ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2019 Управление, вычислительная техника и информатика № 46

УДК 519.874
DOI: 10.17223/19988605/46/7

Е.В. Капустин, А.С. Шкуркин

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Исследуется модель управления запасами с простейшим потоком заявок потребителей, случайным размером заявки, пополнением запасов до заданного начального уровня через равные промежутки времени. Выводится интегро-дифференциальное уравнение для функции распределения уровня запасов. В случае экспоненциального распределения величины заявок получено его решение, вычислены средние затраты и оптимальный начальный уровень запасов.
Ключевые слова: стохастическая модель управления запасами; пуассоновский поток; функция затрат; интегро-дифференциальное уравнение; оптимизация системы управления запасами.

Модели управления запасами описывают изменение уровня запасов некоторого продукта. Этот продукт расходуется на удовлетворение спроса, т.е. на выполнение заявок потребителей. Для восполнения запасов продукта производятся поставки. Таким образом, модель управления запасами – это модель резервуара [1]. Существует обширная литература, посвященная детерминированным и стохастическим моделям управления запасами [1–10]. Вместе с тем имеется ряд сложностей при построении стохастических моделей управления запасами. Например, однопериодная модель [11] не является моделью резервуара и, соответственно, далека от классической модели Уилсона [3]. Модели управления запасами в виде системы массового обслуживания [12] или управляемой стохастической динамической системы [13–15] слишком сложны для исследования и тоже далеки от модели Уилсона. Здесь рассматривается стохастическая модель управления запасами, не имеющая этих недостатков.

1. Описание модели

Рассмотрим следующую модель управления запасами [16]:

1. Уровень запасов в начальный момент времени $t = 0$ равен J_0.

2. Изменение уровня запасов происходит мгновенно.

3. Заявки потребителей образуют простейший поток событий интенсивности λ.

4. Величины заявок независимы и имеют одинаковое распределение с плотностью распределения $f(x)$ и математическим ожиданием a.

5. Пополнение запасов происходит через равные промежутки времени длиной T до уровня J_0.

Пусть $J(t)$ – уровень запасов продукта в момент времени t (рис. 1). Если $J(t) < 0$, то имеется дефицит продукта. Накопленный дефицит ликвидируется в момент очередного пополнения запасов.

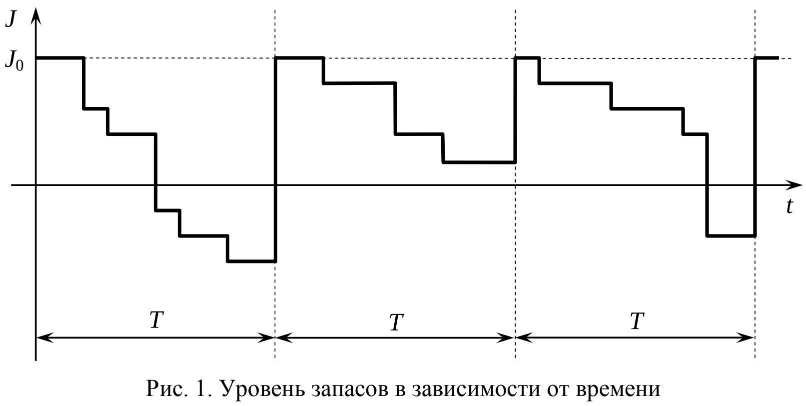

Рис. 1. Уровень запасов в зависимости от времени
Fig. 1. Stock levels based on time

Эффективность управления запасами продукта определяется затратами на его хранение, поставку и штрафами за его отсутствие (дефицит). Предположим, что затраты на хранение единицы продукта в единицу времени равны c_1, штраф за дефицит единицы продукта в единицу времени равен c_2, затраты на поставку x единиц продукта составляют $c_3x + c_4$.

