

УДК 519.218.72

DOI: 10.17223/19988605/46/11

Г.Ш. Цициашвили, М.А. Осипова

**СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ В ПРОСТЕЙШЕЙ RQ-СИСТЕМЕ
МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ***Работа выполнена при частичной финансовой поддержке фонда РФФИ (проект № 17-07-00177).*

Работа посвящена вычислению предельного распределения в модели одноканальной RQ-системы в предположении, что интенсивности входного потока и обслуживания зависят от числа заявок на орбите. Эти вычисления основаны на решении системы стационарных уравнений Колмогорова–Чепмена для процесса, описывающего RQ-систему, и предельном распределении процесса гибели и рождения с произвольными интенсивностями гибели и рождения.

Ключевые слова: RQ-система; процесс гибели и рождения; стационарные уравнения Колмогорова–Чепмена.

В монографии [1] приведен подробный обзор результатов по расчету RQ-систем массового обслуживания. Исследование стабильности случайных процессов, описывающих RQ-системы, проведено в [2, 3]. В [4] и последующих работах исследование RQ-систем продолжено в направлении их асимптотического анализа. Однако остаются не вполне исследованными возможности точного вычисления стационарного распределения в различных RQ-системах, особенно если их характеристики зависят от числа заявок на орбите.

Настоящая работа посвящена поиску точных решений этой задачи в символьном виде для отдельных моделей RQ-систем. В ее основе лежат стационарные уравнения Колмогорова–Чепмена для марковских процессов, описывающих RQ-системы. Для поиска этих решений используются известные стационарные распределения процессов гибели и рождения [5]. С помощью полученных формул удастся получить необходимые условия существования стационарных распределений в RQ-системах и построить аналоги коэффициентов загрузки в них.

1. Основные результаты

Следуя [4], рассмотрим RQ-систему, описываемую марковским процессом $(k(t), i(t))$, где $i(t)$ – число заявок на орбите RQ-системы, $k(t)$ характеризует состояние обслуживающего устройства: $k(t) = 1$, если устройство обслуживает очередную заявку, $k(t) = 0$, если оно по каким-либо причинам простаивает. Если прибор свободен, то интенсивность ухода заявки с орбиты равна σ_i и зависит от числа заявок i на орбите, $\sigma_0 = 0$. Если прибор занят, то интенсивность ухода заявки с орбиты равна нулю (заявка мгновенно уходит с орбиты и возвращается на нее). Интенсивность обслуживания заявки на приборе равна μ_i , а интенсивность входного пуассоновского потока равна λ_i , где $i \geq 0$ – число заявок на орбите.

В работе рассматриваются две модели ухода заявок с орбиты: $\sigma_i = \sigma$, $\sigma_i = i\sigma$, $i > 0$. Первая модель предполагает, что на орбите формируется очередь заявок, ждущих перехода на прибор, а уйти на прибор может только первая заявка очереди. Вторая модель предполагает, что все заявки на орбите независимо друг от друга могут перейти на прибор. Для таких моделей выводятся явные формулы вычисления стационарных вероятностей и необходимые условия существования этих вероятностей.

Обозначим

$$\alpha_i = \frac{\lambda_i(\lambda_i + \sigma_i)}{\mu_i}, \quad \gamma_i = \frac{\lambda_i + \sigma_i}{\mu_i}, \quad i \geq 0, \quad \rho_0 = 1, \quad \rho_i = \prod_{l=1}^i \frac{\alpha_{l-1}}{\sigma_l}, \quad i > 0.$$

Пусть $p(k, i)$, $k, i = 0, 1, \dots$, предельное распределение процесса $(k(t), i(t))$, $t \geq 0$.

Теорема 1. Предельное распределение $p(k, i)$ удовлетворяет равенствам

$$p(0, i) = p(0, 0)\rho_i, \quad p(1, i) = p(0, i)\gamma_i, \quad i \geq 0, \quad p(0, 0) = \left[\sum_{i=0}^{\infty} \rho_i(1 + \gamma_i) \right]^{-1}. \quad (1)$$

Если марковский процесс $(k(t), i(t))$, $t \geq 0$, является эргодическим, то

$$\sum_{i=0}^{\infty} \rho_i(1 + \gamma_i) < \infty. \quad (2)$$

Доказательство. Переходные интенсивности RQ-системы с одним обслуживающим устройством определяются рис. 1.

