

Ю.И. Параев, Т.И. Грекова, К.О. Полуэктова

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОДНОСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИКОЙ ПРИ СЛУЧАЙНОМ ИЗМЕНЕНИИ ОСНОВНОГО КАПИТАЛА И ТРУДОВЫХ РЕСУРСОВ

Рассматривается задача оптимального управления односекторной экономикой при случайном изменении фондовооруженности труда и трудовых ресурсов. В качестве критерия оптимальности выбирается максимум среднего значения непроизводственного потребления на заданном периоде производства. Решение проводится с помощью метода динамического программирования.

Ключевые слова: односекторная экономика; основной капитал; трудовые ресурсы; фондовооруженность труда; непроизводственное потребление; оптимальное управление; динамическое программирование.

Проблема управления односекторной экономикой восходит к [1, 2]. Ей посвящено большое количество работ. В них рассматриваются и решаются разные варианты задач, в том числе и задачи оптимального управления такой экономикой (см., напр.: [3–7]). Естественным продолжением этих исследований является решение задач с учетом каких-либо случайных возмущений, действующих в процессе производства.

Состояние односекторной экономики определяется двумя величинами: основным капиталом и трудовыми ресурсами. Вообще говоря, изменение основного капитала во времени происходит случайным образом из-за таких факторов, как случайный износ основных производственных фондов, приобретение новых фондов, цена на которые зависит от курсов валют, производственная неопределенность, экономическая конъюнктура и т.п. Трудовые ресурсы также могут изменяться случайным образом за счет экономических факторов, а также по демографическим причинам, из-за миграции населения и т.п. В [8] на основании изучения статистических данных приводится определенное обоснование того, что влияние экзогенных случайных факторов на экономическую динамику можно моделировать процессом броуновского движения.

В настоящей работе задача оптимального управления односекторной экономикой при случайном изменении основного капитала и трудовых ресурсов решена в программной форме, получены формулы для моментов переключения управления и получена оценка максимального среднего значения непроизводственного потребления.

1. Постановка задачи

Состояние экономики определяется следующими величинами: $K(t)$ – основной капитал, $L(t)$ – трудовые ресурсы, $C(t)$ – непроизводственное потребление, а также производственной функцией $Y(K, L)$. Значение $Y(K, L)$ есть валовый продукт, произведенный в единицу времени, т.е. $Y(K, L)\Delta t$ – валовый продукт, произведенный за время Δt . Часть этого продукта $I\Delta t = uY\Delta t$ идет на увеличение основного капитала, а часть $S\Delta t = (1 - u)Y\Delta t$ – на увеличение непроизводственного потребления $C(t)$. Таким образом, управляющим параметром здесь является коэффициент u , определяющий долю валового продукта, которая идет на увеличение основного капитала. При этом

$$0 \leq u \leq 1. \quad (1)$$

В результате в детерминированном случае изменение экономики во времени описывается уравнениями [6]

$$\begin{aligned}\dot{K} &= uY(K, L) - \lambda K(t), \quad K(0) = K_0 > 0, \\ \dot{C} &= \rho C + (1-u)Y(K, L), \quad C(0) = 0, \\ \dot{L} &= \nu L, \quad L(0) = L_0,\end{aligned}\tag{2}$$

где $\lambda (\geq 0)$ – коэффициент амортизации, $\rho (\geq 0)$ – норма дисконтирования, ν – темп изменения трудовых ресурсов.

Для дальнейшего исследования вводятся переменные: $k(t) = K(t)/L(t)$ – фондовооруженность труда, $c(t) = C(t)/L(t)$ – непроизводственное потребление, приходящиеся на одного работника, и функция $F(k) = Y/L$ – производительность труда. Для этих переменных на основании (2) можно получить уравнения

$$\begin{aligned}\dot{k} &= -\mu k + uF(k), \quad k(0) = k_0 \\ \dot{c} &= \delta c + (1-u)F(k), \quad c(0) = 0,\end{aligned}\tag{3}$$

где $\mu = \lambda + \nu$, $\delta = \rho - \nu$. Далее будем считать, что $\mu = \lambda + \nu > 0$ и $\delta = \rho - \nu > 0$. Это означает, что если трудовые ресурсы возрастают ($\nu > 0$), то темп их роста не может превышать норму дисконтирования ρ . Если трудовые ресурсы убывают ($\nu < 0$), то темп их убывания не может превышать коэффициент амортизации λ . Иначе возникают «экзотические» варианты.