Так как поток заявок стационарный и в начале каждого из промежутков $(0, T)$, $(T, 2T)$, $(2T, 3T)$, … уровень запасов равен J_0, то затраты достаточно исследовать на промежутке времени $(0, T)$.

Пусть $C(t)$ – затраты на хранение продукта и штрафы за его дефицит на промежутке времени $(0, t)$, $0 < t < T$. Тогда полные затраты на промежутке времени $(0, T)$ с учетом расходов на пополнение запасов равны

$$C_{\text{полн}} = C(T) + c_3(J_0 - J(T)) + c_4 .$$

Возьмем в качестве функции затрат математическое ожидание величины $C_{\text{полн}}$:

$$M(C_{\text{полн}}) = M(C(T)) + c_3(J_0 - M(J(T))) + c_4 . \tag{1}$$

Функция затрат (1) зависит от J_0 и T. Величину T будем считать фиксированным параметром, величину J_0 будем считать переменной.

Поставим задачу найти значение J_0, при котором функция затрат $M(C_{\text{полн}})$ принимает наименьшее значение.

2. Математическое ожидание затрат

Теорема 1. Математическое ожидание уровня запасов $M(J(t))$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} M(J(t)) = -\lambda a . \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $0 < t < t + \Delta t < T$, $\Delta J = J(t + \Delta t) - J(t)$. Тогда

$$M(J(t+\Delta t)) = M(J(t)) + M(\Delta J) .$$

На отрезке времени $(t, t + \Delta t)$ может произойти три события: «не поступило ни одной заявки», «поступила одна заявка» и «поступило более одной заявки».

Так как поток заявок простейший, то вероятность первого события равна $1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$, вероятность второго равна $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$, вероятность третьего равна $o(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$.

Если на отрезке времени $(t, t + \Delta t)$ не поступило ни одной заявки, то $\Delta J = 0$, поэтому условное математическое ожидание ΔJ при условии, что не поступило ни одной заявки, равно 0.

Если поступила одна заявка величины X, то $\Delta J = -X$, поэтому условное математическое ожидание ΔJ при условии, что поступила одна заявка, равно $(-a)$.

Условное математическое ожидание величины ΔJ при условии, что поступило более одной заявки, существует и является конечным.

Применяя формулу полной вероятности для математического ожидания, получаем

$$M(J(t+\Delta t)) = M(J(t)) - \lambda a\Delta t + o(\Delta t) ,$$

или

$$M(J(t+\Delta t)) - M(J(t)) = -\lambda a\Delta t + o(\Delta t) .$$

Делим полученное уравнение на Δt и делаем предельный переход при $\Delta t \to 0$, получаем уравнение (2). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. В полосе $0 < t < T$, $-\infty < x < \infty$ функция распределения уровня запасов $P(J(t) < x)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} P(J(t) < x) = -\lambda P(J(t) < x) + \lambda \int_0^{+\infty} P(J(t) < v + x) f(v) dv . \tag{3}$$

Доказательство. Рассматривая на отрезке времени $(t, t + \Delta t)$ возможные события (см. выше) и применяя формулу полной вероятности, получаем

$$P(J(t+\Delta t) < x) = (1 - \lambda\Delta t) P(J(t) < x) + \lambda\Delta t\, P(J(t) - X < x) + o(\Delta t) ,$$

где X – величина заявки, отсюда

$$\frac{\partial}{\partial t}P(J(t)<x)=-\lambda P(J(t)<x)+\lambda P(J(t)-X<x). \tag{4}$$

Величины $J(t)$ и X независимы, поэтому

$$P(J(t)-X<x)=\iint\limits_{u-v<x} f_{J(t)}(u)f_X(v)dudv=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(v)dv\int\limits_{-\infty}^{v+x} f_{J(t)}(u)du=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(v)P(J(t)<v+x)dv.$$

Случайная величина X положительная, поэтому $f_X(v)=f(v)=0$ при $v<0$. С учетом этого (4) принимает вид (3). Теорема 2 доказана.