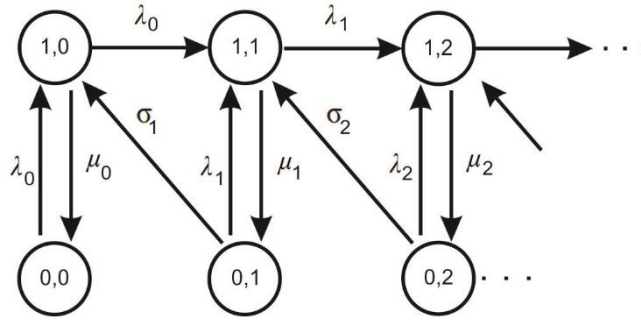


Рис. 1. Граф переходных интенсивностей RQ-системы

Fig. 1. Transient RQ-system intensity graph

Выпишем систему уравнений Колмогорова–Чепмена для данной системы обслуживания, используя рис. 1:

$$p(0, 0)\lambda_0 = p(1, 0)\mu_0, \quad (3)$$

$$p(0, i)(\lambda_i + \sigma_i) = p(1, i)\mu_i, \quad i > 0, \quad (4)$$

$$p(1, 0)(\lambda_0 + \mu_0) = p(0, 0)\lambda_0 + p(0, 1)\sigma_1, \quad (5)$$

$$p(1, i)(\lambda_i + \mu_i) = p(0, i)\lambda_i + p(0, i+1)\sigma_{i+1} + p(1, i-1)\lambda_{i-1}, \quad i > 0. \quad (6)$$

Из формулы (3) находим:

$$p(1, 0) = p(0, 0) \frac{\lambda_0}{\mu_0}. \quad (7)$$

Из формулы (4) получаем:

$$p(1, i) = p(0, i) \frac{\lambda_i + \sigma_i}{\mu_i}, \quad i > 0. \quad (8)$$

Из формул (5), (7) следует, что

$$p(0, 0) \frac{\lambda_0(\lambda_0 + \mu_0)}{\mu_0} = p(0, 0)\lambda_0 + p(0, 1)\sigma_1,$$

и значит

$$p(0, 1)\sigma_1 = p(0, 0) \frac{\lambda_0(\lambda_0 + \sigma_0)}{\mu_0}. \quad (9)$$

Из формул (6), (8) следует, что

$$p(0, i) \left(\frac{\lambda_i(\lambda_i + \sigma_i)}{\mu_i} + \sigma_i \right) = p(0, i+1)\sigma_{i+1} + p(0, i-1) \frac{\lambda_{i-1}(\lambda_{i-1} + \sigma_{i-1})}{\mu_{i-1}}, \quad i > 0. \quad (10)$$

Перепишем формулы (7) – (10) в виде:

$$p(0,0)\alpha_0 = p(0,1)\sigma_1, \quad p(0,i)(\alpha_i + \sigma_i) = p(0,i+1)\sigma_{i+1} + p(0,i-1)\alpha_{i-1}, \quad i > 0, \quad (11)$$

$$p(1,i) = p(0,i)\gamma_i, \quad i \geq 0. \quad (12)$$

Тогда из формул (11), (12) (см.: [5. Гл. 7, § 4]) следуют равенства (1). Таким образом, если марковский процесс $(k(t), i(t))$, $t \geq 0$, эргодический, то выполняется неравенство (2).

Следствие. Если марковский процесс $(k(t), i(t))$, $t \geq 0$, является эргодическим, то, используя результаты статьи [6], можно доказать, что стационарные пуассоновские потоки заявок, уходящих из RQ-системы, поступающих с орбиты на свободный прибор, поступающих на орбиту, имеют следующие интенсивности:

$$\Lambda_1 = \sum_{i=0}^{\infty} p(1,i)\mu_i, \quad \Lambda_2 = \sum_{i=0}^{\infty} p(0,i)\lambda_i, \quad \Lambda_3 = \sum_{i=0}^{\infty} p(1,i)\lambda_i.$$

2. Примеры

Модель 1. Рассмотрим введенную в [7] модель RQ - системы:

$$\lambda_i \equiv \lambda, \quad \mu_i \equiv \mu, \quad i \geq 0, \quad \sigma_i \equiv \sigma, \quad i > 0, \quad \sigma_0 = 0.$$

Из теоремы 1 следует, что

$$p(0,0) = \left[1 + \gamma_0 + (1 + \gamma) \frac{\alpha_0}{\sigma - \alpha} \right]^{-1}, \quad p(1,0) = p(0,0)\gamma_0, \quad (13)$$

$$p(0,i) = p(0,0) \frac{\alpha_0}{\sigma} \left(\frac{\alpha}{\sigma} \right)^{i-1}, \quad p(1,i) = p(0,i)\gamma, \quad i > 0, \quad (14)$$

где

$$\alpha_i \equiv \alpha = \frac{\lambda(\lambda + \sigma)}{\mu}, \quad \gamma_i \equiv \gamma = \frac{\lambda + \sigma}{\mu}, \quad \rho_i = \frac{\alpha_0}{\sigma} \left(\frac{\alpha}{\sigma} \right)^{i-1}, \quad i > 0, \quad \alpha_0 = \frac{\lambda^2}{\mu}, \quad \gamma_0 = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \rho_0 = 1.$$

Следовательно, в соответствии с формулами (13), (14) необходимым условием эргодичности процесса $(k(t), i(t))$, $t \geq 0$, является соотношение

$$\frac{\alpha}{\sigma} = \frac{\lambda(\lambda + \sigma)}{\mu\sigma} = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu\sigma} < 1. \quad (15)$$

В [3] доказано, что неравенство (15) является достаточным условием эргодичности марковского процесса $(k(t), i(t))$, $t \geq 0$.

