессе деления, и 15 вычислительных блоков, в которых производится подсчет весов для остатков от деления, полученных на предыдущем шаге, и проверка условия $w \leq t$.

Такая модификация реализации позволяет уменьшить время работы декодера с 627 тактов при частоте 257,2 МГц до 45 тактов с частотой 179,3 МГц (реализация № 3 в таблице). Процесс деления для одного сдвига при этом выполняется за 30 тактов, однако в данном случае все кодовые слова обрабатываются параллельно. Остальные этапы декодирования, включающие подсчет весов, проверку условия и исправление кодовой комбинации, выполняются за 15 тактов. Для увеличения быстродействия декодера, разрабатываемого по предложенной структуре, необходимо сократить время выполнения операции деления. Для решения данной задачи можно применить матричный алгоритм деления полиномов.

2.4. Применение матричного алгоритма деления полиномов

Результаты тестирования декодеров показывают, что выполнение циклического метода декодирования с использованием параллельной структуры осуществляется за 45 тактов. Согласно закону Амдала [16], при распараллеливании циклического метода декодирования не может осуществляться быстрее, чем за 30 тактов, поэтому для достижения наилучшего быстродействия необходимо заменить классический алгоритм деления полиномов матричным алгоритмом [17], который позволит выполнять деление за 1–2 такта.

Принцип матричного деления заключается в применении операции умножения по модулю 2 кодового слова на предвычисленную матрицу остатков от деления полиномов от x^0 до x^n на образующий полином. Такой подход позволяет получить формулу для вычисления остатка, которая на ПЛИС реализуется при помощи комбинационной схемы и будет выполняться за 1 такт, что позволит

увеличить быстродействие декодера. На рис. 5 приведена матрица для БЧХ-кода (15, 7, 5), которая использовалась в дальнейших реализациях.

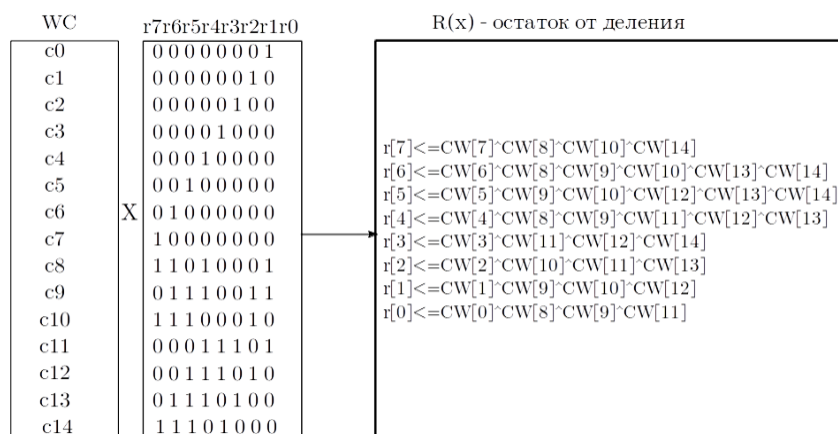


Рис. 5. Структурная схема матричного алгоритма для БЧХ-кода (15, 7, 5)

Fig. 5. Block diagram of matrix algorithm for BCH-code (15, 7, 5)

2.5. Модификация декодеров для увеличения быстродействия

Для полноценного сравнительного анализа реализованных устройств необходимо модифицировать все предшествующие реализации декодеров, заменив при этом классический алгоритм деления полиномов на матричный алгоритм. Это позволит сравнивать быстродействие декодеров при изменении одного вычислительного блока. Так, при реализации табличного метода декодирования с матричным делением полиномов (реализация № 4 в таблице) время работы сократилось с 36 тактов при частоте 275,2 МГц до 7 тактов с частотой 275,2 МГц, из которых за 1 такт происходит процесс деления входной кодовой комбинации на образующий полином и за 6 тактов – выбор шаблона ошибки из таблицы и исправление кодовой комбинации.