Так как $J(0)=J_0$, то

$$P(J(0)<x)=\begin{cases}1, \text{ если } x>J_0,\\ 0, \text{ если } x<J_0.\end{cases} \tag{5}$$

Теорема 3. Математическое ожидание затрат на хранение и штрафы $M(C(t))$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}M(C(t))=c_1M(J(t))-(c_1+c_2)\int\limits_{-\infty}^{0} xu(x,t)dx, \tag{6}$$

где $u(x, t)$ – плотность распределения уровня запасов.

Доказательство. Рассматривая на отрезке времени $(t, t+\Delta t)$ возможные события (см. выше), и применяя формулу полной вероятности для математического ожидания, получаем

$$M(C(t+\Delta t))=M(C(t))+c_1P(J(t)>0)M(J(t)\,|\,J(t)>0)\Delta t-c_2P(J(t)<0)M(J(t)\,|\,J(t)<0)\Delta t+o(\Delta t),$$

отсюда

$$\frac{d}{dt}M(C(t))=c_1P(J(t)>0)M(J(t)\,|\,J(t)>0)-c_2P(J(t)<0)M(J(t)\,|\,J(t)<0).$$

По формуле полной вероятности для математического ожидания

$$M(J(t))=P(J(t)>0)M(J(t)\,|\,J(t)>0)+P(J(t)<0)M(J(t)\,|\,J(t)<0),$$

поэтому полученное уравнение можно представить в виде:

$$\frac{d}{dt}M(C(t))=c_1M(J(t))-(c_1+c_2)P(J(t)<0)M(J(t)\,|\,J(t)<0).$$

Далее,

$$M(J(t)\,|\,J(t)<0)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xdP(J(t)<x\,|\,J(t)<0).$$

Имеем

$$P(J(t)<x\,|\,J(t)<0)=\frac{P(J(t)<x,\ J(t)<0)}{P(J(t)<0)}=\begin{cases}1, \text{ если } x>0,\\ \dfrac{P(J(t)<x)}{P(J(t)<0)}, \text{ если } x<0,\end{cases}$$

поэтому

$$M(J(t)\,|\,J(t)<0)=\frac{1}{P(J(t)<0)}\int\limits_{-\infty}^{0} xu(x,t)dx.$$

Следовательно, уравнение для $M(C(t))$ принимает вид (6). Теорема 3 доказана.

Для уравнения (2) имеем очевидное начальное условие $M(J(0))=J_0$, поэтому на отрезке времени $0<t<T$

$$M(J(t))=J_0-\lambda at. \tag{7}$$

С учетом (7) функция затрат принимает вид:

$$M(C_{\text{полн}})=M(C(T))+c_3\lambda aT+c_4.$$

Это означает, что функция затрат $M(C_{\text{полн}})$ минимальна, если минимально значение $M(C(T))$.

Начальное условие для уравнения (6) имеет вид $M(C(0))=0$, с учетом (7) получаем

$$M(C(T))=\int\limits_0^T\left(c_1(J_0-\lambda at)-(c_1+c_2)\int\limits_{-\infty}^{0} xu(x,t)dx\right)dt. \tag{8}$$

3. Математическое ожидание затрат в случае экспоненциального распределения величины заявок

Теорема 4. Пусть величина заявки имеет экспоненциальное распределение:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}, \text{ если } x>0,\\ 0, \qquad \text{если } x<0.\end{cases} \tag{9}$$

Тогда плотность распределения уровня запасов имеет вид:

$$u(x,t)=e^{-\lambda t}\left(\delta(x-J_0)+\frac{1}{a}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!k!}\left(\frac{J_0-x}{a}\right)^k\right)e^{-\frac{J_0-x}{a}}\eta(J_0-x)\right), \tag{10}$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция, $\eta(x)$ – единичная функция,

$$\eta(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x>0,\\ 0, \text{ если } x<0.\end{cases}$$