Детерминированная задача: в течение заданного конечного планируемого периода производства $[0, T]$ найти такое управление $u(t)$ с учетом (1) для уравнений (3), при котором величина $c(T)$ максимальна.

В стохастическом случае односекторная экономика описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{K} &= uY(K, L) - \lambda K(t) + \sigma_K K \xi_K(t), \quad K(0) = K_0 > 0, \\ \dot{C} &= \rho C + (1-u)Y(K, L), \quad C(0) = 0, \\ \dot{L} &= \nu L + \sigma_L L \xi_L(t), \quad L(0) = L_0 > 0.\end{aligned}\tag{4}$$

Здесь $\xi_K(t)$ и $\xi_L(t)$ – стандартные независимые между собой белые гауссовские шумы, σ_K и σ_L – соответствующие коэффициенты волатильности. Такое включение в модель случайных воздействий достаточно традиционно в экономико-математических задачах [8–11].

Из (4) с помощью формулы Ито можно получить уравнения для фондовооруженности $k = K/L$ и непроизводственного потребления $c = C/L$:

$$\begin{aligned}\dot{k} &= -\mu k + uF(k) + \sigma_K k \xi_K(t) - \sigma_L k \xi_L(t), \quad k(0) = k_0, \\ \dot{c} &= \delta c + (1-u)F(k) - \sigma_L c \xi_L(t), \quad c(0) = 0.\end{aligned}\tag{5}$$

Здесь $\mu = \lambda + \nu + \sigma_K \sigma_L - \sigma_L^2$, $\delta = \rho - \nu + \sigma_L^2$, $k_0 = K_0/L_0$, $F(k) = Y/L$ – производительность труда (валовый продукт на одного работника). Далее предполагается, что $\mu > 0$ и $\delta > 0$.

Стохастическая задача: в течение заданного интервала времени $[0, T]$ найти такое управление $u(t)$ с учетом (1) для уравнений (5), при котором среднее значение величины $c(T)$ максимально.

Далее будет использоваться производственная функция Кобба–Дугласа $Y(K, L) = AK^\alpha L^\beta$, где A – масштаб темпа производства ($A > 0$), α – коэффициент эластичности по основным фондам, $\beta = 1 - \alpha$ – коэффициент эластичности по трудовым ресурсам ($\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$). Тогда $F(k) = Y/L = AK^\alpha$. Предполагается, что переменные K , L , C и, следовательно, k и c доступны измерению в каждый момент времени.

2. Решение стохастической задачи

Для решения задачи используем метод динамического программирования. Введем функцию Беллмана $s(k, c; t, T)$ – среднее значение величины $c(T)$ при условии, что процесс продолжается на интервале времени $[t, T]$ с начальными условиями $k(t) = k$ и $c(t) = c$, и на этом интервале применяется оптимальное управление. Для этой функции можно записать уравнение Беллмана [12]:

$$-\frac{\partial s(k, c; t, T)}{\partial t} = \max_{0 \leq u(t) \leq 1} \left[\frac{\partial s(k, c; t, T)}{\partial k} (uF(k) - \mu k) + \frac{\partial s(k, c; t, T)}{\partial c} (\delta c + (1-u)F(k)) + q(k, c) \right], \quad (6)$$

$$s(k, c; T, T) = c.$$

Здесь

$$q(k, c) = \frac{1}{2} (\sigma_K^2 + \sigma_L^2) k^2 \frac{\partial^2 s(k, c; t, T)}{\partial k^2} + \sigma_L^2 k c \frac{\partial^2 s(k, c; t, T)}{\partial k \partial c} + \frac{1}{2} \sigma_L^2 c^2 \frac{\partial^2 s(k, c; t, T)}{\partial c^2}. \quad (7)$$