Также стоит отметить, что при реализации последовательной структуры циклического метода декодирования с применением матричного деления полиномов (реализация № 5 в таблице) время работы устройства сократилось с 627 тактов с частотой 192,8 МГц до 192 тактов с частотой 200,1 МГц. Каждая из 15 процедур деления выполняется за 1 такт. Процедура подсчета веса остатка от деления выполняется за 10 тактов, а процедура сложения сдвинутого кодового слова с соответствующим остатком и обратный циклический сдвиг реализуются за 27 тактов.

Реализация параллельной структуры с матричным алгоритмом деления (реализация № 6 в таблице) также позволяет увеличить быстродействие устройства с 45 тактов с частотой 179,3 МГц до 16 тактов с частотой 174,1 МГц, из которых 1 такт необходим на процесс деления и 15 тактов – на два оставшихся этапа декодирования.

Из сравнения видно, что замена одного алгоритма позволяет увеличить быстродействие декодера, при этом преодолеть предел в 30 тактов, который нельзя преодолеть распараллеливанием системы. Однако достигнуть улучшения характеристик декодера можно не только за счет применяемых алгоритмов, но и за счет особенностей ПЛИС.

2.6. Реализация асинхронного циклического метода декодирования с параллельной структурой и матричным делением полиномов

При проектировании схем с применением языков описания аппаратуры возможно использование двух подходов:

- подход с использованием секвенциальной логики;
- подход с использованием комбинационной логики.

Секвенциальная логика [18] представляет собой логику памяти устройств, и цифровые устройства формируются с учетом предыдущих значений. Декодеры, реализованные ранее, используют секвенциальную логику проектирования.

Последняя представленная реализация декодера использует не только все описанные выше модификации, позволяющие решить проблему низкого быстродействия при реализации циклического метода декодирования. Она также спроектирована на основе комбинационной логики. Схемы, построенные на комбинационной логике, используют текущие значения с входов для формирования значений на выходе. Такой подход позволит увеличить быстродействие декодера за счет отсутствия задержек, необходимых для установки сигналов в триггерах, которые используются в секвенциальной логике. Также данная модификация позволит уменьшить количество используемых декодером ресурсов.

По результатам моделирования работы декодера (реализация № 7 в таблице) на процесс декодирования необходим всего 1 такт. Это меньше, чем при реализации табличного метода декодирования с матричным делением полиномов, которому необходимо 7 тактов для выполнения всего алгоритма. Также в данном случае отсутствует необходимость в подключении памяти ПЛИС для хранения таблицы шаблонов ошибок. Недостатком такой реализации является низкая максимальная частота работы устройства.

3. Результаты

Таблица содержит результаты тестирования всех реализованных вариантов декодеров. Приводятся показатели по следующим характеристикам:

- количество тактов для декодирования кодовой комбинации;
- Max Frequency — максимальная частота, на которой способно работать устройство;
- T – минимальное время, необходимое для полного декодирования входного кодового слова;
- Logic Cells – количество занимаемых логических элементов ПЛИС;
- Memory Bits – объем занимаемой памяти в битах.

Для проведения эксперимента выбрана ПЛИС семейства Altera Cyclone III.

Сводная таблица параметров при различных подходах реализации декодера БЧХ-кода (15,7,5)

№	Тип реализации	Тип деления	Количество тактов выполнения	Max Frequency, МГц	T (время работы), нс	Logic Cells, (%)	Memory Bits, (%)
1.	Табличный метод	ЛРОС	36	275,2	131	65 (1%)	1 792 (1%)
2.	Последовательная	ЛРОС	627	192,8	3 252	211 (4%)	–
3.	Параллельная синхронная	ЛРОС	45	179,3	251	1 770 (34%)	–
4.	Табличный метод	Матричное деление	7	275,2	25	35 (< 1%)	1 792 (1%)
5.	Последовательная	Матричное деление	192	200,1	959	202 (4%)	–
6.	Параллельная синхронная	Матричное деление	16	174,1	91	1 549 (30%)	–
7.	Параллельная асинхронная	Матричное деление	1	87	12	446 (9%)	–

По результатам тестирования, приведенным в таблице, можно отметить, что при реализации на ПЛИС матричное деление полиномов является более быстродействующим в сравнении с классической реализацией деления через ЛРОС. Также можно заметить, что табличный метод декодирования является наилучшим вариантом как по быстродействию, так и по количеству используемых логических элементов. Однако в отличие от остальных реализаций декодеров необходимо обязательное подключение дополнительной памяти ПЛИС для хранения таблицы шаблонов ошибок размером 1 792 бита.