Модель 2. Рассмотрим теперь еще один интересный для приложений частный случай, когда $\lambda_i \equiv \lambda$, $\mu_i \equiv \mu$, $\sigma_i = i\sigma$ [7]. В этом случае

$$\rho_0 = 1, \quad \gamma_0 = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \rho_i = \prod_{l=1}^i \left(\frac{\lambda(l-1)}{\mu l} + \frac{\lambda^2}{\mu l \sigma} \right), \quad \gamma_i = \frac{\lambda + i\mu}{\mu}, \quad i > 0, \quad (16)$$

и выполняются равенства (1).

Исследуем условие (2) сходимости ряда $\sum_{i=0}^{\infty} \rho_i(1 + \gamma_i)$, являющееся необходимыми для эргодичности марковского процесса $(k(t), i(t))$, $t \geq 0$. Этот ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \rho_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda + i\sigma}{\mu} \prod_{l=1}^i \left(\frac{\lambda(l-1)}{\mu l} + \frac{\lambda^2}{\mu l \sigma} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda + i\sigma}{\mu} \prod_{l=1}^i \frac{\lambda}{\mu} \left(1 + \frac{1}{l} \left(\frac{\lambda}{\sigma} - 1 \right) \right).$$

Необходимым условием сходимости ряда $\sum_{i=0}^{\infty} \rho_i \gamma_i$, является неравенство $\lambda < \mu$. Докажем достаточность этого условия. Пусть $\lambda < \mu$, определим L условием $\frac{\lambda}{\mu} \left(1 + \frac{\lambda}{L\sigma}\right) = a < 1$, тогда

$$\sum_{i=L+1}^{\infty} \gamma_i \rho_i \leq \prod_{l=1}^L \frac{\lambda}{\mu} \left(1 + \frac{\lambda}{l\sigma}\right) \sum_{i=L+1}^{\infty} \frac{\lambda + i\sigma}{\mu} a^{i-L} < \infty.$$

Таким образом, ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \rho_i (1 + \gamma_i)$ сходится при $\lambda < \mu$. Автором статьи [3] в устном докладе отмечено, что неравенство $\lambda < \mu$ является достаточным условием эргодичности марковского процесса $(k(t), i(t))$, $t \geq 0$.

Заключение

Особенностью полученных в работе результатов является возможность рассчитывать распределение в марковской модели RQ-системы при достаточно произвольных зависимостях интенсивностей входного потока и обслуживания от числа заявок на орбите. Это позволяет рассматривать различные механизмы адаптации RQ-системы к текущему числу заявок на орбите, а также ставить и решать различные оптимизационные задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Artalejo J.R., Gomez-Corral A. Retrial Queueing Systems. A Computational Approach. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2008.
2. Вишневский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И. Стохастические системы с коррелированными потоками : теория и применение в телекоммуникационных сетях. М. : Техносфера, 2018.
3. Afanaseva L.G. Stability conditions for constant retrial rate queueing system with a regenerative input flow // Proceedings of IX Moscow International Conference on Operations Research. 2018. V. 1. P. 308–313.
4. Назаров А.А., Моисеева Е. А. Исследование RQ-системы MMPP|M|1 методом асимптотического анализа в условии большой загрузки // Известия Томского политехнического университета. 2013. Т. 322, № 2. С. 19–23.
5. Карлин С. Основы теории случайных процессов. М. : Мир, 1971.
6. Tsitsiashvili G.Sh., Osipova M.A. Modelling of output flows in queueing systems and networks // Information Technologies and Mathematical Modelling – Queueing Theory and Applications. Vol. 912 of the Communications in Computer and Information Science series. ITMM-2018. P. 106–116.
7. Fayolle G. A simple telephone exchange with delayed feedbacks. In Teletraffic Analysis and Computer Performance Evaluation / O.J. Boxma, J.W. Cohen, H.C. Tijms (eds.). Amsterdam : Elsevier, 1986.

Поступила в редакцию 14 сентября 2018 г.

