УДК 512.538 DOI 10.17223/2226308X/12/10

СВОЙСТВА СИЛЬНО ЗАВИСИМЫХ n-АРНЫХ ПОЛУГРУПП

А. В. Черемушкин

Приводится обзор результатов о свойствах сильно зависимых n-арных полугрупп, обобщающих известные результаты о строении и свойствах n-арных групп. Класс сильно зависимых функций является расширением класса n-арных квазигрупп. Рассмотрены варианты обобщения понятия существенной зависимости функции от переменной. Поясняется, что класс сильно зависимых функций, с одной стороны, наследует многие важные свойства квазигрупп с точки зрения применения операции бесповторной суперпозиции. С другой стороны, в некоторых случаях он является очень широким и в него попадают почти все функции. Приведены аналоги теорем Поста и Глускина — Хоссу, содержащие общее описание строения сильно зависимых n-арных полугрупп. Описано строение групп автотопий таких операций.

Ключевые слова: *n-арные полугруппы, сильно зависимые функции, группа автотопий.*

1. Варианты определения понятия зависимости функции от переменной

Для двоичных функций важную роль играет понятие существенной зависимости функции от переменной. При переходе к функциям k-значной логики понятие зависимости может быть определено различными способами. Рассмотрим четыре варианта такого определения.

Пусть X — непустое конечное множество. Рассмотрим следующие классы функций вида $f : X^n \to X$ при $n \geqslant 2$.

Класс Φ_0 состоит из всех функций, существенно зависящих от всех своих переменных, т. е. $\forall i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\exists a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in X$ $\exists x, y \in X$, такие, что

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) \neq f(a_1, \ldots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \ldots, a_n). \tag{1}$$

Класс Φ_1 состоит из всех сюрьективных функций f, таких, что $\forall i$ $\forall x, y \in X$ $\exists a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in X$, такие, что выполнено неравенство (1). Этот класс был введён в [1] при изучении свойств операций, удовлетворяющих тождествам (i, j)-ассоциативности для пар $\{i, j\}$, содержащихся в некотором множестве M. Как показано в [1], для функций из этого класса выполнение тождеств ассоциативности для множества M равносильно выполнению тождества ассоциативности только для некоторой одной пары.

Класс Φ_2 состоит из сильно зависимых функций, т. е. $\forall i$ $\exists a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in X$, такие, что унарная функция $f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1} \ldots, a_n)$ является подстановкой по переменной x_i. Для конечных множеств X этот класс функций замкнут относительно операции бесповторной суперпозиции, т. е. бесповторная суперпозиция таких функций является сильно зависимой в том и только в том случае, когда каждая из функций, участвующих в суперпозиции, также является сильно зависимой [2].

Класс Φ_3 состоит из n-квазигрупп на множестве X, т. е. $\forall i$ $\forall a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in X$ унарная функция $f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ является подстановкой по переменной x_i. Изучению свойств n-квазигрупп уделялось наибольшее внимание в связи с их многочисленными применениями в области комбинаторики, теории кодирования, планировании эксперимента и т. д. (см., например, [3]). Этот класс также замкнут относительно операции бесповторной суперпозиции.

В общем случае имеют место включения $\Phi_3 \subset \Phi_2 \subseteq \Phi_1 \subseteq \Phi_0$, причём при $k = 2$ $\Phi_0 = \Phi_1 = \Phi_2$ и при каждом $n \geqslant 1$ класс Φ_0 содержит только две функции, а при $k > 2$ все включения оказываются строгими. Приведём оценки мощностей этих классов. Для классов Φ_0 и Φ_1 из определения вытекают неравенства

$$k^{k^n} - nk^{k^{n-1}} \leqslant |\Phi_0| \leqslant k^{k^n} - k^{k^{n-1}},$$
$$k^{k^n} - nk^{(k-1)k^{n-1}} \leqslant |\Phi_1| \leqslant k^{k^n} - k^{(k-1)k^{n-1}}.$$

Значит, $1 > |\Phi_0|/k^{k^n} \geqslant |\Phi_1|/k^{k^n} \to 1$ при $n \geqslant 2$, $k \geqslant 2$ и $\max\{n, k\} \to \infty$, так как всегда

$$\frac{nk^{k^{n-1}}}{k^{k^n}} = \frac{n}{k^{(k-1)k^{n-1}}} \leqslant \frac{nk^{(k-1)k^{n-1}}}{k^{k^n}} = \frac{n}{k^{k^{n-1}}} \to 0.$$