Поскольку размер таблицы будет увеличиваться в зависимости от длины кодовой комбинации и количества исправляемых ошибок в соответствии с формулой $2^k n$, то при увеличении длины кодового слова объем требуемой памяти будет возрастать.

В отличие от табличного метода декодирования при реализации циклического метода нет необходимости в подключении памяти ПЛИС, однако количество тактов для выполнения процедуры декодирования и количество логических ячеек будет больше (реализации № 2 и 3), чем при реализации табличного метода.

Также можно отметить, что реализация матричного метода деления полиномов имеет преимущества перед классическим делением при помощи ЛПРОС как по количеству тактов на всю процедуру декодирования, так и по количеству логических элементов (реализации № 1 и 4; 2 и 5; 3 и 6).

Из всех реализаций декодер, построенный на асинхронной параллельной структуре циклического метода декодирования с применением матричного алгоритма декодирования (реализация № 7), показывает лучший результат по времени выполнения процесса декодирования.

Заключение

В процессе исследований методов декодирования кодов BCH рассмотрены и реализованы табличный и циклический методы декодирования. Разработанные декодеры модифицированы путем изменения последовательной структуры циклического метода декодирования на параллельную, наиболее подходящую для реализации на ПЛИС. За счет изменения структуры декодера количество тактов для декодирования уменьшилось с 627 при частоте 192 МГц до 45 при частоте 179 МГц, что эквивалентно минимальному времени полного декодирования входного кодового слова 3,2 мкс и 251 нс соответственно, при этом самый длинный этап декодирования – деление полиномов – выполняется за 35 тактов.

Для достижения наилучшего быстродействия классический алгоритм деления полиномов заменен на матричный, что позволило уменьшить время декодирования при последовательной структуре декодера с 627 тактов до 192 при частоте 200 МГц (959 нс). При параллельной структуре с применением матричного алгоритма деления полиномов декодирование кодового слова осуществляется за 16 тактов при частоте 174 МГц (91 нс). Применение асинхронной реализации циклического метода декодирования с матричным делением и параллельной структурой декодера позволяет увеличить быстродействие работы устройства до 12 нс, что в ~ 2 раза быстрее, чем при реализации табличного метода с матричным делением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Золотарёв В.В., Овечкин Г.В. Помехоустойчивое кодирование. Методы и алгоритмы : справочник. М. : Горячая линия-Телеком, 2004. 126 с.
2. Морелос-Сарагоса Р.М. Искусство помехоустойчивого кодирования. Методы, алгоритмы, применение. М. : Техносфера, 2005. 320 с.
3. Digital Video Broadcasting (DVB); Frame structure channel coding and modulation for a second generation digital transmission system for cable systems (DVB-C2) // DVB Document A138. 2010. P. 111.
4. Протокол POCSAG. Протоколы пейджинговой системы связи. URL: https://studopedia.ru/2_56965_protokol-POCSAG.html (дата обращения: 23.05.2018)
5. Слюсар В. Передача данных с борта БПЛА: стандарты НАТО // Электроника: наука, технология, бизнес. 2010. № 3. С. 81–86.
6. Кодирование информации: двоичные коды : справочник / под ред. Н.Г. Березюка. Харьков : Вища школа, 1978. 251 с.
7. Поляков А.К. Языки VHDL И VERILOG в проектировании цифровой аппаратуры. М. : Солон-Пресс, 2003. 305 с.
8. Prakash G., Muthamizhse I. FPGA Implementation of Bose Chaudhuri Hocquenghem Code (Bch) Encoder and Decoder for Multiple Error Correction Control // International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology. 2016. V. 5, is. 3. P. 4467–4473.
9. Panda A., Sarik S., Awasthi A. FPGA implementation of encoder for (15, k) binary BCH code using VHDL and performance comparison for multiple error correction control // International Conference on Communication Systems and Network Technologies (CSNT-2012).
10. Rohith S., Pavithra S. FPGA Implementation of (15,7) BCH encoder and decoder for text message // International Journal of Research in Engineering and Technology. 2013. V. 2, is. 9. P. 209–214.

