Теорема 3. Алгоритм 1 корректен.

Теорема 4. В конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α) максимальный из индексов состояний равен 0 при $n = 2$ и $n - 3$ при $n > 2$.

В таблице приведены данные о количестве состояний с разными индексами в конечных динамических системах (Γ_{K_n}, α) для $1 < n < 8$, полученные с помощью вычислительных экспериментов. Можно заметить, что большинство состояний имеют индекс 0 (являются циклическими).

n	Индекс				
	0	1	2	3	4
2	2	–	–	–	–
3	8	–	–	–	–
4	56	8	–	–	–
5	824	160	40	–	–
6	27344	4224	960	240	–
7	1872816	186368	29568	6720	1680

ЛИТЕРАТУРА

1. *Barbosa V. C.* An Atlas of Edge-Reversal Dynamics. London: Chapman & Hall/CRC, 2001.
2. *Colon-Reyes O., Laubenbacher R., and Pareigis B.* Boolean monomial dynamical systems // Ann. Combinatorics. 2004. V. 8. P. 425–439.
3. *Салий В. Н.* Об одном классе конечных динамических систем // Вестник Томского гос. ун-та. Приложение. 2005. № 14. С. 23–26.
4. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, Физматлит, 1997.
5. *Власова А. В.* Исследование эволюционных параметров в динамических системах двоичных векторов. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2009614409, выданное Роспатентом. Заявка № 2009613140. Дата поступления 22 июня 2009 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 20 августа 2009 г.
6. *Жаркова А. В.* Индексы в динамической системе (B, δ) двоичных векторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11. Вып. 3. Ч. 1. С. 116–122.
7. *Жаркова А. В.* Индексы состояний в динамической системе двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями пальм // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16. Вып. 4. С. 475–484.

УДК 519.17 DOI 10.17223/2226308X/12/50

ПОСТРОЕНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ РАСШИРЕНИЙ ГРАФА МЕТОДОМ КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ

И. А. К. Камил, Х. Х. К. Судани, А. А. Лобов, М. Б. Абросимов

Граф G^* называется вершинным (рёберным) k-расширением графа G, если после удаления любых k вершин (рёбер) из графа G^* граф G вкладывается в получившийся граф. Вершинное (рёберное) k-расширение графа G называется минимальным, если оно имеет наименьшее число вершин и рёбер среди всех вершинных (рёберных) k-расширений графа G. Предлагается алгоритм построения всех неизоморфных минимальных вершинных (рёберных) k-расширений заданного графа без проверки на изоморфизм.

Ключевые слова: *отказоустойчивость, расширение графа, изоморфизм, канонический код, метод канонических представителей.*

В разработке безопасных систем большое значение имеет отказоустойчивость. Под отказоустойчивостью понимается свойство системы сохранять работоспособность после отказа. В 1976 г. John P. Hayes [1] предложил основанную на графах модель для исследования отказоустойчивости элементов. Позднее модель была распространена на отказы связей [2]. Формализацией отказоустойчивой реализации системы является расширение графа системы [3].

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным k-расширением* n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является вершинным k-расширением графа G, то есть G вкладывается в каждый граф, получающийся из G^* удалением любых его k вершин;
2) граф G^* содержит $n + k$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + k$;
3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным рёберным k-расширением* n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является рёберным k-расширением графа G, то есть G вкладывается в каждый граф, получающийся из G^* удалением любых его k рёбер;
2) граф G^* содержит n вершин, то есть $|V^*| = |V|$;
3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Определение минимального рёберного k-расширения отличается тем, что дополнительные вершины не добавляются. Задача построения минимальных вершинных и рёберных k-расширений является вычислительно сложной [4]. Для построения минимальных k-расширений графов с малым числом вершин можно использовать переборный алгоритм 1 [3].

Алгоритм 1. Построение всех минимальных вершинных k-расширений графа

1: $m := 0$.
2: $m := m + 1$.
3: Строим все графы, получающиеся из графа G добавлением k вершин и m дополнительных рёбер.
4: Выбираем среди построенных графов вершинные k-расширения графа G.
5: Если на шаге 4 не было найдено графов, то переходим на шаг 2.
6: Среди графов, выбранных на шаге 4, оставляем по одному представителю от классов изоморфных графов.

Для построения минимальных рёберных k-расширений на шаге 3 не нужно добавлять k вершин, а на шаге 4 нужно проверять, является ли граф рёберным k-расширением. Далее будем рассматривать задачу построения минимальных вершинных k-расширений, хотя все идеи применимы и для построения минимальных рёберных k-расширений.

У алгоритма 1 можно выделить несколько недостатков, связанных с избыточным перебором. Один из них состоит в следующем: если на шаге 3 могут появляться изоморфные графы, то необходимо хранить все построенные расширения, чтобы на шаге 6 исключить изоморфные копии. Если на шаге 3 строить только неизоморфные графы, то необходимость хранения всех построенных расширений исчезнет. Можно использовать метод канонических представителей, при котором из каждого класса изоморфных графов выбирается один канонический представитель. Идея метода в общем виде состоит в следующем [5]:

1) определяется способ кодирования графов;
2) среди всех кодов изоморфных графов выбирается канонический код (представитель);
3) порождаются все возможные коды графов;
4) порождённый граф принимается, если его код канонический, в противном случае исключается.