Для класса Φ_2 имеем

$$k^{k^n} - n(k^k - k!)^{k^{n-1}} \leqslant |\Phi_2| \leqslant k^{k^n} - (k^k - k!)^{k^{n-1}}.$$

Поэтому при $n \to \infty$ и фиксированном k почти все функции k-значной логики являются сильно зависимыми, а при $k \to \infty$ в общем случае имеет место

Утверждение 1 [4, 5]. Пусть $\varepsilon > 0$ и $k \to \infty$. При $n > k/\ln k + 1/2 + \varepsilon$ почти все функций k-значной логики от n переменных являются сильно зависимыми. Если $n < k/\ln k + 1/2 - \varepsilon$, то почти все функции k-значной логики от n переменных не являются сильно зависимыми.

Так как классы Φ_0 и Φ_1 не замкнуты относительно операции бесповторной суперпозиции, то при изучении полугрупповых операций, удовлетворяющих тождествам ассоциативности, имеет смысл рассматривать только сильно зависимые функции.

2. Строение сильно зависимых n-арных полугрупп

Напомним, что *моноидом* называется бинарная полугруппа с единицей. *Подмоноид* моноида $G = (X, \circ)$ — это подмножество H моноида G, которое замкнуто относительно операции $\circ$. Единица моноида H должна совпадать с единицей моноида G.

При $n = 2$ каждая бинарная полугруппа $(X, *)$ с сильно зависимой операцией $*$ является моноидом. В частности, ассоциативная квазигруппа является группой. Этот факт вытекает из следующих утверждений, доказанных в [6, с. 57]:

1) Если для бинарной операции $*$ найдутся элементы $a, b \in X$, такие, что трансляции $L_a = \binom{x}{a*x}$ и $R_b = \binom{x}{x*b}$ являются подстановками, то операция $*$ главно-изотопна операции с единицей, причём изотопия имеет вид (R_b^{-1}, L_A^{-1}, id).
2) Если бинарная операция с единицей $\circ$ изотопна ассоциативной операции $*$, то операция $\circ$ изоморфна операции $*$, при этом изоморфизм имеет вид $\varphi = L_a^{-1} R_b^{-1}$ (теорема А. А. Алберта).

Пусть $n \geqslant 3$. Непустое конечное множество X с заданной на нём n-арной операцией f называется n-арной *полугруппой* (*n-полугруппой*), если при всех i, j, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, выполняются тождества $\{i, j\}$-ассоциативности

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, f(x_i, \ldots, x_{i+n-1}), x_{i+n}, \ldots, x_{2n-1}) =$$
$$= f(x_1, \ldots, x_{j-1}, f(x_j, \ldots, x_{j+n-1}), x_{j+n}, \ldots, x_{2n-1}),$$

$x_1, \ldots, x_n \in X$. Если при этом n-полугруппа является n-квазигруппой, то она называется *n-группой.* Строение произвольной n-арной групповой операции впервые описано Э. Постом в [7] в терминах так называемой обёртывающей группы. Оказывается, что в случае сильно зависимых n-арных полугрупп можно получить аналогичное описание. В данном случае вместо группы используется моноид.

Определение 1. Назовём моноид $G = (\hat{X}, \circ)$ *обёртывающим* для n-арной полугруппы (X, f) с сильно зависимой операцией f, если $X \subset \hat{X}$, множество X порождает моноид G, а n-арная операция f связана с бинарной операцией в моноиде G равенством

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n, \quad x_1, x_2, \ldots, x_n \in X. \tag{2}$$

Теорема 1 (аналог теоремы Э. Поста [8]). Пусть $n \geqslant 3$. Для конечной n-арной полугруппы (X, f) с сильно зависимой операцией f найдётся обёртывающий моноид $G = (\hat{X}, \circ)$, такой, что при некотором обратимом элементе $a \in X$ множеству $X_0 = X \circ a^{-1}$ соответствует подмоноид $H = (X_0, \circ)$, удовлетворяющий условиям $G = \langle X \rangle$, $a \circ X_0 \circ a^{-1} = X_0$ и $|\hat{X}| \mid |X_0|(n-1)$.

