M_G

0	**1**	0	0	0
1	0	**1**	0	0
0	1	0	**1**	**1**
0	0	1	0	0
0	0	1	0	0

$C_G(G)$ = **1111**000000

Порядок выписывания

0	**1**	5	6	8
1	0	**2**	7	9
0	1	0	**3**	**4**
0	1	0	0	10
0	0	1	1	0

M_H

0	**1**	0	0	0
1	0	**1**	1	0
0	1	0	**0**	**1**
0	1	0	0	1
0	0	1	1	0

$C_G(H)$ = **1101**001001

Рис. 1. Пример построения кода $C_G(H)$

если граф G вкладывается в граф H, то существует изоморфный ему канонический граф W, для которого $C_G(W) \geqslant C_G(G)$. Таким образом, канонический представитель класса изоморфизма каждого графа, в который вкладывается G, может быть получен добавлением рёбер в граф G. Следовательно, алгоритм 2 является корректным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C.25. No. 9. P. 875–884.
2. *Harary F. and Hayes J. P.* Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. V. 23. P. 135–142.
3. *Абросимов М. Б.* Графовые модели отказоустойчивости. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 192 с.
4. *Абросимов М. Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. № 5(88). С. 643–650.
5. *Brinkmann G.* Isomorphism rejection in structure generation programs // DIMACS Series Discr. Math. Theor. Comput. Sci. 2000. V. 51. P. 25–38

УДК 519.17 DOI 10.17223/2226308X/12/51

К ВОПРОСУ О КРИТЕРИИ РАВЕНСТВА ЭКСПОНЕНТА РЕГУЛЯРНОГО ПРИМИТИВНОГО ГРАФА ЧИСЛУ 3

И. В. Лось, М. Б. Абросимов

Рассматривается вопрос поиска критерия равенства числу 3 экспонента регулярного примитивного графа. Получено несколько необходимых и несколько достаточных условий и показано, что ни одно из них не может быть критерием. Проведён вычислительный эксперимент для определения доли примитивных регулярных графов с экспонентом 3, на которых полученные условия не являются критериями. Получен критерий для графов диаметра 2.

Ключевые слова: *примитивный граф, регулярный граф, экспонент графа.*

Будем рассматривать простые неориентированные графы. Напомним некоторые определения.

Регулярным или *однородным* графом *порядка* p называется граф, все вершины которого имеют степень p. *Диаметром* $\mathrm{d}(G)$ связного графа G называется наибольшая длина кратчайшего пути между всеми парами вершин графа G. Связный граф G называется *примитивным*, если между любыми двумя вершинами этого графа (в том числе из вершины в саму себя) существует маршрут длины k для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

Минимальное k с таким свойством называется *экспонентом* этого примитивного графа и обозначается $\exp(G)$.

Ряд работ посвящены исследованию примитивных регулярных графов [1–3]. Данная работа направлена на поиск критерия равенства экспонента примитивного графа числу 3. Некоторые результаты получены в [4], здесь они дополняются.

Завершён вычислительный эксперимент с использованием кластера высокопроизводительных вычислений ПРЦ НИТ СГУ по подсчёту регулярных графов с экспонентом 3, в рамках которого построена таблица числа примитивных регулярных графов со степенью $p \leqslant 9$, числом вершин $n \leqslant 16$ и экспонентом 3.

В табл. 1 приводится результат работы программы — число графов с экспонентом 3 для различных n и p. Символ «–» означает, что графов с такими n и p не существует ($p \geqslant n$ или произведение pn нечётно). Серый фон клетки означает, что все связные регулярные графы со степенью p и числом вершин n имеют экспонент 2. В [5] показано, что это верно при $p > n/2$.