Доказательство. Дифференцируя (3) и (5) по переменной *x*, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\lambda u(x,t)+\lambda\int_0^{+\infty}u(x+v,t)f(v)dv, \tag{11}$$

$$u(x,0)=\delta(x-J_0). \tag{12}$$

Применяя преобразование Фурье по переменной *x* к уравнению (11), получаем

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}=\lambda(p(\omega)-1)\hat{u}(\omega,t),$$

где

$$\hat{u}(\omega,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)e^{-i\omega x}dx, \quad p(\omega)=\int_0^{+\infty}f(v)e^{i\omega v}dv.$$

Пусть $F(x, t)$ – прообраз (обратное преобразование Фурье) функции

$$\hat{F}(\omega,t)=e^{(p(\omega)-1)\lambda t},$$

то есть

$$F(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{(p(\omega)-1)\lambda t}e^{i\omega x}d\omega.$$

Тогда решение задачи (11)–(12) имеет вид:

$$u(x,t)=\delta(x-J_0)\cdot F(x,t),$$

то есть

$$u(x,t)=F(x-J_0,t).$$

Если величина заявки имеет экспоненциальное распределение (9), то

$$p(\omega)=\frac{1}{1-ia\omega}, \quad \hat{F}(\omega,t)=e^{-\lambda t}\exp\left(\frac{\lambda t}{1-ia\omega}\right).$$

Раскладывая экспоненту в ряд, имеем

$$F(x,t)=e^{-\lambda t}\left(\delta(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!}\frac{1}{a}\frac{1}{k!}\left(-\frac{x}{a}\right)^k e^{\frac{x}{a}}\eta(-x)\right),$$

отсюда получаем (10). Теорема 4 доказана.

Подставляя (10) в (8), получаем средние затраты на хранение и штрафы в случае экспоненциального распределения величины заявок:

$$M(C(T))=c_1\left(J_0T-\frac{\lambda a}{2}T^2\right)-\frac{c_1+c_2}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{J_0/a}^{+\infty}(J_0-aw)\frac{w^k}{k!}e^{-w}dw\right)\left(\int_0^{\lambda T}\frac{v^{k+1}}{(k+1)!}e^{-v}dv\right). \tag{13}$$

В общем случае, при любом распределении заявок, найти оценку средних затрат можно методом имитационного моделирования. На рис. 2 представлен график выборочных средних затрат, полученных в результате имитационного моделирования (линия с маркерами), если распределение заявок экспоненциальное со средним $a = 1$, остальные параметры: $\lambda = 2$, $T = 10$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$. Линия без маркеров – график теоретических средних затрат, заданных формулой (13). Видим, что выборочные средние затраты оценивают теоретические очень хорошо, относительная погрешность составляет менее 5%.

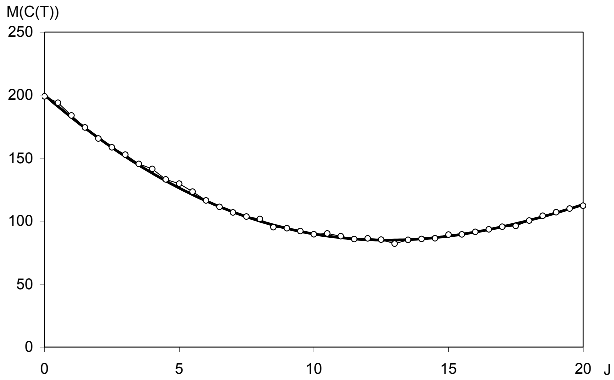

Рис. 2. Средние затраты в зависимости от начального уровня запасов
Fig. 2. Average costs depending on the initial inventory level

Имея оценку средних затрат, можно оценить минимум затрат и оптимальное значение начального уровня запасов.