Это уравнение детерминированное, а c и k – просто аргументы функции. Из его решения получается решение задачи. Уравнение (6) перепишем в виде:

$$-\frac{\partial s(k, c; t, T)}{\partial t} = \max_{0 \leq u(t) \leq 1} \left[\left(\frac{\partial s}{\partial k} - \frac{\partial s}{\partial c} \right) u F(k) - \mu k \frac{\partial s}{\partial k} + \frac{\partial s}{\partial c} (\delta c + F(k)) + q(k, c) \right], \quad (8)$$

$$s(k, c; T, T) = c.$$

Максимум правой части этого уравнения по u с учетом (1) достигается при

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{\partial s}{\partial k} > \frac{\partial s}{\partial c}, \\ u_{oc}, & \text{если } \frac{\partial s}{\partial k} = \frac{\partial s}{\partial c}, \\ 0, & \text{если } \frac{\partial s}{\partial k} < \frac{\partial s}{\partial c}. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь u_{oc} – так называемое особое управление [13, 14], которое будет определено ниже. Временной участок, где используется особое управление, называется магистралью.

Можно допустить, что если коэффициенты σ_K и σ_L малы, то решение стохастической задачи будет близко к решению детерминированной задачи. Последняя задача с помощью принципа максимума Понтрягина подробно решена в [6]. Полученное решение состоит в том, что интервал $[0, T]$ точками t_1 и t_2 ($0 < t_1 < t_2 < T$) разбивается на три интервала: $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ и $[t_2, T]$. Интервал $[0, t_1]$ соответствует выходу на магистраль, интервал $[t_1, t_2]$ – магистрали (если она существует), интервал $[t_2, T]$ – заключительному этапу (сходу с магистрали). На магистрали $k = k_{oc} = \text{const}$, причем

$$k_{oc}^{1-\alpha} = \frac{\alpha A}{\delta + \mu}, \quad u_{oc} = \frac{\mu k}{F}. \quad (10)$$

Далее рассматривается основной вариант, когда $k(0) < k_{oc}$ и на интервале $[0, t_1]$ $u = 1$. На заключительном интервале $[t_2, T]$ $u = 0$. При этом предполагается, что период производства $[0, T]$ достаточно велик. Таким образом, структура оптимального управления имеет вид:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < t < t_1, \\ u_{oc} & \text{при } t_1 < t < t_2, \\ 0 & \text{при } t_2 < t < T. \end{cases} \quad (11)$$

Фактически получается, что решение детерминированной задачи сводится к нахождению значений t_1 и t_2 . Можно предположить, что в стохастическом случае при достаточно малых коэффициентах σ_K и σ_L решение будет близко к решению детерминированной задачи, т.е. структура оптимального управления имеет вид (11). Таким образом, решение стохастической задачи также сводится к нахождению значений t_1 и t_2 .

Решение уравнения (8) начнем с правого конца. Обозначим через $s_1(k, c; t, T)$, $s_2(k, c; t, T)$, $s_3(k, c; t, T)$ функции Беллмана, если момент t относится к интервалам $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, T]$ соответственно. Обозначим также $k_i = k(t_i)$ и $c_i = c(t_i)$, $i = 1, 2$.

3. Сход с магистрали

На интервале $[t_2, T]$ $u = 0$. Поэтому уравнение (8) принимает вид:

$$-\frac{\partial s_3(k, c; t, T)}{\partial t} = -\mu k \frac{\partial s_3(k, c; t, T)}{\partial k} + \frac{\partial s_3(k, c; t, T)}{\partial c} (\delta c + F(k)) + q(k, c),$$

$$s_3(k, c; T, T) = c. \quad (12)$$

Пользуясь методом разделения переменных, его решение будем искать в виде:

$$s_3(k, c; t, T) = ce^{\delta(T-t)} + F(k)w_3(t, T), \quad (13)$$

где $w_3(t, T)$ – искомая функция, причем такая, что $w_3(T, T) = 0$. Подставляя (13) в (7) и (12) и сокращая подобные слагаемые, получаем

$$-F(k)\dot{w}_3(t, T) = -\mu k F'(k)w_3(t, T) + e^{\delta(T-t)}F(k) + \frac{1}{2}\sigma k^2 F''(k)w_3(t, T),$$