Если элемент g обратим, то $|H * g| = |H|$ и при $0 \leqslant i < j \leqslant t-1$, где t — минимальное натуральное число с условием $g^t \in H$, выполняются равенства $|H \circ g^i| = |H \circ g^j|$ и $(H \circ g^i) \cap (H \circ g^j) = \varnothing$. Если $G = \langle H, g \rangle$, то для моноида G справедливо равенство $|G| = |H| \cdot t$. Поэтому в этом случае можно говорить, что моноид G допускает разложение на смежные классы по подмоноиду H.

Таким образом, теорема Поста утверждает, что операция исходной n-арной полугруппы (X, f) по сути совпадает с ограничением операции $x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n$ на смежный класс $X = X_0 \circ a$ обёртывающего моноида $G = (\hat{X}, \circ)$.

Другой способ описания строения n-арной групповой операции получен в работах Л. М. Глускина [9] и М. Хоссу [10]. Аналог их результата для случая сильно зависимых функций имеет следующий вид:

Теорема 2 (аналог теоремы Глускина — Хоссу [5]). Если f — ассоциативная сильно зависимая n-арная операция на конечном множестве X, то для некоторого моноида $(X, *)$, обратимого элемента a и автоморфизма θ этого моноида, таких, что $\theta^{n-1}(x) = a * x * a^{-1}$, $\theta(a) = a$, справедливо тождество

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 * \theta(x_2) * \theta^2(x_3) * \ldots * \theta^{n-1}(x_n) * a, \tag{3}$$

$x_i \in X$, $i = 1, \ldots, n$.

В работе [11] обсуждается взаимосвязь теорем Поста и Глускина — Хоссу и утверждается, что они, по-сути, являются различными формами одного и того же результата. В данном случае это также справедливо и легко устанавливается при переходе от записи функции f с использованием операции $\circ$ в обёртывающем моноиде к записи функции f с использованием операции $*$ на самом смежном классе $X = X_0 \circ a$.

Если исходить из теоремы 1, то обозначим через φ внутренний автоморфизм обертывающего моноида $\varphi(x) = a \circ x \circ a^{-1}$ и соответственно подмоноида X_0. Записывая элементы смежного класса $X = X_0 \circ a$ как $x_i = z_i \circ a$, где $x_i, a \in X$, $z_i \in X_0$, $i = 1, \ldots, n$, получаем

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n = \\ &= (z_1 \circ a) \circ (z_2 \circ a) \circ \ldots \circ (z_n \circ a) = \\ &= z_1 \circ (a \circ z_2 \circ a^{-1}) \circ (a^2 \circ z_2 \circ a^{-2}) \circ \ldots \circ (a^{n-1} \circ z_n \circ a^{-(n-1)}) \circ a^n = \\ &= z_1 \circ \varphi(z_2) \circ \varphi^2(z_3) \circ \ldots \circ \varphi^{n-1}(z_n) \circ a^n. \end{aligned}$$

С другой стороны, поскольку $\varphi(X_0) = X_0$ и $\varphi(a) = a$, то φ оставляет на месте смежный класс X, так как $\varphi(X) = \varphi(X_0 \circ a) = \varphi(X_0) \circ a = \varphi(X)$. Пусть $x * y = x \circ a^{-1} \circ y$. Если $x, y \in X$, то $x * y \in X$. Потому $*$ может рассматриваться как операция на смежном классе X. При этом отображение φ также является гомоморфизмом относительно операции $*$ на X, так как $\varphi(x*y)=\varphi(x\circ a^{-1}\circ y)=\varphi(x)\circ a^{-1}\circ\varphi(y)=\varphi(x)*\varphi(y)$.