4. Оптимальный начальный уровень запасов в случае экспоненциального распределения величины заявок

Исследуем монотонность $M(C(T))$ на промежутке $0 \le J_0 < +\infty$. Имеем

$$\frac{d}{dJ_0} M(C(T)) = c_1 T - \frac{c_1 + c_2}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{J_0/a}^{+\infty} \frac{w^k}{k!} e^{-w} dw \right) \left(\int_{0}^{\lambda T} \frac{v^{k+1}}{(k+1)!} e^{-v} dv \right). \tag{14}$$

Обозначим $\Phi(J_0)$ правую часть (14). Можно показать, что:

1. $\Phi(J_0)$ возрастает на $[0, +\infty)$;
2. $\Phi(+\infty) = c_1 T > 0$;
3. $\Phi(0) = (c_1 + c_2)\dfrac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} - c_2 T$.

Введем обозначение

$$\rho = \frac{c_1 + c_2}{c_2} \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda T}.$$

Если $\rho < 1$, то $\Phi(0) < 0$, поэтому $\Phi(J_0)$ имеет единственный нуль на промежутке $0 \le J_0 < +\infty$, который можно найти численно. Этот нуль является точкой минимума $M(C(T))$ на данном промежутке.

Если $\rho \ge 1$, то $\Phi(0) \ge 0$, поэтому $\Phi(J_0) > 0$ на всем промежутке $0 \le J_0 < +\infty$, следовательно, минимум $M(C(T))$ на этом промежутке достигается в точке $J_0 = 0$.

Таким образом, оптимальный начальный уровень запасов в случае экспоненциального распределения величины заявок равен

$$(J_0)_{\text{opt}} = \begin{cases} J_0^*, & \text{если } \rho < 1, \\ 0, & \text{если } \rho \ge 1, \end{cases}$$

где J_0^* – нуль функции $\Phi(J_0)$.

Например, если $a = 1$, $\lambda = 2$, $T = 10$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ (см. выше), то оптимальное значение начального уровня запасов равно 12,7, минимальные затраты равны 84,88.

Заключение

В работе исследуется модель управления запасами с простейшим потоком заявок потребителей, случайным размером заявки, пополнением запасов до заданного начального уровня через равные промежутки времени. Выводится интегро-дифференциальное уравнение для функции распределения уровня запасов. В случае экспоненциального распределения величины заявок получено его решение, вычислены средние затраты и оптимальный начальный уровень запасов.

В общем случае, при любом распределении заявок, провести оптимизацию модели управления запасами можно только приближенными методами, например методом стохастического (имитационного) моделирования. Точные результаты, полученные аналитическими методами, бывают очень полезны при отладке алгоритмов, реализующих эти приближенные методы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прабху А. Методы теории массового обслуживания и управления запасами : пер. с англ. М. : Машиностроение, 1969. 324 с.
2. Черчмен У., Алоф Р., Арноф Л. Введение в исследование операций. М. : Наука, 1966. 488 с.
3. Хедли Дж., Уайтин Т. Анализ систем управления запасами. М. : Наука, 1969. 512 с.
4. Лотоцкий В.А., Мандель А.С. Модели и методы управления запасами. М. : Наука, 1991. 189 с.
5. Рыжиков Ю.И. Теория очередей и управление запасами. СПб. : Питер, 2001. 308 с.
6. Бродецкий Г.Л. Управление запасами. М. : Эксмо, 2008. 352 с.
7. Zipkin P.H. Foundations of inventory management. Boston : McGraw-Hill, 2000. 514 p.
8. Silver E.A. Inventory management and production planning and scheduling. New York : Wiley, 1998. 754 p.
9. Porteus E.L. Foundations of Stochastic Inventory Theory. Stanford, CA : Stanford University Press, 2002. 320 p.
10. Handbook of EOQ Inventory Problems: Stochastic and Deterministic Models and Applications / Ts.-M. Choi (ed.). New York : Springer, 2014. 281 p.
11. Khouja M. The single-period (news-vendor) problem: literature review and suggestions for future research // Omega. 1999. Vol. 27, No. 5. P. 537–553.
12. Krishnamoorthy A., Lakshmy B., Manikandan R. A survey on inventory models with positive service time // OPSEARCH. 2011. Vol. 48 (2). P. 153–169.
13. Мандель А.С., Семенов Д.А. Адаптивные алгоритмы оценки параметров оптимальных стратегий управления запасами при ограниченном дефиците // Автоматика и телемеханика. 2008. № 6. С. 117–128.
14. Axsäter S. Inventory Control. Cham : Springer, 2015. 268 p.
15. Rossi R., Prestwich S., Armagan T.S., Hnich, B. Replenishment planning for stochastic inventory systems with shortage cost // Integration of AI and OR Techniques in Constraint Programming for Combinatorial Optimization Problems : 4th International Conference, CPAIOR 2007, Brussels, Belgium, May 23–26, 2007 : Proceedings / ed. P. Van Hentenryck; L. Wolsey. LNCS Springer-Verlag GmbH, 2007. Vol. 4510. P. 229–243.
16. Капустин Е.В., Мухаметсафина Ю.В. Модель управления запасами со случайным потоком заявок от потребителей // Научное творчество молодежи. Математика. Информатика : материалы XX Всерос. науч.-практ. конф. (28–29 апреля 2016 г.). Томск : Изд-во Том. ун-та, 2016. Ч. 1. С.70–74.