где $\sigma = (\sigma_K^2 + \sigma_L^2)/2$. Учитывая, что

$$F(k) = Ak^\alpha, \quad F'(k) = \alpha Ak^{\alpha-1} = \alpha F(k)/k, \quad F''(k) = \alpha(\alpha-1)Ak^{\alpha-2} = -\alpha\beta F(k)/k^2,$$

из последнего получаем

$$-F(k)\dot{w}_3(t, T) = -\alpha\mu F(k)w_3(t, T) - \alpha\beta\sigma F(k)w_3(t, T) + F(k)e^{\delta(T-t)}.$$

Сократив здесь на $F(k)$, приходим к уравнению

$$-\dot{w}_3(t, T) = -\theta w_3(t, T) + e^{\delta(T-t)}, \quad w_3(T, T) = 0,$$

где $\theta = \alpha\mu + \alpha\beta\sigma$. Параметр σ можно назвать обобщенным коэффициентом волатильности. Решение последнего уравнения примет вид:

$$w_3(t, T) = \frac{e^{\delta(T-t)} - e^{-\theta(T-t)}}{\delta + \theta}. \quad (14)$$

4. Магистраль

На магистрали уравнение (8) принимает вид:

$$-\frac{\partial s_2(k, c; t, T)}{\partial t} = -\mu k \frac{\partial s_2(k, c; t, T)}{\partial k} + \frac{\partial s_2(k, c; t, T)}{\partial c} (\delta c + F(k)) + q(k, c). \quad (15)$$

Согласно (4) на интервале $[t_1, t_2]$ должно выполняться условие

$$\frac{\partial s_2(k, c; t, T)}{\partial k} \equiv \frac{\partial s_2(k, c; t, T)}{\partial c}. \quad (16)$$

Решение уравнения (15) будем искать в виде:

$$s_2(k, c; t, T) = (c + H(k))e^{\delta(T-t)} + B, \quad (17)$$

где $H(k)$ – искомая функция, B – какая-то константа. Подставляя (17) в (7) и (15), сокращая на $e^{\delta(T-t)}$ и приводя подобные члены, получаем

$$-\delta H(k) = -\mu k H'(k) + F(k) + \sigma k^2 H''(k). \quad (18)$$

Из (16) и (17) видно, что для выполнения условия (16) необходимо, чтобы $H'(k) = 1$. Если последнее выполняется, то и $H''(k) = 0$. Поэтому из (18) следует

$$H(k) = \frac{F - \mu k}{\delta}. \quad (19)$$

К выражению (19) еще раз применим условие $H' = 1$. Получаем

$$H'(k) = \frac{\alpha Ak^{\alpha-1} - \mu}{\delta} = 1.$$

Отсюда следует выражение (10) для $k = k_{oc}$. Поскольку на интервале $[t_1, t_2]$ $k_{oc} = const$, то из (3) при $\sigma_K = \sigma_L = 0$ следует выражение (10) для u_{oc} .

Константа B в (17) определяется из условия $s_2(k_2, c_2; t_2, T) = s_3(k_2, c_2; t_2, T)$. Это следует из принципа оптимальности Беллмана. Подставляя сюда (13) и (17), получаем

$$B = F(k_2)w_3(t_2, T) - H(k_2)e^{\delta(T-t_2)}.$$

Подставляя это выражение в (17), получаем окончательно с учетом (14)

$$s_2(k; t, T) = (c + H(k))e^{\delta(T-t)} + (Q(k_2) - H(k_2))e^{\delta(T-t_2)} - Q(k_2)e^{-\theta(T-t_2)}, \quad (20)$$

где

$$Q(k) = \frac{F(k)}{\delta + \theta}.$$

Заметим, что в этом выражении $t < t_2$ и $k_2 = k_{oc}$.

