Алгоритм 3. Перекрашивание раскраски recolor_procedure

Вход: clr — вектор цветов вершин графа.
Выход: $reclr$ — вектор цветов вершин графа, подвергшийся процедуре перекраски.

$cur := 1$, $clrmap := (-1, \ldots, -1)$, $|clrmap| = |clr|$, $i := 0$.
Пока $i < n$
  Если $clrmap[clr[i]] = -1$, **то**
    $reclr[i] := cur$, $clrmap[clr[i]] := cur$, $cur := cur + 1$,
  иначе
    $reclr[i] := clrmap[clr[i]]$.
  $i := i + 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C.25. No. 9. P. 875–884.
2. *Абросимов М. Б.* Графовые модели отказоустойчивости. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 192 с.
3. *Brinkmann G.* Isomorphism rejection in structure generation programs // Discrete Mathematical Chemistry. DIMACS Ser. Discr. Math. Theor. Comput. Sci. 2000. V. 51. P. 25–38.
4. *Абросимов М. Б., Разумовский П. В.* О генерации неизоморфных вершинных k-раскрасок // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2017. № 10. С. 136–138.
5. *McKay B. D.* Nauty and Traces: Graph canonical labeling and automorphism group computation // `http://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/nauty/nug26.pdf`. 2017.
6. *McKay B. D. and Piperno A.* Practical graph isomorphism // J. Symbolic Computation. 2013. V. 2. No. 60. P. 94–112.

УДК 519.1 DOI 10.17223/2226308X/12/49

ОБ ИНДЕКСАХ СОСТОЯНИЙ В КОНЕЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ОРИЕНТАЦИЙ ПОЛНЫХ ГРАФОВ

А. В. Жаркова

Рассматриваются конечные динамические системы ориентаций полных графов. Состояниями системы являются все возможные ориентации данного полного графа, а эволюционная функция задаётся следующим образом: динамическим образом данного орграфа является орграф, полученный из исходного путём переориентации всех дуг, входящих в стоки, других отличий между исходным орграфом и его образом нет. Предлагается алгоритм вычисления индексов состояний системы, находится максимальный из индексов состояний, приводятся соответствующие таблицы для данных конечных динамических систем ориентаций полных графов с количеством вершин от двух до семи включительно.

Ключевые слова: *граф, индекс, конечная динамическая система, ориентация графа, полный граф, турнир, эволюционная функция.*

Графовые модели, в которых отказы процессоров интерпретируются как удаление соответствующих вершин, а отказы сетевых каналов — как удаление дуг, занимают важное место в задачах, связанных с отказоустойчивостью компьютерных сетей. При изучении модельных графов можно применять идеи и методы теории конечных динамических систем (см., например, [1–3]). В модели [1] в качестве механизма восстановления работоспособности сети предлагается так называемая SER-динамика бесконтурных связных ориентированных графов. В настоящей работе полные графы изучаются с точки зрения динамического подхода к отказоустойчивости графовых систем.

Под *ориентированным графом* (*орграфом*) понимается пара $\overrightarrow{G} = (V, \beta)$, где V — конечное непустое множество вершин, а $\beta \subseteq V \times V$ — отношение (смежности) на множестве V (пара $(u, v) \in \beta$ называется *дугой* орграфа с *началом* u и *концом* v). Отсутствие петель в орграфе $\overrightarrow{G}$ означает антирефлексивность его отношения смежности. *Неориентированным графом* (*графом*) называется пара $G = (V, \beta)$, где β — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V. Дуги неориентированного графа называют *рёбрами*. Орграф $\overrightarrow{G} = (V, \beta)$ называется *направленным графом* (*диграфом*), если отношение β антисимметрично. Пусть $\overrightarrow{G} = (V, \beta)$ — некоторый орграф, $v \in V$ — одна из его вершин. *Степенью исхода* вершины $v \in V$ называется число $d^+(v)$ дуг орграфа $\overrightarrow{G} = (V, \beta)$, имеющих своим началом v; *степень захода* вершины v — это количество $d^-(v)$ дуг, имеющих v своим концом. Граф $G = (V, \beta)$ называется *полным*, если любые две его вершины соединены ребром. Полный граф с n вершинами обозначается символом K_n. Маршрут, в котором никакая дуга не встречается более одного раза, называется *путём*. Путь, каждая вершина которого принадлежит не более чем двум его дугам, называется *простым*; простой циклический путь в орграфе — *контуром*. *Турниром* называется полный направленный граф [4].