Произведём обратную замену переменных z_i на x_i:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= z_1\circ\varphi(z_2)\circ\varphi^2(z_3)\circ\ldots\circ\varphi^{n-1}(z_n)\circ a^n = \\ &= (x_1\circ a^{-1})\circ\varphi(x_2\circ a^{-1})\circ\varphi^2(z_3\circ a^{-1})\circ\ldots\circ\varphi^{n-1}(x_n\circ a^{-1})\circ a^n = \\ &= x_1\circ a^{-1}\circ\varphi(x_2)\circ a^{-1}\circ\varphi^2(z_3)\circ a^{-1}\circ\ldots\circ\varphi^{n-1}(x_n)\circ a^{-1}\circ a^n = \\ &= x_1*\varphi(x_2)*\varphi^2(x_3)*\ldots*\varphi^{n-1}(x_n)*a^n. \end{aligned}$$

Элемент $b=a^n$ принадлежит X, причём $\varphi^{n-1}(x)=a^{n-1}\circ x\circ a^{-(n-1)}=a^n*x*a^{-n+2}$. Переходя к операции $*$, заметим, что обратным к элементу b относительно этой операции является элемент $b^{-1}=a^{-n+2}$, так как $a^n*a^{-n+2}=a^n\circ a^{-1}\circ a^{n+2}=a$, причём элемент a является нейтральным элементом (единицей) моноида $(X,*)$. Поэтому $\varphi^{n-1}(x)=b*x*b^{-1}$ и $\varphi(b)=b$ и справедливо представление (3) утверждения теоремы 2.

Обратно, если исходить из представления (3) теоремы 2, то можно доказать существование обертывающего моноида (подробнее см. доказательство теоремы 3 в [8]) и, повторив приведённые выше рассуждения в обратном порядке, показать справедливость представления (2) теоремы 1.

3. Группа автотопий сильно зависимых n-арных полугрупп

На основании описания строения сильно зависимых n-арных полугрупп, полученного в теоремах 1 и 2, и общего описания групп автотопий бесповторной суперпозиции сильно зависимых функций из [12, 13] нетрудно получить описание строения их групп автотопий. Для случая n-арных квазигрупп оно получено в работе [14].

Пусть $G=(X,*)$ — моноид, $b\in G^*$ и $\theta\in\mathrm{Aut}(*)$. Рассмотрим операции

$$\begin{aligned} f_*(x_1,\ldots,x_n) &= x_1*\cdots*x_n, \\ f_{\theta,*}(x_1,\ldots,x_n) &= x_1*\theta(x_2)*\theta^2(x_3)*\ldots*\theta^{n-1}(x_n), \\ f_{\theta,*,b}(x_1,\ldots,x_n) &= x_1*\theta(x_2)*\theta^2(x_3)*\ldots*\theta^{n-1}(x_n)*b. \end{aligned}$$

Для действия подстановок на множестве X будем использовать запись, соответствующую правому действию: $\alpha\beta(x)=x^{\alpha\beta}=\beta(\alpha(x))$. Заметим, что $f_*(x)=f_{\theta,*}^T(x)=f_{\theta,*}(x^{T^{-1}})$, где $T=(id,\theta,\theta^2,\ldots,\theta^{n-1},id)$ — главная автотопия, и поэтому

$$\mathrm{Atp}(f_{\theta,*})=T\mathrm{Atp}(f_*)T^{-1}. \tag{4}$$

Действительно, если $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1})\in\mathrm{Atp}(f_*)$, то

$$\begin{gathered} \alpha_{n+1}^{-1}f_{\theta,*}(\alpha_1(x_1),\theta\alpha_1\theta^{-1}(x_2),\ldots,\theta^{n-1}\alpha_n\theta^{1-n}(x_n))= \\ =\alpha_{n+1}^{-1}(\alpha_1(x_1)*\theta(\theta\alpha_1\theta^{-1}(x_2))*\ldots*\theta^{n-1}(\theta^{n-1}\alpha_n\theta^{1-n}(x_n)))= \\ =\alpha_{n+1}^{-1}(\alpha_1(x_1)*\alpha_1(\theta(x_2))*\ldots*\alpha_n(\theta^{n-1}(x_n)))=x_1*\theta(x_2)*\ldots*\theta^{n-1}(x_n)=f_{\theta,*}(x_1,\ldots,x_n). \end{gathered}$$

Группа автотопий операции $f_*(x_1,\ldots,x_n)$ описывается следующим образом:

Лемма 1 [12]. Пусть $G=(\Omega,*)$ — моноид и $f_*(x_1,\ldots,x_n)=x_1*\cdots*x_n$. Тогда