11. Hiremath M., Devi M. A novel method implementation of a FPGA using (n, k) binary BCH code // International Journal of Research in Engineering Technology and Management. 2014. Special is. P. 1–8.
12. Sunita M.S., Chiranth V., Akash H.C., Bhaaskaran V.S.K. Pipeline architecture for fast decoding of bch codes For nor flash memory // ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. 2015. V. 10, No. 8. P. 3397–3404.
13. Yathiraj H., Hiremath R. Implementation of BCH code (n, k) encoder and decoder for multiple error correction control // International Journal of Computer Science and Mobile Applications. 2014. V. 2, is. 5. P. 45–54.
14. Mohammed S., Abdulsada H. Design and implementation of 2 bits BCH error correcting codes using FPGA // Journal of Telecommunications. 2013. V. 19, is. 2. P. 11–17.
15. Lakhendra K. FPGA implementation of (15, 7) BCH encoder and decoder for audio message // International Journal of Engineering Sciences & Research Technology (IJESRT). 2014. No. 3 (8). P. 407–413.
16. Закон Амдала и будущее многоядерный процессоров. URL: <https://www.osp.ru/os/2009/04/9288815/> (дата обращения: 23.05.2018).
17. Буркатовская Ю.Б., Мальчуков А.Н., Осокин А.Н. Быстродействующие алгоритмы деления полиномов в арифметике по модулю два // Известия Томского политехнического университета. Разд. Автоматика. Вычислительная техника. 2006. Т. 309, вып. 1. С. 19–24
18. Харрис Д.М., Харрис С.Л. Цифровая схемотехника и архитектура компьютера. 2-е изд. Нью Йорк : Morgan Kaufman, 2013. 1662 с.

Поступила в редакцию 16 мая 2018 г.

Ryzhova S.E., Mytsko E.A., Malchukov A.N. (2018) COMPARATIVE ANALYSIS OF BCH-CODES DECODERS IMPLEMENTATIONS WITH PARAMETERS (15, 7, 5) USING FPGA COVARIATES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 46. pp. 98–107

DOI: 10.17223/19988605/46/12

In this paper we consider the possibility of implementing various decoder of the Bose-Chaudhuri-Hocquingham code (BCH-codes) using field-programmable gate array (FPGA). BCH codes are most common error-correcting codes that are used in many data transmission systems for detecting and correcting errors. BCH-codes with short-length of codewords and with a small number of correcting bits are used in automation systems of production. The code that implemented in the article has the following parameters:

- $n = 15$ – the length of the input code combination;
- $m = 7$ – the length of the information block;
- $k = 8$ – the length of the message control block;
- $t = 2$ – the number of errors, that code corrects;
- $d = 5$ – the maximum Hamming distance between two combinations;
- $g(x) = 111010001$ – the generating polynomial.

The paper describes implementations of two simplest decoding methods: a tabular, that based on the application of a table with precalculated errors syndromes; and cyclic, that based on the checking of the weight of remainder of the division of the codeword by the generating polynomial.

The simplest implementation is the tabular decoding method. The basis of this method is the table, which stores all possible values of error patterns up to the multiplicity of t . Addresses of error patterns are error syndromes. Having such the table, the decoding process is reduced to selecting a pattern from the table at the address, which is equal to the remainder of the division of the input codeword by the generating polynomial. The error pattern that was selected from the table is summed up modulo two with the input codeword. The corrected codeword arrives to the output of the decoder. The main drawback of this method it is the necessary to build the table and connect additional FPGA resources to store this table.

The second decoding method, which is easy to implement, is a cyclic method. This decoding method was designed for codes with the cyclicity property, and it suitable for BCH-codes. This method based on the checking the condition $w \leq t$ of the remainder of the division the input codeword by the generating polynomial.

For the first implementations of these methods, the process of division the input codeword by the generating polynomial is performed using a linear feedback register (LROS), and have a clear sequential structure. The maximum number of cycles required for the decoding process in devices, which was implemented based on table decoding methods is 36 cycles with frequency 275.2 MHz. And for decoder based on cyclic decoding method it is necessary 627 cycles with frequency 192.8.

