Секция 5

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ И ГРАФОВ

УДК 519.17 DOI 10.17223/2226308X/12/48

О ГЕНЕРАЦИИ НЕИЗОМОРФНЫХ РАСКРАСОК МЕТОДОМ РИДА — ФАРАДЖЕВА

М. Б. Абросимов, П. В. Разумовский

Рассматривается задача генерации всех неизоморфных вершинных k-раскрасок заданного графа. Предлагается алгоритм решения задачи без проверки на изоморфизм методом Рида — Фараджева.

Ключевые слова: *раскраска вершин графа, изоморфизм, генерация раскрасок.*

Введение

Отказоустойчивость — одно из важных свойств, которое необходимо учитывать при разработке безопасных систем. Для исследования полной отказоустойчивости дискретных систем в 1976 г. John P. Hayes [1] предложил теоретическую модель, основанную на графах. Вершины графа соответствуют элементам системы, а рёбра — связям между элементами. Если элементы системы имеют разный тип, то соответствующие им вершины получают метку, обозначающую тип или цвет. Аналогично можно рассматривать систему, в которой и связи могут иметь разный тип. В соответствующем графе рёбра будут раскрашены в цвет, обозначающий тип связи. Если элементы и связи системы имеют одинаковый тип, то рассматривается обыкновенный граф, в котором вершины и рёбра не окрашены. Большинство полученных результатов по исследованию отказоустойчивости систем относятся именно к этому случаю, то есть к неокрашенным графам [2]. При переходе к цветным графам возникает задача их генерации по заданному неокрашенному графу. В данной работе рассматривается именно такая задача. Очевидно, что эта задача может представлять интерес и без привязки к исследованию отказоустойчивых систем.

Определение 1. Пусть $G = (V, \alpha)$ — неориентированный граф, k — натуральное число. Функция вида $f : V \to \{1, \ldots, k\}$ называется *вершинной k-раскраской* графа G, $f(v)$ — цветом вершины $v \in V$, а граф G, каждой вершине которого сопоставляется какой-нибудь цвет, называется *цветным* либо *графом с цветными вершинами.* Цветной граф будем обозначать $G = (V, \alpha, f)$.

Определение 2. *Изоморфизмом цветных графов* $G_1 = (V_1, \alpha_1, f_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2, f_2)$ называется изоморфизм графов $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$, сохраняющий цвета, т. е. биекция $\varphi : V_1 \to V_2$, при которой выполняются следующие два условия:

1) $\forall\, u, v \in V_1 \big((u, v) \in \alpha_1 \Leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in \alpha_2\big)$;
2) $\forall\, v \in V_1 \big(f_1(v) = f_2(\varphi(v))\big)$.

Изоморфизм цветных графов также называется *цветным изоморфизмом.* Аналогично вводится понятие изоморфизма *графов с цветными рёбрами.*

Графы с применённой на них функцией раскраски будем называть *раскраской*. Таким образом, генерация раскрасок подразумевает поиск всех таких функций вида $f : V \to \{1, \ldots, k\}$, при которых цветные графы, полученные раскраской заданного графа, будут неизоморфны друг другу.

Определение 3. *Цветной автоморфизм графа* — это изоморфизм цветного графа на себя. Множество всех цветных автоморфизмов, включая тождественный, образует *группу автоморфизмов графа*.

Определение 4. Две вершины графа называются *подобными*, если существует автоморфизм, отображающий одну вершину на другую. Множество подобных вершин называется *орбитой*.

1. Задача генерации неизоморфных k-раскрасок графа

Генерация всех неизоморфных раскрасок вершин заданного графа ровно в k цветов не имеет эффективного решения. Существуют различные подходы для решения данной задачи, наиболее результативными из которых являются методы с использованием техники «isomorphism rejection» (без непосредственной проверки на изоморфизм), хороший обзор которой можно найти в работе [3].

Ранее был описан алгоритм генерации неизоморфных раскрасок, в основе которого лежит метод МакКея [4]. В этой работе рассматривается другой подход — алгоритм генерации методом Рида — Фараджева.

2. Метод Рида — Фараджева порождения объектов без проверки на изоморфизм

Одним из наиболее распространённых методов порождения комбинаторных объектов без проверки на изоморфизм является метод канонических представителей. Идея метода в общем виде состоит в следующем:

1) определяется способ кодирования объектов;
2) среди всех кодов изоморфных объектов выбирается канонический код (представитель);
3) порождаются все возможные уникальные структуры вместе с их кодами;
4) порождённая структура принимается, если её код канонический, в противном случае исключается.

В методе Рида — Фараджева дополнительно к методу канонических представителей производится раннее отсечение вариантов, которые не могут привести к каноническому представителю.

3. Схема поиска неизоморфных раскрасок методом Рида — Фараджева

Схема поиска базируется на принципе перебора с отсечениями. На каждой итерации вычисляется множество орбит для заданной раскраски, выбирается по одному представителю из каждой орбиты и каждый представитель раскрашивается во все цвета выбранным способом. Из полученного набора отсекаются раскраски, не подходящие под условия, описанные ниже. Генерация продолжается до тех пор, пока не останется неотсечённых вариантов раскрасок графа.