Под *конечной динамической системой* понимается пара (S, δ), где S — конечное непустое множество *состояний системы*, $\delta : S \to S$ — *эволюционная функция системы*. Таким образом, каждой конечной динамической системе сопоставляется карта, представляющая собой орграф с множеством вершин S и дугами из каждой вершины $s \in S$ в вершину $\delta(s)$. Компоненты связности графа, задающего динамическую систему, называются её *бассейнами*. Каждый бассейн представляет собой контур с входящими в него деревьями. Контуры, в свою очередь, называются предельными циклами или *аттракторами*.

Основными проблемами теории конечных динамических систем являются задачи отыскания эволюционных параметров системы без проведения динамики. К их числу относится *индекс* состояния (расстояние от него до аттрактора того бассейна, которому оно принадлежит), а также максимальный из индексов состояний. Автором написаны программы для ЭВМ, позволяющие вычислять различные параметры конечных динамических систем, ассоциированных с некоторыми типами графов, в частности [5]. Предложены алгоритмы вычисления индексов состояний в конечных динамических системах ориентаций некоторых типов графов [6, 7]. В данной работе предлагается алгоритм вычисления индексов состояний в конечных динамических системах ориентаций полных графов, находится максимальный из индексов состояний системы.

Пусть дан полный граф $G = (V, \beta)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $n > 1$, $m = n(n-1)/2$ — число рёбер. Придадим его рёбрам произвольную ориентацию, тем самым получив направленный граф (турнир) $\overrightarrow{G} = (V, \beta)$, где отношение смежности β антирефлексивно и антисимметрично. Применим к полученному орграфу эволюционную функцию α, которая у данного орграфа одновременно переориентирует все дуги, входящие в *стоки* (вершины с нулевой степенью исхода), а остальные дуги оставляет без изменения, в результате чего получаем орграф $\alpha(\overrightarrow{G})$. Если проделать указанные действия со всеми возможными ориентациями данного графа, то получим карту данной конечной динамической системы, состоящую из одного или нескольких бассейнов.

Таким образом, будем рассматривать конечную динамическую систему (Γ_{K_n}, α), $n > 1$, где Γ_{K_n} — множество всех возможных ориентаций полного графа K_n, $|\Gamma_{K_n}| = 2^m$, а эволюционная функция α задаётся следующим образом: если дан некоторый орграф $\overrightarrow{G} \in \Gamma_{K_n}$, то его динамическим образом $\alpha(\overrightarrow{G})$ является орграф, полученный из $\overrightarrow{G}$ одновременной переориентацией всех дуг, входящих в стоки, других отличий между $\overrightarrow{G}$ и $\alpha(\overrightarrow{G})$ нет.

На рис. 1 изображена карта конечной динамической системы (Γ_{K_3}, α).

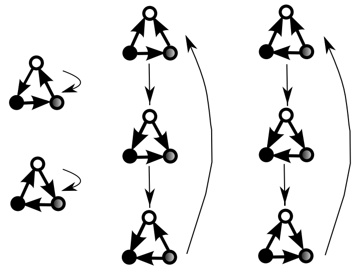

Рис. 1. Карта конечной динамической системы (Γ_{K_3}, α)

Определение 1. Под *вектором степеней захода* ориентированного графа $\overrightarrow{G} = (V, \beta)$ будем понимать вектор, компонентами которого являются степени захода всех его вершин, то есть $(d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n))$.