The first modification was the using of the parallel structure is used instead of the sequential one, for the decoder based on the cyclic decoding method, to improve the performance. In this case, the number of cycles decreased from 627 and frequency 192.8 MHz to 45 cycles with frequency 179.3 MHz.

In order to make it possible to overcome the limit of the number of cycles, in accordance with Amdahl's law, was using a modification at the level of the used algorithms. For that, the classical procedure of polynomials division was replaced by the matrix division. It allows to perform the process of division the input codeword by the generator polynomial in 1 - 2 cycles. Such a replacement allowed reducing the number of cycles in implementations from 36 cycles with frequency 275.2 to 7 cycles with frequency 275.2 MHz; from 627 cycles with frequency 192.8 MHz to 192 cycles with frequency 200.1 MHz and in the end from 45 cycles with frequency 179.3 MHz to 16 cycles with frequency 174.1 MHz.

The latest modification was a changing of the design logic of devices. It was used for the decoder which based on the cyclic decoding method, had the parallel structure and matrix division of polynomials. For that decoder which based on a combinational logic it is enough the 1 cycle for decoding procedure.

In this article are given a summary table of results by the main characteristics of implemented devices, and it also has a full description of all the values, which are given in that table.

Keywords: error-correction codes; CBH-codes; cyclic decoding methods; table decoding methods, hardware-based devices; FPGA.

RYZHOVA Svetlana Evgenievna (Post-graduate student of Division for Information Technologies of School of Computer Science and Robotics of National Research Tomsk Polytechnic University, Russian Federation).

E-mail: r.svet93@yandex.ru

MYTSKO Evgeniy Alekseevich (Post-graduate student of Division for Information Technologies of School of Computer Science and Robotics of National Research Tomsk Polytechnic University, Russian Federation).

E-mail: evgenrus70@mail.ru

MALCHUKOV Andrey Nikolayevich (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Division for Information Technologies of School of Computer Science and Robotics of National Research Tomsk Polytechnic University, Russian Federation).