Поскольку последнее выражение зависит от параметра t_2 , то естественно выбрать его так, чтобы достигался максимум. Вычислим первую производную и приравняем ее к нулю:

$$\frac{ds_2}{dt_2} = -\delta(Q(k_2) - H(k_2))e^{\delta(T-t_2)} - \theta Q(k_2)e^{-\theta(T-t_2)} = 0.$$

Отсюда получаем

$$e^{-(\delta+\theta)(T-t_2)} = \frac{\delta(H(k_2) - Q(k_2))}{\theta Q(k_2)} \quad (21)$$

и

$$T - t_2 = r_3 = \frac{1}{\delta + \theta} \ln \left(\frac{\theta Q(k_2)}{\delta(H(k_2) - Q(k_2))} \right). \quad (22)$$

Таким образом, длина интервала $[t_2, T]$ равна значению r_3 . Анализ второй производной функции $s_2(k, c; t_2, T)$ показывает, что при условии (21) она всегда отрицательна и, следовательно, эта функция имеет максимум. Подставляя (21) в (20), получаем окончательно

$$s_2(k; t, T) = (c + H(k))e^{\delta(T-t)} + e^{\delta(T-t_2)} \frac{\theta + \delta}{\theta} (Q(k_2) - H(k_2)).$$

5. Выход на магистраль

На интервале $[0, t_1]$ $u = 1$. Поэтому согласно (2) непроизводственное потребление $C(t) \equiv 0$. Следовательно, $c(t) \equiv 0$ и $s_1(k, c; t, t_1) = 0$. Согласно принципу оптимальности имеем

$$s_1(k, c; t, T) \equiv s_1(k, c; t, t_1) + s_2(k_1, c_1; t_1, T) = s_2(k_1, c_1; t_1, T).$$

Здесь $k_1 = k_{oc}$ и $c_1 = 0$. На интервале $[0, t_1]$ уравнение (6) имеет вид:

$$-\frac{\partial s_1(k, c; t, T)}{\partial t} = \frac{\partial s_1(k, c; t, T)}{\partial k} (F(k) - \mu k) + \delta c \frac{\partial s_1(k, c; t, T)}{\partial c} + q(k, c),$$

$$s_1(k, c; T, T) = s_2(k, c; T, T).$$

Поскольку $s_1(k, c; t, t_1) = \text{const}$, то слагаемым $q(k, c)$ можно пренебречь. В результате получаем уравнение в частных производных первого порядка, которое можно решать методом характеристик [15]. Соответствующие характеристические уравнения имеют вид:

$$\dot{k} = -\mu k + F(k), \quad k(0) = k_0,$$

$$\dot{c} = \delta c, \quad c(0) = 0.$$

Отсюда следует, что $c(t) \equiv 0$, а решение первого уравнения имеет вид:

$$k^\beta(t) = \frac{A}{\mu} (1 - e^{-\beta\mu(t-t_0)}) + k_0^\beta e^{-\beta\mu(t-t_0)}.$$

Это решение получается в результате подстановки: $k(t) = \exp\{y(t) + z(t)\}$, где $y(t)$ и $z(t)$ – произвольные функции.

Момент t_1 определяется из условия $k(t_1) = k_{oc}$ или

$$\frac{A}{\mu}(1 - e^{-\beta\mu t_1}) + k_0^\beta e^{-\beta\mu t_1} = k_{oc}^\beta.$$

Отсюда

$$t_1 = \frac{1}{\mu\beta} \ln \left(\frac{A - \mu k_0^\beta}{A - \mu k_{oc}^\beta} \right). \quad (23)$$

Если обозначить через r_1 , r_2 и r_3 длины интервалов $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ и $[t_2, T]$ соответственно ($r_1 + r_2 + r_3 = T$), то $r_1 = t_1$ определяется из (23), r_3 определяется из (22) и $r_2 = T - r_1 - r_3$. Отсюда, в частности, необходимо для существования рассматриваемого решения, чтобы $T > r_1 + r_3$. Полученное решение относится к случаю, когда $k(0) < k_{oc}$. Аналогично можно рассмотреть вариант, когда $k(0) > k_{oc}$. Соответствующее решение приводить не будем. Отметим только, что в этом случае на интервале $[0, t_1]$ $u = 0$.