Таблица 1

Число графов с экспонентом 3 для различных n и p

n	p						
	3	4	5	6	7	8	9
4	0	–	–	–	–	–	–
5	–	0	–	–	–	–	–
6	1	0	0	–	–	–	–
7	–	0	–	0	–	–	–
8	1	3	0	0	0	–	–
9	–	11	–	0	–	0	–
10	1	41	35	0	0	0	0
11	–	143	–	0	–	0	–
12	1	568	7 506	2 391	0	0	0
13	–	2 403	–	232 080	–	0	–
14	0	10 377	3 093 569	18 801 129	2 757 433	0	0
15	–	42 197	–	1 429 344 906	–	0	–
16	0	151 684	1 797 671 946	112 705 503 963	467 764 092 656	34 831 303 586	0

Очевидно, что у примитивного графа с экспонентом 3 диаметр может быть 2 или 3. Для упрощения дальнейших рассуждений доказано вспомогательное утверждение — необходимое условие примитивности графа с экспонентом 3.

Утверждение 1. В примитивном графе с экспонентом 3 каждая вершина должна лежать хотя бы на одном цикле длины 3.

Условие не является достаточным. Например, в полном 3-вершинном графе K_3 каждая вершина лежит на цикле длины 3, однако его экспонент равен 2. Очевидно, что данный контрпример является минимальным по числу вершин.

Помимо этого, нетрудно найти такие регулярные графы и с экспонентом больше 3. Например, на рис. 1 приводится 3-регулярный примитивный граф с 12 вершинами и экспонентом 4, в котором каждая вершина также лежит хотя бы на одном цикле длины 3. Данный контрпример также является минимальным по числу вершин и рёбер.

Таким образом приходим к выводу, что в достаточное условие требуется включить ограничение на диаметр графа. Рассмотрим несколько таких достаточных условий, которые, однако, не являются необходимыми.

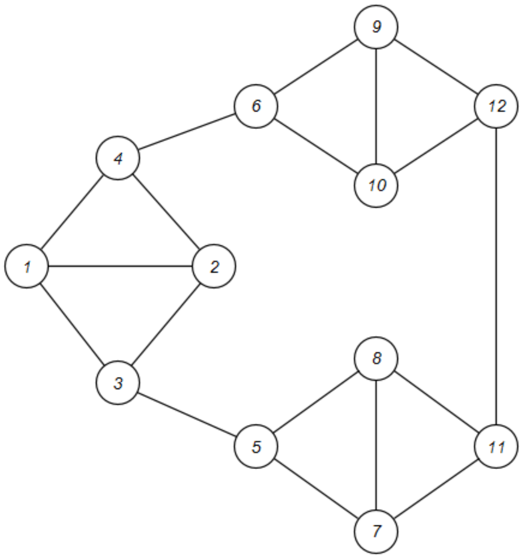

Рис. 1

Утверждение 2. Если в графе G с диаметром $\mathrm{d}(G) \leqslant 3$ каждое ребро входит в состав некоторого цикла длины 3, то граф G является примитивным с экспонентом $\exp(G) \leqslant 3$, причём если $\mathrm{d}(G) = 3$, то $\exp(G) = 3$.

На рис. 2 представлен минимальный по числу вершин регулярный граф, который показывает, что данное условие не является необходимым: в нём ребро между вершинами *3* и *5* (аналогично для ребра между вершинами *4* и *6*) не лежит ни на одном цикле длины 3.

В табл. 2 приведено количество контрпримеров для различных n и p. Можно сделать вывод, что большая доля примитивных регулярных графов с экспонентом 3 не удовлетворяет условию утверждения 2. Поэтому усилим его.

Утверждение 3. Если в графе G с диаметром $\mathrm{d}(G) \leqslant 3$ из каждой пары смежных рёбер хотя бы одно входит в состав некоторого цикла длины 3, то граф G является примитивным с экспонентом $\exp(G) \leqslant 3$, причём если $\mathrm{d}(G) = 3$, то $\exp(G) = 3$.

Условие утверждения 3 также не является необходимым. На рис. 3 изображён минимальный по числу вершин регулярный граф, для которого условие не выполняется: рёбра (*5*,*6*) и (*5*, *8*) смежны и оба не лежат ни на одном цикле длины 3.