а) если операция $*$ неабелева, то группа $\mathrm{Atp}\,(f)$ имеет порядок $|G^*|^{n+1}\,|\mathrm{Aut}\,(G)|$ и состоит из преобразований вида $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1})$, где

$$\begin{aligned} \alpha_i(x) &= a_i^{-1}*\xi(x)*a_{i+1}, \qquad i=\overline{1,n}, \\ \alpha_{n+1}(x) &= a_1^{-1}*\xi(x)*a_{n+1}, \end{aligned}$$

при некоторых $a_1,\ldots,a_{n+1}\in G^*$, $\xi\in\mathrm{Aut}\,(G)$;

б) если операция $*$ абелева, то группа $\mathrm{Atp}\,(f)$ имеет порядок $|G^*|^n\,|\mathrm{Aut}\,(G)|$ и состоит из преобразований вида $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1})$, где

$$\alpha_i(x)=\xi(x)*a_i,\quad i=1,\ldots,n,$$
$$\alpha_{n+1}(x)=\xi(x)*a_1*\cdots*a_n$$

при некоторых $a_1,\ldots,a_n\in G^*$, $\xi\in\mathrm{Aut}\,(G)$.

Применяя лемму 1 и равенство (4), получаем описание групп автотопий функции $f_{\theta,*}$.

Теорема 3. Пусть $G=(\Omega,*)$ — моноид и $\theta\in\mathrm{Aut}(*)$.

1. Если операция $*$ неабелева, то группа автотопий операции

$$f_{\theta,*}(x_1,\ldots,x_n)=x_1*\theta(x_2)*\theta^2(x_3)*\ldots*\theta^{n-1}(x_n)$$

состоит из таких наборов подстановок $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1})$, что при некоторых обратимых относительно $*$ элементах $a_1,a_2,\ldots,a_{n+1}\in X$ и $\xi\in\mathrm{Aut}(*)$ выполнены равенства

$$\begin{cases}
\alpha_1(x_1)= & a_1^{-1}*\xi(x_1)*a_2,\\
\alpha_2(x_2)= & \theta^{-1}(a_2^{-1}*\xi(\theta(x_2))*a_3),\\
\alpha_3(x_3)= & \theta^{-2}(a_3^{-1}*\xi(\theta^2(x_3)*a_4),\\
\ldots & \\
\alpha_{n-1}(x_{n-1})= & \theta^{2-n}(a_{n-1}^{-1}*\xi(\theta^{n-2}(x_{n-1}))*a_n),\\
\alpha_n(x_n)= & \theta^{1-n}(a_n^{-1}*\xi(\theta^{n-1}(x_n))*a_{n+1}),\\
\alpha_{n+1}(y)= & a_1^{-1}*\xi(y)*a_{n+1}.
\end{cases}$$

При этом всякий набор подстановок $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1})$ при произвольных обратимых $a_1,\ldots,a_{n+1}\in G^*$ и $\xi\in\mathrm{Aut}\,(G)$, удовлетворяющий этим равенствам, является автотопией операции $f_{\theta,*}$.

2. Если операция $*$ абелева, то группа автотопий операции $f_{\theta,*}(x_1,\ldots,x_n)$ состоит из таких наборов подстановок $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1})$, что при некоторых обратимых относительно $*$ элементах $a_1,a_2,\ldots,a_n\in X$ и $\xi\in\mathrm{Aut}(*)$ выполнены равенства

$$\begin{cases}
\alpha_1(x_1)= & a_1^{-1}*\xi(x_1)*a_1,\\
\alpha_2(x_2)= & \theta^{-1}(\xi(\theta(x_2))*a_2),\\
\alpha_3(x_3)= & \theta^{-2}(\xi(\theta^2(x_3)*a_3),\\
\ldots & \\
\alpha_{n-1}(x_{n-1})= & \theta^{2-n}(\xi(\theta^{n-2}(x_{n-1}))*a_{n-1}),\\
\alpha_n(x_n)= & \theta^{1-n}(\xi(\theta^{n-1}(x_n))*a_n),\\
\alpha_{n+1}(y)= & \xi(y)*a_1\ldots*a_n.
\end{cases}$$

При этом всякий набор подстановок $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ при произвольных обратимых $a_1,\ldots,a_n\in G^*$ и $\xi\in\mathrm{Aut}\,(G)$, удовлетворяющий этим равенствам, является автотопией операции $f_{\theta,*}$.