Заключение

В данной работе решена задача оптимального управления односекторной экономикой при случайном изменении основного капитала и трудовых ресурсов. Получено управление в программной форме (4).

Проведен анализ влияния случайных составляющих, из которого следует, что случайные составляющие влияют только на длину интервала $[t_2, T]$, определяемую в (22). Из данной формулы видно, что эта длина убывает до нуля с ростом обобщенного коэффициента волатильности σ .

Максимальное среднее значение непроизводственного потребления на интервале $[0, T]$ составляет

$$s(k_0, 0; 0, T) = s_2(k_1, 0; t_1, T) = H(k_1)e^{\delta(T-t_1)} + e^{\delta(T-t_2)} \frac{\theta + \delta}{\theta} (Q(k_2) - H(k_2)),$$

где $k_1 = k_2 = k_{oc}$. При увеличении параметра σ это значение убывает. Это объясняется тем, что при увеличении σ уменьшается интервал $[t_2, T]$ и увеличивается интервал $[t_1, t_2]$, где прирост непроизводственного потребления меньше, чем на интервале $[t_2, T]$ ($u_{oc} < 1$). При этом нижняя граница равна

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} s(k_0, 0; 0, T) = H(k_1)e^{\delta(T-t_1)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Эрроу К. Применение теории управления к экономическому росту // Математическая экономика. М. : Мир, 1974. С. 7–45.
2. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. М. : Наука, 1984. 296 с.
3. Демин Н.С., Кулешова Е.В. Максимизация потребления работодателей в случае производственной функции общего вида // Обзорные прикладной и промышленной математики. 2004. Т. 11, вып. 2. С. 326–327.
4. Демин Н.С., Кулешова Е.В. Управление односекторной экономикой на конечном интервале времени с учетом потребления работодателей // Автоматика и телемеханика. 2008. № 9. С. 140–155.
5. Демин Н.С., Кулешова Е.В. Принцип магистрали в задаче управления односекторной экономикой при наличии ограничений на накопление и потребление // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 2 (7). С. 5–23.
6. Параев Ю.И., Грекова Т.И., Данилюк Е.Ю. Аналитическое решение задачи оптимального управления односекторной экономикой на конечном интервале времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 4 (17). С. 5–15.
7. Анисимов А.В., Григоренко Н.Л., Лукьянова Л.Н. Задача оптимального управления для односекторной модели экономического роста со смешанными ограничениями // Прикладная математика и информатика : труды факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. М. : МАКС Пресс, 2013. Т. 44. С. 5–21.
8. Соловьев В.И. Стохастические методы в экономике и финансах. М. : ГУУ, 2000. 154 с.
9. Merton R.C. Life time portfolio selection under uncertainty: the continuous time case // Review of Economics and Statistics. 1969. V. 51, No. 3. P. 247–257.
10. Merton R.C. An asymptotic theory of growth under uncertainty // Review of Economic Studies. 1975. V. 42, No. 3. P. 375–393.
11. Merton R.C., Samuelson P.A. Continuous-time finance. Cambridge, MA : Basil Blackwell, 1990. 700 p.
12. Параев Ю.И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М. : Сов. радио, 1976. 184 с.

13. Параев Ю.И. Об особом управлении в оптимальных процессах, линейных относительно управляющих воздействий // Автоматика и телемеханика. 1962. № 9. С. 1202–1209.
14. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М., 1973. 256 с.
15. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М. : ГИФМЛ. 1966. 260 с.

Поступила в редакцию 24 апреля 2018 г.