Данная схема предполагает следующий ход генерации: на вход подаётся вектор цветов (раскраска) вершин графа, инициализированный первым цветом 1. Строится множество орбит. Из каждой орбиты выбирается наибольший представитель, то есть вершина с максимальным номером. Каждый представитель раскрашивается во все цвета от 2 до k. Все получающиеся раскраски проверяются перекрашиванием — если перекрашенная раскраска меньше проверяемой, то проверяемая раскраска отсекается.

Раскраска перекрашивается следующим образом: инициализируем переменную l первым цветом; циклически проходимся по всем вершинам; если текущая вершина ранее не встречалась в раскраске, присваиваем ей цвет l и увеличиваем l на единицу; если вершина уже присутствовала в раскраске, раскрашиваем её в присвоенный ей цвет. Генерация заканчивается, когда на очередном шаге не останется неотсеченных раскрасок.

4. Алгоритм генерации неизоморфных раскрасок методом Рида — Фараджева

Алгоритмы 1–3 формализуют процедуру генерации неизоморфных раскрасок методом Рида — Фараджева. Для вычисления орбит по заданному разбиению используется программа nauty [5], реализованная по разработанному Б. МакКеем алгоритму [6].

Полученные алгоритмом 1 раскраски удовлетворяют условию неизоморфности. Проверка на изоморфизм не используется.

Алгоритм 1. Генерация неизоморфных раскрасок методом Рида — Фараджева

Вход: g — граф $G = (V, \alpha)$; k — количество цветов, $1 \leqslant k \leqslant |V|$.

$clr := (1, \ldots, 1)$, $|clr| = |V|$ // *clr_i — цвет вершины i*
genecolor_procedure(g, k, clr) // *вызов процедуры перебора раскрасок*

Алгоритм 2. Перебор раскрасок genecolor_procedure

Вход: g — граф $G = (V, \alpha)$; k — количество цветов, $1 \leqslant k \leqslant |V|$; clr — вектор цветов вершин графа.

$orbs :=$ nauty_calculate_orbits(g, clr) // *вызов функции программы nauty*
Для всех orb in $orbs$
  $maxorb \leftarrow \max(orb)$, $current := 2$.
  Пока $current \leqslant k$
    $prevcolor := clr[maxorb]$, $clr[maxorb] := current$;
    $reclr :=$ recolor_procedure(clr); // *вызов процедуры перекрашивания*
    $less :=$ `true`.
    Для i от 0 до $n-1$
      $less := less \;\&\; (reclr[i] < clr[i])$;
    $clrcnt :=$ количество различных цветов в clr.
    Если $less =$ `true` и $clrcnt = k$, **то**
      Вывести clr.
    genecolor_procedure(g, k, clr) // *рекурсивный вызов процедуры перебора раскрасок*
    $clr[maxorb] := clr[maxorb]$, $current := current + 1$.

Алгоритм 3. Перекрашивание раскраски recolor_procedure

Вход: clr — вектор цветов вершин графа.
Выход: $reclr$ — вектор цветов вершин графа, подвергшийся процедуре перекраски.

$cur := 1$, $clrmap := (-1, \ldots, -1)$, $|clrmap| = |clr|$, $i := 0$.
Пока $i < n$
  Если $clrmap[clr[i]] = -1$, **то**
    $reclr[i] := cur$, $clrmap[clr[i]] := cur$, $cur := cur + 1$,
  иначе
    $reclr[i] := clrmap[clr[i]]$.
  $i := i + 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C.25. No. 9. P. 875–884.
2. *Абросимов М. Б.* Графовые модели отказоустойчивости. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 192 с.
3. *Brinkmann G.* Isomorphism rejection in structure generation programs // Discrete Mathematical Chemistry. DIMACS Ser. Discr. Math. Theor. Comput. Sci. 2000. V. 51. P. 25–38.
4. *Абросимов М. Б., Разумовский П. В.* О генерации неизоморфных вершинных k-раскрасок // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2017. № 10. С. 136–138.
5. *McKay B. D.* Nauty and Traces: Graph canonical labeling and automorphism group computation // `http://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/nauty/nug26.pdf`. 2017.
6. *McKay B. D. and Piperno A.* Practical graph isomorphism // J. Symbolic Computation. 2013. V. 2. No. 60. P. 94–112.

УДК 519.1 DOI 10.17223/2226308X/12/49

ОБ ИНДЕКСАХ СОСТОЯНИЙ В КОНЕЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ОРИЕНТАЦИЙ ПОЛНЫХ ГРАФОВ

А. В. Жаркова

Рассматриваются конечные динамические системы ориентаций полных графов. Состояниями системы являются все возможные ориентации данного полного графа, а эволюционная функция задаётся следующим образом: динамическим образом данного орграфа является орграф, полученный из исходного путём переориентации всех дуг, входящих в стоки, других отличий между исходным орграфом и его образом нет. Предлагается алгоритм вычисления индексов состояний системы, находится максимальный из индексов состояний, приводятся соответствующие таблицы для данных конечных динамических систем ориентаций полных графов с количеством вершин от двух до семи включительно.

Ключевые слова: *граф, индекс, конечная динамическая система, ориентация графа, полный граф, турнир, эволюционная функция.*

Графовые модели, в которых отказы процессоров интерпретируются как удаление соответствующих вершин, а отказы сетевых каналов — как удаление дуг, занимают важное место в задачах, связанных с отказоустойчивостью компьютерных сетей. При изучении модельных графов можно применять идеи и методы теории конечных