Поступила в редакцию 12 марта 2018 г.

Kapustin E.V., Shkurkin A.S. (2019) OPTIMIZATION OF THE PARAMETERS OF THE STOCHASTIC MODEL OF INVENTORY CONTROL. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 46. pp. 56–63

DOI: 10.17223/19988605/46/7

The following model of inventory control is considered:

1. The level of the stock of the product at the initial moment $t = 0$ is equal to J_0.
2. Change in the level of stocks occurs instantly.
3. Customer requests form a simple events flow of intensity λ.
4. The values of the applications are independent and have the same distribution with the probability density $f(x)$ and mathematical expectation a.

5. Replenishment of stocks occurs at regular intervals of the length T up to the level J_0.

It is assumed that the cost of storing a unit of product per unit of time is equal to c_1, the penalty for the deficit of a unit of product per unit of time is equal to c_2, the cost of supplying of x units of the product is $c_3x + c_4$.

The costs in this model are sufficient to investigate over a period of time (0, T). Let $C(t)$ be the cost of storing the product and the penalties for its deficit at a time interval (0, t), $0 < t < T$. Then the total cost of the time period (0, T), taking into account the cost of replenishment, is equal to

$$C_{\text{full}} = C(T) + c_3(J_0 - J(T)) + c_4 .$$

The mathematical expectation of a quantity C_{full} is considered as a cost function. It is required to find the value J_0 at which the cost function takes the smallest value.

It is not difficult to show that the mathematical expectation of the stock level on a time interval (0, t), $0 < t < T$ has the form

$$M(J(t)) = J_0 - \lambda at ,$$

so the cost function takes the form

$$M(C_{\text{full}}) = M(C(T)) + c_3\lambda aT + c_4 .$$

This means that the cost function is minimal if the value $M(C(T))$ is minimal.

It is shown that the probability distribution function of the stock level $P(J(t) < x)$ satisfies the integro-differential equation

$$\frac{\partial}{\partial t}P(J(t) < x) = -\lambda P(J(t) < x) + \lambda \int_0^{+\infty} P(J(t) < v + x)\, f(v)dv$$

in the band $0 < t < T$, $-\infty < x < \infty$, and the initial condition

$$P(J(0) < x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x > J_0, \\ 0, \text{ если } x < J_0. \end{cases}$$

The mathematical expectation of storage costs and penalties on a time interval (0, T) is obtained

$$M(C(T)) = \int_0^T \left(c_1(J_0 - \lambda at) - (c_1 + c_2) \int_{-\infty}^0 xu(x,t)dx \right) dt ,$$

where $u(x, t)$ is the distribution density of the stock level.