Paraev Ju.I., Grekova T.I., Poluektova K.O. (2019) OPTIMAL CONTROL OF ONE-SECTOR ECONOMY UNDER RANDOM VARIATION OF FIXED CAPITAL AND LABOR RESOURCES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 46. pp. 12–19

DOI: 10.17223/19988605/46/2

The problem of optimal control of one-sector economy under random variation of fixed capital and labor resources is considered. The state of the economy is characterized by such variables: the fixed capital $K(t)$, the labor resources $L(t)$, the non-productive consumption $C(t)$, and also the production function $Y(K, L)$. In a stochastic case change of these sizes is described by the equations

$$\begin{aligned}\dot{K} &= uY(K, L) - \lambda K(t) + \sigma_K K \xi_K(t), \quad K(0) = K_0 > 0, \\ \dot{C} &= \rho C + (1 - u)Y(K, L), \quad C(0) = 0, \\ \dot{L} &= \nu L + \sigma_L L \xi_L(t), \quad L(0) = L_0 > 0,\end{aligned}\tag{1}$$

where $\lambda (\geq 0)$ is the depreciation rate, $\rho (\geq 0)$ is the discount rate, $\xi_K(t)$ and $\xi_L(t)$ denote the standard independent white Gaussian noises, σ_K and σ_L are the coefficients of volatility correspondingly. Here u is the control parameter defining the share of the product produced, which is used to increase in fixed capital. Then size $1 - u$ defines part of a product which goes on increase in non-productive consumption. It is obvious that $0 \leq u \leq 1$.

For research variables are entered: $k(t) = K(t)/L(t)$ is the capital-labor ratio and $c(t) = C(t)/L(t)$ – the non-productive consumption falling on one worker. For these variables on the basis of Ito's formula from (1) the equations turn out

$$\begin{aligned}\dot{k} &= -\mu k + uF(k) + \sigma_K k \xi_K(t) - \sigma_L k \xi_L(t), \quad k(0) = k_0, \\ \dot{c} &= \delta c + (1 - u)F(k) - \sigma_L c \xi_L(t), \quad c(0) = 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Here $\mu = \lambda + \nu + \sigma_K \sigma_L - \sigma_L^2$, $\delta = \rho - \nu + \sigma_L^2$, $k_0 = K_0/L_0$, $F(k) = Y(K, L)/L$ is the labor productivity (a gross product on one worker). Further it is supposed that $\mu > 0$ and $\delta > 0$. In this study the production function of Kobb–Douglas is considered, that is $Y(K, L) = AK^\alpha L^\beta$, where A denotes the scale of rate of production ($A > 0$), α is the elasticity coefficient on fixed capital, β is the elasticity coefficient on labor resources. From here $F(k) = Ak^\alpha$. It is supposed that the planned period of production $[0, T]$ is given and rather great.

The task consists in finding on the time interval $[0, T]$ for system (2) of such control $u(t)$ satisfying the condition $0 \leq u \leq 1$ at which the average value of $c(T)$ is maximum. This problem is solved by making use of a method of dynamic programming. Bellman's function $s(k, c; t, T)$ is considered, which is an average value of $c(T)$ provided that the process proceeds on the interval $[t, T]$ with initial conditions $k(t) = k$ and $c(t) = c$. The solution of a task we obtain by solving Bellman's equation.

This solution consists in the fact that the interval $[0, T]$ by the points t_1 and t_2 ($0 < t_1 < t_2 < T$) is divided into three intervals: $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, and $[t_2, T]$. The interval $[0, t_1]$ corresponds to the output to the highway, the interval $[t_1, t_2]$ – to the highway (if it exists), the interval $[t_2, T]$ – to the final stage (to a descent from the highway). The highway is the time site, where special control u_{oc} is used. On the highway $k = k_{oc} = \text{const}$, and

$$k_{oc}^{1-\alpha} = \frac{\alpha A}{\delta + \mu}, \quad u_{oc} = \frac{\mu k_{oc}}{F(k_{oc})}.$$

If $k(0) < k_{oc}$, then $u = 1$ on the interval $[0, t_1]$ and $u = 0$ on the interval $[t_2, T]$. As a result, it turns out that the control structure is determined by values of t_1 and t_2 . The moment t_1 depends only on the initial condition $k(0)$ and doesn't depend on a stochastic component. The moment t_2 doesn't depend on the initial condition, but depends on the volatility coefficients σ_K and σ_L . Thus with growth of these coefficients the interval length $[t_2, T]$ and average value of non-productive consumption decrease.