Tsitsiashvili G.Sh., Osipova M.A. (2019) STATIONARY DISTRIBUTIONS IN THE SIMPLEST RQ-QUEUEING SYSTEM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 46. pp. 93–97

DOI: 10.17223/19988605/46/11

This paper is devoted to the search for exact solutions of the considered problem in symbolic form for individual models of RQ-systems. It is basing on the stationary Kolmogorov-Chapman equations for Markov processes describing RQ-systems. With the help of the obtained formulas, it is possible to obtain the necessary conditions for the existence of stationary distributions in RQ-systems and to construct analogues of loading coefficients in them.

Consider the RQ-system described by the Markov process $(k(t), i(t))$, where $i(t)$ is the number of customers in the orbit of the RQ-system, $k(t)$ characterizes the state of the server, $k(t) = 1$, if it serves the customer, $k(t) = 0$, if it is idle for any reason. If the server is free, the intensity σ_i of the withdrawal of the customer from the orbit depends on the number i of customers in orbit $\sigma_0 = 0$. If the server is occupied, the intensity of the withdrawal of the customer from orbit is zero (the customer instantly goes out of orbit and returns to it). The service intensity of the customer on the server is equal to μ_i , and the intensity of the input Poisson flow is equal to λ_i , where $i \geq 0$ is the number of customers.

The paper considers two models of customers leaving the orbit: $\sigma_i = \sigma$, $\sigma_i = i\sigma$, $i > 0$. First model assumes that a queue of customers waiting for the transition to the server is formed in the orbit, and only the first customer of the queue can go to the server. The second model assumes that all customers in orbit can independently switch to the server. For these models, explicit formulas for calculating stationary probabilities and the necessary conditions for the existence of these probabilities are derived.

Denote

$$\alpha_i = \frac{\lambda_i(\lambda_i + \sigma_i)}{\mu_i}, \quad \gamma_i = \frac{\lambda_i + \sigma_i}{\mu_i}, \quad i \geq 0, \quad \rho_0 = 1, \quad \rho_i = \prod_{l=1}^i \frac{\alpha_{l-1}}{\sigma_l}, \quad i > 0.$$

Assume that $p(k, i)$, $k, i = 0, 1, \dots$, is the limit distribution of the process $(k(t), i(t))$, $t \geq 0$.

Theorem. The limit distribution $p(k, i)$ satisfies the equalities

$$p(0, i) = p(0, 0)\rho_i, \quad p(1, i) = p(0, i)\gamma_i, \quad i \geq 0, \quad p(0, 0) = \left[\sum_{i=0}^{\infty} \rho_i(1 + \gamma_i) \right]^{-1}.$$

If Markov process $(k(t), i(t))$, $t \geq 0$, is ergodic, then

$$\sum_{i=0}^{\infty} \rho_i(1 + \gamma_i) < \infty.$$

Keywords: RQ-system; process of death and birth; stationary Kolmogorov–Chapman equations.

TSITSIAISHVILI Gurami Shalvovich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Main Researcher of Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch of Russian Academy Sciences, Vladivostok, Russian Federation).

E-mail: guram@iam.dvo.ru

OSIPOVA Marina Anatolievna (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Researcher of Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch of Russian Academy Sciences, Vladivostok, Russian Federation).

E-mail: mao1975@list.ru

REFERENCES

1. Artalejo, J.R. & Gomez-Corral, A. (2008) *Retrial Queueing Systems. A Computational Approach*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
2. Vishnevsky, V.M., Dudin, A.N. & Klimenok, V.I. (2018) *Stokhasticheskie sistemy s korrelirovannymi potokami: teoriya i primeneniye v telekommunikatsionnykh setyakh* [Stochastic systems with correlated flows. Theory and application in telecommunication networks]. Moscow: Tekhnosfera.
3. Afanaseva, L.G. (2018) Stability conditions for constant retrial rate queueing system with a regenerative input flow. *Proceedings of IX Moscow International Conference on Operations Research*. 1. pp. 308–313.
4. Nazarov, A.A. & Moiseeva, E.A. (2013) Issledovanie RQ-sistemy metodom asimptoticheskogo analiza v uslovii bol'shoy zagruzki [A Research of RQ-system by the method of asymptotic analysis in the condition of large load]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta – Bulletin of Tomsk Polytechnic University*. 322(2). pp. 19–23.
5. Karlin, S. (1971) *Osnovy teorii sluchaynykh protsessov* [Fundamentals of the theory of random processes]. Moscow: Mir.
6. Tsitsiashevili, G.Sh. & Osipova, M.A. (2018) Modelling of output flows in queueing systems and networks. *Information Technologies and Mathematical Modelling - Queueing Theory and Applications*. 912. pp. 106–116.
7. Fayolle, G. (1986) A simple telephone exchange with delayed feedbacks. In: Boxma, O.J., Cohen, J.W. & Tijms, H.C. (eds) *Teletraffic Analysis and Computer Performance Evaluation*. Amsterdam: Elsevier.