Получим алгоритм 2.

Алгоритм 2. Построение всех минимальных вершинных k-расширений графа без проверки на изоморфизм

1: $m := 0$.
2: $m := m + 1$.
3: Строим все неизоморфные графы, получающиеся из графа G добавлением k вершин и m рёбер.
4: Выбираем среди построенных графов вершинные k-расширения графа G.
5: Если на шаге 4 не было найдено графов, то переходим на шаг 2.
6: Полученные на шаге 4 графы являются минимальными вершинными k-расширениями графа G.

Для использования метода канонических представителей самым важным является выбор канонического кода. Предлагается взять код, основанный на матрице смежности графа. Для простых неориентированных графов матрица смежности симметрична относительно главной диагонали, а на главной диагонали расположены нули.

Через G обозначим граф, для которого требуется найти минимальное вершинное или рёберное k-расширение, через H — граф, для которого будем строить код. Если число вершин в графе G меньше числа вершин графа H, то добавляем к графу G изолированные вершины. Определим код $C_G(H)$ графа H следующим образом: будем дважды просматривать элементы матрицы смежности графа G, находящиеся выше главной диагонали, по столбцам слева направо и выписывать соответствующие элементы матрицы смежности графа H по следующим правилам:

1) в первый раз выписываем элемент матрицы смежности H, если в матрице смежности G стоит 1;
2) во второй раз выписываем элемент матрицы смежности H, если в матрице смежности G стоит 0.

В столбце элементы матрицы смежности перечисляются сверху вниз. На рис. 1 приведён пример построения кода.

Будем называть граф H каноническим относительно G (либо просто каноническим) и его код каноническим, если среди всех графов, изоморфных H, код графа H является лексикографически наибольшим:

$$\forall R \cong H, R \neq H\big(C_G(R) < C_G(H)\big).$$

Если G является частью графа H, то $C_G(G) \leqslant C_G(H)$, иначе $C_G(G) > C_G(H)$.

Справедливо следующее утверждение: граф G вкладывается в граф H тогда и только тогда, когда существует $W \cong H$, такой, что $C_G(W) \geqslant C_G(G)$. Это означает, что

M_G

0	**1**	0	0	0
1	0	**1**	0	0
0	1	0	**1**	**1**
0	0	1	0	0
0	0	1	0	0

$C_G(G)$ = **1111**000000

Порядок выписывания

0	**1**	5	6	8
1	0	**2**	7	9
0	1	0	**3**	**4**
0	1	0	0	10
0	0	1	1	0

M_H

0	**1**	0	0	0
1	0	**1**	1	0
0	1	0	**0**	**1**
0	1	0	0	1
0	0	1	1	0

$C_G(H)$ = **1101**001001

Рис. 1. Пример построения кода $C_G(H)$

если граф G вкладывается в граф H, то существует изоморфный ему канонический граф W, для которого $C_G(W) \geqslant C_G(G)$. Таким образом, канонический представитель класса изоморфизма каждого графа, в который вкладывается G, может быть получен добавлением рёбер в граф G. Следовательно, алгоритм 2 является корректным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C.25. No. 9. P. 875–884.
2. *Harary F. and Hayes J. P.* Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. V. 23. P. 135–142.
3. *Абросимов М. Б.* Графовые модели отказоустойчивости. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 192 с.
4. *Абросимов М. Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. № 5(88). С. 643–650.
5. *Brinkmann G.* Isomorphism rejection in structure generation programs // DIMACS Series Discr. Math. Theor. Comput. Sci. 2000. V. 51. P. 25–38

УДК 519.17 DOI 10.17223/2226308X/12/51

К ВОПРОСУ О КРИТЕРИИ РАВЕНСТВА ЭКСПОНЕНТА РЕГУЛЯРНОГО ПРИМИТИВНОГО ГРАФА ЧИСЛУ 3

И. В. Лось, М. Б. Абросимов

Рассматривается вопрос поиска критерия равенства числу 3 экспонента регулярного примитивного графа. Получено несколько необходимых и несколько достаточных условий и показано, что ни одно из них не может быть критерием. Проведён вычислительный эксперимент для определения доли примитивных регулярных графов с экспонентом 3, на которых полученные условия не являются критериями. Получен критерий для графов диаметра 2.

Ключевые слова: *примитивный граф, регулярный граф, экспонент графа.*

Будем рассматривать простые неориентированные графы. Напомним некоторые определения.

Регулярным или *однородным* графом *порядка* p называется граф, все вершины которого имеют степень p. *Диаметром* $\mathrm{d}(G)$ связного графа G называется наибольшая длина кратчайшего пути между всеми парами вершин графа G. Связный граф G называется *примитивным*, если между любыми двумя вершинами этого графа (в том числе из вершины в саму себя) существует маршрут длины k для некоторого $k \in \mathbb{N}$.