Keywords: the one-sector economy; fixed capital; labor resources; non-productive consumption; optimal control; dynamic programming.

PARAEV Jury Ivanovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: paraev@mail.ru

GREKOVA Tatiana Ivanovna (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: ti_gre@mail.ru

POLUEKTOVA Kseniya Olegovna (Post-graduate student, National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: poluekt.kseni@mail.ru

REFERENCES

1. Arrow, K. (1974) *Primenenie teorii upravleniya k ekonomicheskomu rostu* [Application of control theory to economic growth]. In: Mityagin, B.S. (ed.) *Matematicheskaya ekonomika* [Mathematical Economics]. Moscow: Mir. pp. 7–45.
2. Ashmanov, S.A. (1984) *Vvedenie v matematicheskuyu ekonomiku* [Introduction to mathematical economy]. Moscow: Nauka.
3. Demin, N.S. & Kuleschova, E.V. (2004) Maksimizatsiya potrebleniya rabotodateley v sluchae proizvodstvennoy funktsii obshchego vida [Maximizing consumption of employers in case of production function of a general view]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki*. 11(2). pp. 326–327.
4. Demin, N.S. & Kuleschova, E.V. (2008) Control of single-sector economy over a finite time interval with allowance for employer consumption. *Automation and Remote Control*. 9. pp. 140–155. DOI: 10.1134/S0005117908090117.
5. Demin, N.S. & Kuleschova, E.V. (2009) Turnpike principle in a problem of management of one-sector economy in the presence of restrictions on saving and consumption. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(7). (In Russian).
6. Paraev, Yu.I., Grekova, T.I. & Danilyuk, E.Yu. (2011) The analytical decision of a problem of optimum control one-sector economy on a final interval of time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(17) (In Russian).
7. Anisimov, A.V., Grigorenko, N.L. & Lukyanova, L.N. (2013) Zadacha optimal'nogo upravleniya dlya odnosekturnoy modeli ekonomicheskogo rosta so smeshannymi ogranicheniyami [Problem of optimum control for one-sector model of economic growth with the mixed restrictions]. In: Kostomarov, D.P. & Dmitriev, V.I. (eds) *Prikladnaya matematika i informatika* [Applied Mathematics and Computer Science]. Vol. 44. Moscow: Maks Press. pp. 5–21.
8. Solov'yev, V.I. (2000) *Stokhasticheskie metody v ekonomike i finansakh* [Stochastic Methods in Economics and Finance]. Moscow: State University of Management.
9. Merton, R.C. (1969) Life time portfolio selection under uncertainty: the continuous time case. *Review of Economics and Statistics*. 51(3). pp. 247–257. DOI: 10.2307/1926560
10. Merton, R.C. (1975) An asymptotic theory of growth under uncertainty. *Review of Economic Studies*. 42(3). pp. 375–393.
11. Merton, R.C. & Samuelson, P.A. (1999) *Continuous-time finance*. Cambridge, MA: Basil Blackwell.
12. Paraev, Yu.I. (1976) *Vvedenie v statisticheskuyu dinamiku protsessov upravleniya i fil'tratsii* [Introduction to statistical dynamics of control processes and filtrations]. Moscow: Sovetskoe Radio.
13. Paraev, Yu.I. (1962) Ob osobom upravlenii v optimal'nykh protsessakh, lineynykh otnositel'no upravlyayushchikh vozdeystviy [On special control in optimum processes linear in relation to control actions]. *Avtomatika i telemekhanika*. 9. pp. 1202–1209.
14. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (1973) *Osobyie optimal'nye upravleniya* [Special optimal controls]. Moscow: Librokom.
15. Kamke, E. (1961) *Spravochnik po differentsial'nym uravneniyam v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka* [A reference-book on the ordinary differential equations]. Moscow: GIFML.