E-mail: jgs@tpu.ru

REFERENCES

1. Zolotarev, V.V. & Ovechkin, G.V. (2004) *Pomekhoustoychivoe kodirovanie. Metody i algoritmy* [Error-correcting coding. Methods and algorithms]. Moscow: Goryachaya liniya-Telekom.
2. Morelos-Saragosa, R.M. (2005) *Iskusstvo pomekhoustoychivogo kodirovaniya. Metody, algoritmy, primeneniye* [The Art of Error Correcting Coding]. Translated from english by V. Afanasiev. Moscow: Tekhnosfera.
3. Digital Video Broadcasting (DVB). (2010) *Frame structure channel coding and modulation for a second generation digital transmission system for cable systems (DVB-C2)*. DVB Document A138. 2010. pp. 111.
4. Anon. (n.d.) *Protokol POCSAG. Protokoly peydzhingovoy sistemy svyazi* [Protocol POCSAG. Protocols of paging communication system]. [Online] Available from: https://studopedia.ru/2_56965_protokol-POCSAG.html. (Accessed: 23rd May 2018)
5. Slyusar, V. (2010) *Peredacha dannykh s borta BPLA: standarty NATO* [Data transmission from aboard the UAV: NATO standards]. *Elektronika: nauka, tekhnologiya, biznes – Electronics: Science, Technology, Business*. 3. pp. 81–86.
6. Berezuk, N.G. (ed.) (1978) *Kodirovanie informatsii: dvoichnye kody* [Information coding: Binary codes]. Kharkov: Vishcha shkola.
7. Polyakov, A.K. (2003) *Yazyki VHDL I VERILOG v proektirovanii tsifrovoy apparatury* [Languages VHDL and VERILOG in the design of digital equipment]. Moscow: Solon-Press.
8. Prakash, G. & Muthamizhse, I. (2016) FPGA Implementation of Bose Chaudhuri Hocquenghem Code (Bch) Encoder and Decoder for Mul-tiple Error Correction Control. *International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology*. 5(3). pp. 4467–4473. DOI: 10.15680/IJRSET.2016.0503253
9. Panda, A., Sarik, S. & Awasthi, A. (2012) FPGA implementation of encoder for (15, k) binary BCH code using VHDL and performance comparison for multiple error correction control. *International Conference on Communication Systems and Network Technologies (CSNT-2012)*. May 12–13, 2012.
10. Rohith, S. & Pavithra, S. (2013) FPGA Implementation of (15,7) BCH encoder and decoder for text message. *International Journal of Research in Engineering and Technology*. 2(9). pp. 209–214. DOI: 10.15623/ijret.2013.0209031
11. Hiremath, M. & Devi, M. (2014) A novel method implementation of a FPGA using (n, k) binary BCH code. *International Journal of Research in Engineering Technology and Management*. Special is. pp. 1–8.
12. Sunita, M.S., Chiranth, V., Akash, H.C. & Bhaaskaran, V.S.K. (2015) Pipeline architecture for fast decoding of bch codes For nor flash memory. *ARN Journal of Engineering and Applied Sciences*. 10(8). pp. 3397–3404.
13. Yathiraj, H. & Hiremath, R. (2014) Implementation of BCH code (n, k) encoder and decoder for multiple error correction control. *International Journal of Computer Science and Mobile Applications*. 2(5). pp. 45–54.
14. Mohammed, S. & Abdulsada, H. (2013) Design and implementation of 2 bits BCH error correcting codes using FPGA. *Journal of Telecommunications*. 19(2). pp. 11–17.
15. Lakhendra, K. (2014) FPGA implementation of (15, 7) BCH encoder and decoder for audio message. *International Journal of Engineering Sciences & Research Technology (IJESRT)*. 3(8). pp. 407–413.
16. Chernyak, L. (2009) *Zakon Amdala i budushchee mnogoyadernyy protsessorov* [Amdahl's law and the future of multi-cores processors]. [Online] Available from: <https://www.osp.ru/os/2009/04/9288815/>. (Accessed: 23rd May 2018).
17. Burkatovskaya, Yu.B., Malchukov, A.N. & Osokin, A.N. (2006) *Bystrodeystvuyushchie algoritmy deleniya polinomov v arifmetike po modulyu dva* [The high-speed algorithms of the polynomials division in arithmetic module two]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Razd. Avtomatika. Vychislitel'naya tekhnika – Bulletin of Tomsk Polytechnic University*. 309(1). pp. 19–24
18. Kharris, D.M. & Kharris, S.L. (2013) *Tsifrovaya skhemotekhnika i arkhitektura komp'yutera* [Digital Design and Computer Architecture]. Translated from English. 2nd ed. New York: Morgan Kaufman.

МЕМОУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ

75 ЛЕТ ПРОФЕССОРУ АЛЕКСАНДРУ МИХАЙЛОВИЧУ ГОРЦЕВУ

1 января 2019 года исполнилось 75 лет известному ученому в области теории распознавания, теории массового обслуживания и обработки информации, главному редактору журнала «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика», доктору технических наук, профессору, Заслуженному работнику высшей школы РФ, Почетному работнику Высшего профессионального образования РФ, Заслуженному декану Томского государственного университета **Александру Михайловичу Горцеву**.



А.М. Горцев в 1961 г. поступил на радиофизический факультет Томского государственного университета. Окончил его в 1966 г. по специальности «Радиофизика и электроника», квалификация – «физик-радиоэлектроник». В 1967 г. поступил в аспирантуру по кафедре электронной вычислительной техники и автоматики ТГУ, которую закончил в 1970 г., защитив диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, посвященную вопросам радиоразведки (научный руководитель – профессор Г.А. Медведев). С 1970 г. – доцент кафедры прикладной математики факультета прикладной математики ТГУ, с 1978 г. по 2018 г. – заведующий кафедрой технической кибернетики (с 1995 г. – кафедра исследования операций) факультета прикладной математики и кибернетики. С 2018 г. по настоящее время является заведующим кафедрой прикладной математики института прикладной математики и компьютерных наук, образованной путем объединения кафедр исследования операций и прикладной математики. С 1983 по 2017 г. – декан факультета прикладной математики и кибернетики. На этом посту он эффективно занимался решением проблем обеспечения факультета современной материальной базой, подготовкой преподавательских кадров высшей квалификации и открытием новых специальностей и направлений бакалавриата и магистратуры.