Группы автотопий операции $f_{\theta,*,b}$ описываются аналогично. В силу очевидного равенства $f_{\theta,*,b}=f_{\theta,*}^S$, где $S=(id,\ldots,id,R_b)$, для групп автотопий выполняется соотношение

$$\mathrm{Atp}(f_{\theta,*,b})=S^{-1}\mathrm{Atp}(f_{\theta,*})S.$$

Поэтому описание группы автотопий функции $f_{\theta,*,b}$ отличается тем, что в теореме 3 надо заменить значение подстановки $\alpha_{n+1}(y)$ на $R_b^{-1}\alpha_{n+1}R_b(y)=\alpha_{n+1}(y*b^{-1})*b$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сохацкий Ф. Н.* Об ассоциативности многоместных операций // Дискретная математика. 1992. Т. 4. № 1. С. 66–84.
2. *Сосинский Л. М.* О представлении функций бесповторными суперпозициями в трехзначной логике // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1964. Вып. 12. С. 57–68.
3. *Белоусов В. Д.* n-Арные квазигруппы. Кишинев: Штиинца, 1972. 277 с.
4. *Черемушкин А. В.* Некоторые асимптотические оценки для класса сильно зависимых функций // Вестник Томского госуниверситета. Приложение. 2006. № 17. С. 87–94.
5. *Черемушкин А. В.* Аналоги теорем Глускина — Хоссу и Малышева для сильно зависимых n-арных операций // Дискретная математика, 2018. Т. 30. Вып. 2. С. 15–24.
6. *Bruck R. H.* A survey of binary systems. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1958. 185 p.
7. *Post E. L.* Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1940. V. 48. No. 2. P. 208–350.
8. *Черемушкин А. В.* Теорема Поста для сильно зависимых n-арных полугрупп // Дискретная математика. 2019. Т. 31. № 2. С. 153–158.
9. *Глускин Л. М.* Позиционные оперативы // Математич. сборник. 1965. Т. 68 (110). № 3. С. 444–472.
10. *Hosszu M.* On the explicit form of n-group operations // Publ. Math. 1963. V. 10. No. 1–4. P. 88–92.
11. *Гальмак А. М., Воробьев Г. Н.* О теореме Поста — Глускина — Хоссу // Проблемы физики, математики и техники. 2013. Вып. 1(14). С. 55–59.
12. *Черемушкин А. В.* Бесповторная декомпозиция сильно зависимых функций // Дискретная математика. 2004. Т. 16. Вып. 3. С. 3–42.
13. *Черемушкин А. В.* Декомпозиция и классификация дискретных функций. М.: Курс, 2018. 288 с.
14. *Khodabandeh H. and Shahryari M.* On the automorphisms and representations of polyadic groups // Commun. Algebra. 2012. V. 40. No. 6. P. 2199–2212.

УДК 519.728 DOI 10.17223/2226308X/12/11

МИНИМАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВИТЕЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО ДЛЯ СИСТЕМЫ ЧАСТОТНЫХ КЛАССОВ НЕДООПРЕДЕЛЁННЫХ СЛОВ

Л. А. Шоломов

Частотный класс недоопределённых слов — это множество всех слов в некотором недоопределённом алфавите, имеющих заданную длину и заданные частоты вхождения символов. Рассматривается задача доопределения произвольной системы частотных классов. Предложен метод выделения из этой системы минимальной по мощности подсистемы, такой, что достаточно получить доопределения для классов этой подсистемы, а по ним доопределения других классов системы находятся просто.

Ключевые слова: *недоопределённые данные, доопределение, частотный класс, представительное множество.*

Пусть $M = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ и выделена система $\mathcal{T} \subseteq 2^M$ некоторых непустых подмножеств $T \subseteq M$. С множеством M связан алфавит $A_0 = \{a_i : i \in M\}$ *основных* символов, с множеством $\mathcal{T}$ — алфавит $A = \{a_T : T \in \mathcal{T}\}$ *недоопределённых* символов. *Доопределением символа* a_T считается всякий основной символ a_i, $i \in T$, *доопределением слова* v в алфавите A — любое слово, полученное из v заменой каждого символа каким-либо его доопределением, а *доопределением множества* V слов в алфавите A —