In the case of the exponential distribution of the quantity of requests, the density distribution of the inventory level is obtained, and hence the average cost, the minimum average cost and the optimal value of the initial inventory level J_0.

Keywords: stochastic model of inventory control; Poisson process; cost function; integro-differential equation; optimization of the inventory control system.

KAPUSTIN Evgeny Viktorovich (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Russian Federation).
E-mail: kapustin_ev@mail.ru

SHKURKIN Alexey Sergeevich (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: shkurkin@mail.ru

REFERENCES

1. Prabhu, A. (1969) *Metody teorii massovogo obsluzhivaniya i upravleniya zapasami* [Queues and Inventories: A Study of Their Basic Stochastic Processes]. Translated from English by E. Kovalenko. Moscow: Mashinostroenie.
2. Cherchmen, U., Alof, R. & Arnof, L. (1966) *Vvedenie v issledovanie operatsiy* [Introduction to the study of operations]. Translated from English. Moscow: Nauka.
3. Headley, J. & Whitin, T. (1969) *Analiz sistem upravleniya zapasami* [Analysis of inventory systems]. Translated from English by M.A. Kasner et al. Moscow: Nauka.
4. Lototsky, V.A. & Mandel, A.S. (1991) *Modeli i metody upravleniya zapasami* [Models and methods of inventory management]. Moscow: Nauka.
5. Ryzhikov, Yu.I. (2001) *Teoriya ocheredey i upravlenie zapasami* [Queuing theory and inventory management]. St. Petersburg: Piter.
6. Brodetsky, G.L. (2008) *Upravlenie zapasami* [Inventory Management]. Moscow: Eksmo.
7. Zipkin, P.H. (2000) *Foundations of inventory management*. Boston: McGraw-Hill.
8. Silver, E.A. (1998) *Inventory management and production planning and scheduling*. New York: Wiley.
9. Porteus, E.L. (2002) *Foundations of Stochastic Inventory Theory*. Stanford, CA: Stanford University Press.
10. Choi, Ts.-M. (2014) *Handbook of EOQ Inventory Problems: Stochastic and Deterministic Models and Applications*. New York: Springer.
11. Khouja, M. (1999) The single-period (news-vendor) problem: literature review and suggestions for future research. *Omega*. 27(5). pp. 537–553. DOI: 10.1016/S0305-0483(99)00017-1

12. Krishnamoorthy, A., Lakshmy, B. & Manikandan, R. (2011) A survey on inventory models with positive service time. *OPSEARCH*. 48(2). pp. 153–169. DOI: 10.1007/s12597-010-0032-z
13. Mandel, A.S. & Semenov, D.A. (2008) Adaptive algorithms for estimating the parameters of optimal strategies for managing inventories with a limited deficit. *Automation and Remote Control*. 6. pp.117–128.
14. Axsäter, S. (2015) *Inventory Control*. Cham: Springer.
15. Rossi, R., Prestwich, S., Armagan, T.S. & Hnich, B. (2007) Replenishment planning for stochastic inventory systems with shortage cost. *Integration of AI and OR Techniques in Constraint Programming for Combinatorial Optimization Problems*. 4th International Conference, CPAIOR 2007. Brussels, Belgium, May 23–26, 2007. Vol. 4510 LNCS Springer-Verlag GmbH. pp. 229–243.
16. Kapustin, E.V. & Mukhametsafina, Yu.V. (2016) [Model of inventory management with a random flow of applications from consumers]. *Scientific creativity of youth. Mathematics. Informatics*. Proc. of the 20th All-Russian Conference. April 28–29, 2016. Tomsk: Tomsk State University. pp. 70–74. (In Russian).