В 1984 г. защитил диссертацию «Управляемые и адаптивные системы массового обслуживания с переменной структурой» на соискание ученой степени доктора технических наук. С 1986 г. – профессор по кафедре технической кибернетики (с 1995 г. – кафедра исследования операций, с 2018 г. – кафедра прикладной математики).

А.М. Горцев читал или читает общие курсы – математический анализ, методы оптимизации, теория игр и исследование операций, математическое программирование, а также спецкурсы – управляемые адаптивные системы массового обслуживания, теория разностных уравнений, марковские системы обслуживания, математические модели информационных потоков в телекоммуникационных системах. Опубликовал в соавторстве электронный учебно-методический комплекс по методам оптимизации и электронный учебник по теории игр. Он является руководителем ООП бакалавриата и магистратуры по направлению прикладная математика и информатика.

В начальный период своей научной деятельности Александр Михайлович занимался местоопределением движущихся излучающих объектов методом пассивной пеленгации и обработкой полученной информации. В 1971–1973 гг. занимался распознаванием образов: радиосигналов (в том числе радиолокационных и сигналов связи), принимаемых в присутствии шумов высокого уровня. Предложил алгоритм распознавания радиосигналов, основанный на статистической теории проверки гипотез.

В дальнейшем занялся исследованием управляемых систем массового обслуживания с переменной структурой, функционирующих в условиях как полной априорной определенности, так и полной или частичной априорной неопределенности (адаптивные системы). В 1985–1990 гг. научные интересы постепенно переместились в область исследования случайных потоков событий, являющихся одним из основных элементов систем массового обслуживания. Внедрение полученных результатов в спутниковые системы связи позволило существенно улучшить прогноз состояний бортовых систем. В рамках школы кибернетиков на факультете прикладной математики и кибернетики в начале 1990-х гг. оформилось направление по управляемым и адаптивным системам массового обслуживания с переменной структурой, получившее с середины 1990-х гг. дальнейшее развитие в исследовании дважды стохастических потоков событий по оценке их состояний и параметров.

А.М. Горцев подготовил 19 кандидатов наук, из них М.Е. Завгородняя, С.С. Катаева, Л.А. Нежелская, И.С. Шмырин в настоящее время работают доцентами на кафедре прикладной математики ИПМКН. Являлся научным консультантом докторской диссертации (Л.А. Нежелская).

Опубликовал в свыше 240 научных работ. Принимал участие в работе около 80 научных симпозиумов, конференций и школ-семинаров.

С 1989 г. по настоящее время является председателем и членом оргкомитетов ряда международных, всероссийских и всесоюзных научных конференций.

А.М. Горцев является председателем диссертационного совета по присуждению ученой степени кандидата и доктора наук по специальности 05.13.01 «Системный анализ, управление и обработка информации», членом диссертационного совета по присуждению ученой степени кандидата и доктора наук по специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

А.М. Горцев награжден орденом Дружбы, медалями «За трудовое отличие», «Ветеран труда», «За заслуги перед Томским университетом», юбилейной медалью «70 лет Томской области», юбилейной медалью «400 лет городу Томску», серебряной медалью «В благодарность за вклад в развитие ТГУ». Отмечен нагрудным знаком «За заслуги в сфере образования».

Дорогой Александр Михайлович!
Поздравляем Вас с юбилеем и желаем здоровья на многие годы!
Творческих Вам успехов!

*Институт прикладной математики и компьютерных наук ТГУ
Редакционная коллегия журнала «Вестник ТГУ. Управление,
вычислительная техника и информатика»
Кафедра прикладной математики*

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БУРКАТОВСКАЯ Юлия Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент отделения информационных технологий Инженерной школы информационных технологий и робототехники Национального исследовательского Томского политехнического университета. E-mail: tracey@tpu.ru

ВОРОБЕЙЧИКОВ Сергей Эрикович – доцент, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики и математического моделирования Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: sev@mail.tsu.ru

ГРЕКОВА Татьяна Ивановна – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: ti_gre@mail.ru

ГРИБОВ Евгений Николаевич – кандидат химических наук, старший научный сотрудник Института катализа им. Г.К. Борескова Сибирского отделения РАН (г. Новосибирск); старший преподаватель Новосибирского национального исследовательского государственного университета. E-mail: gribov@catalysis.ru