Табл. 3 аналогична табл. 2. Из неё видно, что число контрпримеров уменьшилось в несколько раз, однако всё ещё велико.

Однако удалось получить критерий для графов с диаметром 2.

Теорема 1. В графе с диаметром 2, в котором каждая вершина лежит хотя бы на одном цикле длины 3, между любыми двумя вершинами (в том числе из вершины в себя) существует маршрут длины 3.

Следствие 1. Граф с диаметром 2, в котором каждая вершина лежит хотя бы на одном цикле длины 3, является примитивным и его экспонент меньше или равен 3.

Теорема 2. Граф с диаметром 2 является примитивным и имеет экспонент 3 тогда и только тогда, когда каждая его вершина лежит хотя бы на одном цикле длины 3 и существует хотя бы одно ребро, не лежащее ни на одном цикле длины 3.

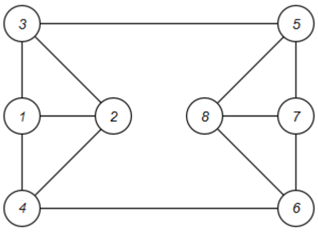

Рис. 2. 8-Вершинный граф, для которого условие, обратное утверждению 2, не выполняется

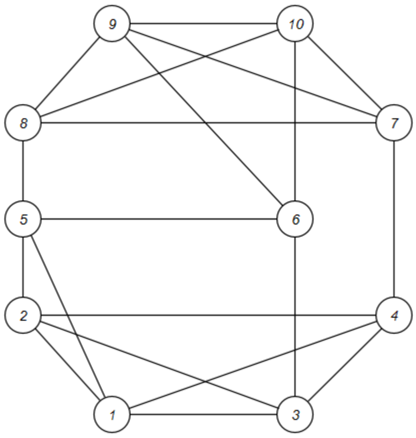

Рис. 3. 10-Вершинный граф, для которого условие, обратное утверждению 2, не выполняется

Таблица 2

Число графов с экспонентом 3, для которых условие, обратное утверждению 2, не выполняется

n	p				
	3	4	5	6	7
4	0	–	–	–	–
5	–	0	–	–	–
6	0	0	0	–	–
7	–	0	–	0	–
8	1	0	0	0	0
9	–	0	–	0	–
10	1	24	0	0	0
11	–	123	–	0	–
12	1	553	2 235	0	0
13	–	2 395	–	0	–
14	0	10 368	2 858 557	2 401 761	0

Таблица 3

Число графов с экспонентом 3, для которых условие, обратное утверждению 3, не выполняется

n	p				
	3	4	5	6	7
4	0	–	–	–	–
5	–	0	–	–	–
6	0	0	0	–	–
7	–	0	–	0	–
8	0	0	0	0	0
9	–	0	–	0	–
10	0	18	0	0	0
11	–	109	–	0	–
12	0	524	1 463	0	0
13	–	2 345	–	0	–
14	0	10 290	2 634 777	946 878	0

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jin M., Lee S. G., and Seol H. G.* Exponents of r-regular primitive matrices // Inform. Center Math. Sci. 2003. V. 6. No. 2. P. 51–57.
2. *Bueno M. I. and Furtado S.* On the exponent of r-regular primitive matrices // ELA. Electr. J. Linear Algebra. 2008. V. 17. P. 28–47.
3. *Kim B., Song B., and Hwang W.* Nonnegative primitive matrices with exponent 2 // Linear Algebra and its Appl. 2005. No. 407. P. 162–168.
4. *Лось И. В., Абросимов М. Б.* К вопросу о максимальном числе вершин в примитивных регулярных графах с экспонентом 3 // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2018. № 11. С. 112–114.
5. *Абросимов М. Б., Костин С. В.* К вопросу о примитивных однородных графах с экспонентом, равным 2 // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2017. № 10. С. 131–134.