Теорема 1. В конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α), $n > 1$, индекс состояния $\overrightarrow{G} \in \Gamma_{K_n}$ равен 0 тогда и только тогда, когда орграф $\overrightarrow{G}$ удовлетворяет одному из следующих условий:

1) у него нет стока;
2) его вектор степеней захода представляет собой некоторую перестановку чисел $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Теорема 2. Пусть состояние $\overrightarrow{G} \in \Gamma_{K_n}$ конечной динамической системы (Γ_{K_n}, α), $n > 1$, имеет сток и вектор степеней захода $(d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n))$, отличный от любой из перестановок чисел $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, и f — мощность наибольшего множества вида $\{n-1, n-2, \ldots, n-f\} \subseteq \{d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n)\}$, тогда индекс состояния $\overrightarrow{G}$ равен f.

Алгоритм 1. Алгоритм вычисления индекса состояния системы (Γ_{K_n}, α), $n > 1$

1: Для состояния $\overrightarrow{G}$ построить его вектор степеней захода $(d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n))$.
2: **Если** $n - 1 \notin \{d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n)\}$, **то**
3: $\quad i(\overrightarrow{G}) := 0$, конец алгоритма.
4: **Если** Если вектор степеней захода $(d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n))$ представляет собой перестановку чисел $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, **то**
5: $\quad i(\overrightarrow{G}) := 0$, конец алгоритма.
6: Построить наибольшее множество вида $\{n-1, n-2, \ldots, n-f\} \subseteq \{d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n)\}$.
7: $i(\overrightarrow{G}) := f$, конец алгоритма.

Теорема 3. Алгоритм 1 корректен.

Теорема 4. В конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α) максимальный из индексов состояний равен 0 при $n = 2$ и $n - 3$ при $n > 2$.

В таблице приведены данные о количестве состояний с разными индексами в конечных динамических системах (Γ_{K_n}, α) для $1 < n < 8$, полученные с помощью вычислительных экспериментов. Можно заметить, что большинство состояний имеют индекс 0 (являются циклическими).

n	Индекс				
	0	1	2	3	4
2	2	–	–	–	–
3	8	–	–	–	–
4	56	8	–	–	–
5	824	160	40	–	–
6	27344	4224	960	240	–
7	1872816	186368	29568	6720	1680

ЛИТЕРАТУРА

1. *Barbosa V. C.* An Atlas of Edge-Reversal Dynamics. London: Chapman & Hall/CRC, 2001.
2. *Colon-Reyes O., Laubenbacher R., and Pareigis B.* Boolean monomial dynamical systems // Ann. Combinatorics. 2004. V. 8. P. 425–439.
3. *Салий В. Н.* Об одном классе конечных динамических систем // Вестник Томского гос. ун-та. Приложение. 2005. № 14. С. 23–26.
4. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, Физматлит, 1997.
5. *Власова А. В.* Исследование эволюционных параметров в динамических системах двоичных векторов. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2009614409, выданное Роспатентом. Заявка № 2009613140. Дата поступления 22 июня 2009 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 20 августа 2009 г.
6. *Жаркова А. В.* Индексы в динамической системе (B, δ) двоичных векторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11. Вып. 3. Ч. 1. С. 116–122.
7. *Жаркова А. В.* Индексы состояний в динамической системе двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями пальм // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16. Вып. 4. С. 475–484.

УДК 519.17 DOI 10.17223/2226308X/12/50

ПОСТРОЕНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ РАСШИРЕНИЙ ГРАФА МЕТОДОМ КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ

И. А. К. Камил, Х. Х. К. Судани, А. А. Лобов, М. Б. Абросимов

Граф G^* называется вершинным (рёберным) k-расширением графа G, если после удаления любых k вершин (рёбер) из графа G^* граф G вкладывается в получившийся граф. Вершинное (рёберное) k-расширение графа G называется минимальным, если оно имеет наименьшее число вершин и рёбер среди всех вершинных (рёберных) k-расширений графа G. Предлагается алгоритм построения всех неизоморфных минимальных вершинных (рёберных) k-расширений заданного графа без проверки на изоморфизм.