ГУБИНА Оксана Викторовна – аспирант Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: gov7@mail.ru

ДМИТРЕНКО Анатолий Григорьевич – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: dmitr@fpmk.tsu.ru

КАПУСТИН Евгений Викторович – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры комплексной информационной безопасности электронно-вычислительных систем Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. E-mail: kapustin_ev@mail.ru

КИРЕЕВА Анастасия Евгеньевна – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН (г. Новосибирск). E-mail: kireeva@ssd.sccc.ru

КОШКИН Геннадий Михайлович – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической кибернетики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: kgm@mail.tsu.ru

МАЛЬЦЕВА Наталья Викторовна – аспирант Института катализа им. Г.К. Борескова Сибирского отделения РАН (г. Новосибирск). E-mail: maltseva.n.v@catalysis.ru

МАНСИМОВ Камил Байрамали оглы – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической кибернетики Бакинского государственного университета; руководитель лаборатории «Управление в сложных динамических системах» Института систем управления НАН Азербайджана (г. Баку). E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

МАЛЬЧУКОВ Андрей Николаевич – кандидат технических наук, доцент отделения информационных технологий Инженерной школы информационных технологий и робототехники Национального исследовательского Томского политехнического университета. E-mail: jgs@tpu.ru

МЫЦКО Евгений Алексеевич – аспирант отделения информационных технологий Инженерной школы информационных технологий и робототехники Национального исследовательского Томского политехнического университета. E-mail: evgenrus70@mail.ru

НАДЖАФОВА Малахат Яшар кызы – аспирант Института систем управления НАН Азербайджана (г. Баку). E-mail: nacafova.melahet@mail.com

НАУМОВ Валерий Арсентьевич – кандидат физико-математических наук, научный руководитель Исследовательского Института Инноваций (Финляндия, г. Хельсинки). E-mail: valeriy.naumov@pfu.fi

НЕЖЕЛЬСКАЯ Людмила Алексеевна – доцент, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: ludne@mail.ru

ОСИПОВА Марина Анатольевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и анализа Дальневосточного федерального университета; научный сотрудник Института прикладной математики ДВО РАН (г. Владивосток). E-mail: mao1975@list.ru

ПАРАЕВ Юрий Иванович – доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: paraev@mail.ru

ПОЛУЭКТОВА Ксения Олеговна – аспирант кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: poluekt.kseni@mail.ru

РУБАН Анатолий Иванович – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры информатики Института космических и информационных технологий Сибирского федерального университета (г. Красноярск). E-mail: ai-rouban@mail.ru

РЫЖОВА Светлана Евгеньевна – аспирант отделения информационных технологий Инженерной школы информационных технологий и робототехники Национального исследовательского Томского политехнического университета. E-mail: r.svet93@yandex.ru

САБЕЛЬФЕЛЬД Карл Карлович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН (г. Новосибирск); профессор Новосибирского национального исследовательского государственного университета. E-mail: karl@osmf.sccc.ru

САМУЙЛОВ Константин Евгеньевич – профессор, доктор технических наук, директор Института прикладной математики и телекоммуникаций Российского университета дружбы народов; старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН (ФИЦ ИУ РАН) (г. Москва). E-mail: samuylov-ke@rudn.ru

ТУМАШКИНА Диана Александровна – магистрант кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: diana1323@mail.ru

ШКУРКИН Алексей Сергеевич – доцент, кандидат технических наук, ведущий программист отдела программного обеспечения Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: shkurkin@mail.ru

ЦИЦИАШВИЛИ Гурами Шалвович – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры, геометрии и анализа Дальневосточного федерального университета; главный научный сотрудник Института прикладной математики ДВО РАН (г. Владивосток). E-mail: guram@iam.dvo.ru

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

2019. № 46

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Редакторы-переводчики: Г.М. Кошкин; В.Н. Горенинцева
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано к печати 25.03.2019 г. Формат 60x84^{1/8}.
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 13,02.
Тираж 250 экз. Заказ №3683. Цена свободная.

Дата выхода в свет 29.03.2019 г.

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru