УДК 519.1,519.7

О СТЕПЕНИ ОГРАНИЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ q-ЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ НА ЛИНЕЙНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

В. Г. Рябов

НП «ГСТ», г. Москва, Россия

В случае конечного поля $\mathbb{F}_q$ степень ограничения функции q-значной логики от n переменных на линейное многообразие размерности r векторного пространства $\mathbb{F}_q^n$ определена как степень полинома от r переменных, представляющего данное ограничение. Для многообразий фиксированной размерности оценена вероятность появления у функции ограничений степени не выше заданной, а также получена асимптотика числа многообразий, на которых ограничения аффинны. Показано, что при $n \to \infty$ для почти всех функций q-значной логики от n переменных значение максимальной размерности линейного многообразия, на котором ограничение аффинно, принадлежит отрезку $[\lfloor \log_q n + \log_q \log_q n \rfloor, \lceil \log_q n + \log_q \log_q n \rceil]$, в то время как аналогичный параметр для случая фиксации переменных находится в пределах $[\lfloor \log_q n \rfloor, \lceil \log_q n \rceil]$.

Ключевые слова: *многозначная логика, булева функция, ограничение, линейное многообразие, степень.*

DOI 10.17223/20710410/45/2

ON THE DEGREE OF RESTRICTIONS OF q-VALUED LOGIC FUNCTIONS TO LINEAR MANIFOLDS

V. G. Ryabov

NP “GST”, Moscow, Russia

E-mail: 4vryabov@gmail.com

In case of a finite field $\mathbb{F}_q$, the degree of restricting a q-valued logic function in n variables to a r-dimensional linear manifold of the vector space $\mathbb{F}_q^n$ is defined as the degree of a polynomial in r variables that represents this restriction. For manifolds of a fixed dimension, the probability of occurrence of restrictions with a degree not higher than the given one is estimated, and the asymptotics of the number of manifolds on which the restrictions are affine is obtained. It is shown that if $n \to \infty$, for almost all q-valued logic functions in n variables, the value of the maximum dimension of a linear manifold on which the restriction is affine belongs to the segment $[\lfloor \log_q n + \log_q \log_q n \rfloor, \lceil \log_q n + \log_q \log_q n \rceil]$, while the analogous parameter for the case of fixing variables is in the range $[\lfloor \log_q n \rfloor, \lceil \log_q n \rceil]$.

Keywords: *many-valued logic, Boolean function, restriction, linear manifold, degree.*

Введение

Пусть $\mathbb{F}_q$ — конечное поле, состоящее из q элементов, где $q = p^m$, p — простое число, $m \in \mathbb{N}$, и $\mathbb{F}_q^n$ — n-мерное векторное пространство над данным полем. В качестве подпространства векторного пространства $\mathbb{F}_q^n$ выступает его непустое подмножество S, замкнутое относительно операций сложения векторов и умножения вектора на элемент поля. Любое определённое таким образом подпространство само является векторным пространством над полем $\mathbb{F}_q$, возможно, меньшей размерности. Размерность векторного подпространства, состоящего из нулевого вектора, равна нулю.

Согласно [1], определим сдвиг на вектор δ из $\mathbb{F}_q^n$ как отображение φ пространства $\mathbb{F}_q^n$ в себя вида $\varphi_\delta(\alpha) = \alpha \oplus \delta$, где α принимает всевозможные значения из $\mathbb{F}_q^n$; $\oplus$ — операция сложения в $\mathbb{F}_q^n$. Для любого подпространства S сдвиг приводит к появлению образа $\varphi(S)$, который является линейным многообразием векторного пространства $\mathbb{F}_q^n$ (в дальнейшем для линейного многообразия будем использовать термин «многообразие»; линейное многообразие также называют аффинным подпространством и плоскостью). При этом многообразие M является исходным подпространством S, если вектор δ принадлежит S, или M содержит нулевой вектор $\mathbb{F}_q^n$. Для каждого многообразия существует единственное подпространство S, сдвиг которого приводит к получению M, а вот в качестве вектора сдвига может выступать любой вектор, образованный суммой заданного вектора сдвига и произвольного вектора из S. В этом случае будем говорить, что многообразие имеет направление S и такую же размерность, как S. Непустое пересечение многообразий также является многообразием с направлением, заданным пересечением соответствующих подпространств.

Рассмотрим множество всех отображений пространства $\mathbb{F}_q^n$ в поле $\mathbb{F}_q$, или функций q-значной логики от n переменных, которое обозначим P_q^n. Известно (см., например, [2]), что любая функция f из P_q^n с точностью до перестановки слагаемых может быть представлена полиномом над полем $\mathbb{F}_q$ следующего вида:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigoplus_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1,\ldots,i_n} \otimes x_1^{i_1} \otimes \cdots \otimes x_n^{i_n}, \tag{1}$$

где $i_1, \ldots, i_n$ — всевозможные различные наборы n целых чисел, принимающих значения от 0 до $q-1$; $a_{i_1,\ldots,i_n}$ — элемент $\mathbb{F}_q$; $\oplus$ и $\otimes$ — операции сложения и умножения в $\mathbb{F}_q$, а степень определяется через операцию умножения в $\mathbb{F}_q$ с учётом того, что $x^0 = 1$ и $x^1 = x$. Случай $q = p$, где p — простое число, приводит к полиному с операциями сложения и умножения по модулю p, а для $q = 2$ получаем полином Жегалкина булевой функции. Степень функции f определим как степень полинома (максимальную сумму степеней в мономе с ненулевым коэффициентом) вида (1) и обозначим d_f. Для неё справедливы неравенства $0 \leqslant d_f \leqslant n(q-1)$. Определим функцию f из P_q^n как аффинную, если $d_f \leqslant 1$. Аффинная функция является линейной, если свободный член полинома $a_{0,\ldots,0}$ является нулевым элементом $\mathbb{F}_q$, и константой, если $d_f = 0$.

Для функции f из P_q^n обозначим $f|_R$ её ограничение на подмножество R пространства $\mathbb{F}_q^n$. Когда R является линейным многообразием, можно получить полиномиальное представление ограничения и определить степень ограничения. Действительно, пусть M — многообразие размерности r. В [3] показано, что M является совокупностью решений системы $n-r$ линейных уравнений с n неизвестными над полем $\mathbb{F}_q$ и рангом матрицы коэффициентов $n-r$. Случаю, когда многообразие является подпространством, соответствует система однородных уравнений. Указанная система позволяет получить аффинные выражения $n-r$ переменных через оставшиеся r переменных. Подставив их в полином, отвечающий функции f, и приведя получившийся полином от r переменных к виду (1), можно получить полиномиальное представление функции g из P_q^n, несущественно зависящей от $n-r$ переменных, для которой выполняется условие $g|_M = f|_M$. При различных способах выражения переменных степень получившихся полиномов инвариантна и удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant d_g \leqslant r(q-1)$. Для определённости будем последовательно на каждом из $n-r$ шагов выражать переменную с наибольшим возможным индексом через оставшиеся переменные с меньшими индексами. Последнее позволяет говорить об однозначном представлении ограничения $f|_M$ полиномом от r переменных над полем $\mathbb{F}_q$ и определить степень ограничения $d_{f|_M}$ как степень получившегося полинома от r переменных.

Наибольший практический интерес представляет случай многообразия максимальной размерности, на котором ограничение функции имеет степень, не превосходящую 1 (такие ограничения по аналогии с функциями будем называть аффинными). Он определяет минимальное число линейных комбинаций, которые можно зафиксировать так, что отвечающий данной функции полином примет аффинный вид, что является важным для решения задачи линеаризации уравнения над конечным полем.

Фиксация переменных константами поля $\mathbb{F}_q$, или переход к подфункции, является частным случаем и не всегда даёт оптимальный результат для подобной линеаризации. Вместе с тем данный случай является важным для теории и практики применения функций q-значной логики и в работе выделен особо. До настоящего времени в научной литературе в основном изучались свойства подфункций булевых функций, в том числе их степень. Одним из первых изучением асимптотических свойств подфункций-констант занимался Ю. И. Журавлев.

1. Вероятностные оценки появления у функции ограничений степени не выше заданной на линейных многообразиях

Обозначим $\mathfrak{M}_q^n(r)$ множество всех многообразий пространства $\mathbb{F}_q^n$ размерности r, где $0 \leqslant r \leqslant n$, а $\hat{\mathfrak{M}}_q^n(r)$ — его подмножество, заданное фиксацией $(n-r)$ переменных элементами поля $\mathbb{F}_q$. Для функции f из P_q^n введём характеристики: $d_f(r) = \min\limits_{M \in \mathfrak{M}_q^n(r)} d_{f|_M}$ и $\hat{d}_f(r) = \min\limits_{M \in \hat{\mathfrak{M}}_q^n(r)} d_{f|_M}$. Тогда справедливы неравенства $0 \leqslant d_f(r) \leqslant \hat{d}_f(r) \leqslant r(q-1)$, а также соотношения $0 = d_f(0) \leqslant \ldots \leqslant d_f(n) = d_f$ и $0 = \hat{d}_f(0) \leqslant \ldots \leqslant \hat{d}_f(n) = d_f$. В отличие от булевых функций, для которых ограничения на многообразия размерности 1 всегда являются аффинными, ограничения функций q-значной логики могут иметь степень от 0 до $q-1$ даже на таких многообразиях.

Пусть r и d являются целыми неотрицательными числами, удовлетворяющими условиям $0 \leqslant r \leqslant n$ и $0 \leqslant d \leqslant r(q-1)$. В рамках классического способа задания конечного вероятностного пространства на множестве P_q^n [4] рассмотрим дискретные случайные величины $d_f(r)$ и $\hat{d}_f(r)$, а также связанные с ними события $P_q^n(d_f(r) \leqslant d) = \{f \in P_q^n \mid d_f(r) \leqslant d\}$ и $P_q^n(\hat{d}_f(r) \leqslant d) = \{f \in P_q^n \mid \hat{d}_f(r) \leqslant d\}$ (в дальнейшем будем одновременно использовать краткую форму обозначения событий вида $\{d_f(r) \leqslant d\}$). При фиксированной размерности многообразий r параметр d задаёт функции распределения величин $d_f(r)$ и $\hat{d}_f(r)$ с вероятностями $\dfrac{|P_q^n(d_f(r) \leqslant d)|}{|P_q^n|}$ и $\dfrac{|P_q^n(\hat{d}_f(r) \leqslant d)|}{|P_q^n|}$ соответственно; здесь функции распределения имеют вид $F(d) = \mathsf{P}(d_f(r) \leqslant d)$ и $\hat{F}(d) = \mathsf{P}(\hat{d}_f(r) \leqslant d)$. Для оценки вероятностей предварительно докажем лемму, которая, впрочем, имеет и самостоятельное значение для характеристики функций q-значной логики.

Лемма 1. Пусть d — целое неотрицательное число, удовлетворяющее условию $0 \leqslant d \leqslant n(q-1)$, и $f_q^d(n)$ — число всех функций из P_q^n со степенью, не превышающей d, то есть выполняется равенство $f_q^d(n) = |P_q^n(d_f(n) \leqslant d)|$. Тогда справедливо соотношение

$$f_q^d(n) = q^{\sum\limits_{j=0}^{\lfloor d/q \rfloor} (-1)^j \binom{n}{j}\binom{n+d-qj}{d-qj}}. \tag{2}$$

Доказательство. Обратимся к полиномиальному представлению функций из P_q^n. Число полиномов степени не выше d выражается равенством $f_q^d(n) = \prod\limits_{m=0}^{d} h_q^m(n)$, где $h_q^m(n)$ — число однородных компонент многочлена от n переменных, соответствующих степени m. Используя формулу числа m-выборок в коммутативном несимметричном n-базисе, для которых показатели первичной спецификации не превосходят $(q-1)$ [5], получим выражение для $h_q^m(n)$:

$$h_q^m(n) = q^{\sum\limits_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j}\binom{n+m-qj-1}{m-qj}}. \tag{3}$$

Тогда выражение для $f_q^d(n)$ примет следующий вид:

$$f_q^d(n) = q^{\sum\limits_{m=0}^{d}\sum\limits_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j}\binom{n+m-qj-1}{m-qj}}.$$

В завершение доказательства осталось привести цепочку равенств, вытекающую из рекуррентного соотношения для биномиальных коэффициентов:

$$\sum_{m=0}^{d}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\binom{n+m-qj-1}{m-qj} = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\sum_{m=0}^{d}\binom{n+m-qj-1}{m-qj} =$$
$$= \sum_{j=0}^{\lfloor d/q \rfloor}(-1)^j\binom{n}{j}\binom{n+d-qj}{d-qj}.$$

Лемма 1 доказана. ■

Следствие 1. В условиях леммы 1 имеет место оценка $f_q^d(n) \leqslant q^{\binom{n+d}{d}}$.

Данная оценка обусловлена тем, что при снятии ограничений на показатели первичной спецификации [5, с. 252] формула (3) примет вид $h_q^m(n) = q^{\binom{n+m-1}{m}}$.

Замечание 1. При малых d в формуле (2) остаются только первые слагаемые. Например, при $0 \leqslant d < q-1$ получим $f_q^d(n) = q^{\binom{n+d}{d}}$, а при $q \leqslant d < 2q$ имеем $f_q^d(n) = q^{\binom{n+d}{d} - n\binom{n+d-q}{d-q}}$. В случае булевых функций имеет место формула $f_2^d(n) = 2^{\sum_{k=0}^{d}\binom{n}{k}}$.

Замечание 2. Формула (2) может быть также использована для нахождения числа всех функций из P_q^n со степенью равной d, поскольку последнее определяется как разность $f_q^d(n) - f_q^{d-1}(n)$.

Получим теперь оценки распределения случайных величин $d_f(r)$ и $\hat{d}_f(r)$ для $r \geqslant 1$.

Теорема 1. Пусть r и d — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условиям $1 \leqslant r \leqslant n$ и $0 \leqslant d \leqslant r(q-1)$. Тогда для вероятностей наступления событий $\{d_f(r) \leqslant d\}$ и $\{\hat{d}_f(r) \leqslant d\}$ справедливы оценки

$$\mathsf{P}(d_f(r) \leqslant d) \leqslant \frac{q^{\sum\limits_{j=0}^{\lfloor d/q \rfloor}(-1)^j\binom{r}{j}\binom{r+d-qj}{d-qj}+n-r}\binom{n}{r}_q}{q^{q^r}}; \tag{4}$$

$$\mathsf{P}(\hat{d}_f(r) \leqslant d) \leqslant \frac{q^{\sum\limits_{j=0}^{\lfloor d/q \rfloor}(-1)^j\binom{r}{j}\binom{r+d-qj}{d-qj}+n-r}\binom{n}{r}}{q^{q^r}}, \tag{5}$$

где $\binom{n}{r}_q$ и $\binom{n}{r}$ — гауссов и обыкновенный биномиальные коэффициенты соответственно.

Доказательство. При $r = n$ утверждения теоремы следуют из леммы 1. Докажем их при $r < n$.

Пусть $f \in P_q^n$ и $M \in \mathfrak{M}_q^n(r)$. Тогда ограничению $f|_M$ соответствует полином вида (1) от r переменных. Поскольку выбранный выше способ выражения $n - r$ переменных через оставшиеся r переменных зависит только от M, можно утверждать, что для всех функций из P_q^n ограничения на M будут представлены полиномами от одних и тех же r переменных. С другой стороны, каждый из q^{q^r} полиномов от данных r переменных отвечает ограничениям на M различных $q^{q^n - q^r}$ функций от n переменных, которые в совокупности покрывают все множество P_q^n. Тогда вероятность наступления события $P_q^n(d_{f|_M} \leqslant d) = \{f \in P_q^n \mid d_{f|_M} \leqslant d\} \subset P_q^n(d_f(r) \leqslant d)$ при условии случайной и равновероятной выборки может быть найдена следующим образом:

$$\mathsf{P}(d_{f|_M} \leqslant d) = \frac{|P_q^n(d_{f|_M} \leqslant d)|}{|P_q^n|} = \frac{q^{q^n - q^r} f_q^d(r)}{q^{q^n}} = \frac{f_q^d(r)}{q^{q^r}}. \tag{6}$$

Обозначим $m_q^n(r)$ число всех линейных многообразий размерности r пространства $\mathbb{F}_q^n$, т. е. $m_q^n(r) = |\mathfrak{M}_q^n(r)|$. Известно [3], что при $r \geqslant 1$ число подпространств размерности r пространства $\mathbb{F}_q^n$ определяется по формуле $\prod\limits_{i=0}^{r-1} \frac{q^n - q^{r-i}}{q^r - q^{r-i}}$. После сокращения соответствующих дробей придём к гауссову биномиальному коэффициенту $\binom{n}{r}_q$, где $\binom{n}{0}_q = 1$ и $\binom{n}{r}_q = \prod\limits_{i=0}^{r-1} \frac{q^{n-i} - 1}{q^{r-i} - 1}$ при $r = 1, \ldots, n$. С учётом сдвига получим формулу

$$m_q^n(r) = q^{n-r} \binom{n}{r}_q. \tag{7}$$

Используя свойство вероятности суммы событий, получим

$$\mathsf{P}(d_f(r) \leqslant d) \leqslant \sum_{M \in \mathfrak{M}_q^n(r)} \mathsf{P}(d_{f|_M} \leqslant d) = \frac{f_q^d(r) m_q^n(r)}{q^{q^r}}. \tag{8}$$

Для завершения доказательства формулы (4) осталось подставить в правую часть (8) значения величин $f_q^d(r)$ из (2) и $m_q^n(r)$ из (7).

Формула (5) доказывается аналогично, с той лишь разницей, что суммирование в (8) ведётся по многообразиям из множества $\hat{\mathfrak{M}}_q^n(r)$, число которых $\hat{m}_q^n(r)$ равно

$$\hat{m}_q^n(r) = q^{n-r} \binom{n}{r}. \tag{9}$$

Теорема 1 доказана. ■

Следствие 2. В условиях теоремы 1 имеют место оценки

$$|P_q^n(d_f(r) \leqslant d)| \leqslant q^{q^n - q^r + n - r + \sum\limits_{j=0}^{\lfloor d/q \rfloor} (-1)^j \binom{r}{j} \binom{r+d-qj}{d-qj}} \binom{n}{r}_q,$$

$$|P_q^n(\hat{d}_f(r) \leqslant d)| \leqslant q^{q^n - q^r + n - r + \sum\limits_{j=0}^{\lfloor d/q \rfloor} (-1)^j \binom{r}{j} \binom{r+d-qj}{d-qj}} \binom{n}{r},$$

вытекающие из определения вероятностной меры.

Теорема 1 позволяет дать верхнюю оценку вероятности появления ограничений и, в частности, подфункций степени не выше заданной на многообразиях фиксированной размерности для случайно выбранной функции q-значной логики.

Пример 1. При $q = 3$ и $n = 5$ вероятности появления ограничений и подфункций степени не выше 3 ($d = 3$) на многообразиях размерности 3 ($r = 3$) не превосходят значений 0,1844... и 0,0015... соответственно. Столь большая разница получившихся оценок обусловлена тем, что число многообразий, заданных фиксацией двух аффинных комбинаций переменных, значительно превышает число многообразий, получающихся при фиксации двух переменных, а именно: $m_3^5(3) = 10890$, в то время как $\hat{m}_3^5(3) = 90$.

Представляют также интерес менее точные, но более удобные для вычислений и дальнейшего анализа оценки.

Следствие 3. В условиях теоремы 1 справедливы оценки

$$\mathsf{P}(d_f(r) \leqslant d) < \frac{q^{\sum\limits_{j=0}^{\lfloor d/q \rfloor}(-1)^j\binom{r}{j}\binom{r+d-qj}{d-qj}+(n-r)(r+1)} \mathrm{e}^{q/(q-1)^2}}{q^{q^r}}; \tag{10}$$

$$\mathsf{P}(\hat{d}_f(r) \leqslant d) \leqslant \frac{q^{\sum\limits_{j=0}^{\lfloor d/q \rfloor}(-1)^j\binom{r}{j}\binom{r+d-qj}{d-qj}+n-r} (n(n-r+1)/r)^{r/2}}{q^{q^r}}. \tag{11}$$

Доказательство. Для доказательства неравенства (10) преобразуем $\binom{n}{r}_q$:

$$\prod_{i=0}^{r-1}\frac{q^{n-i}-1}{q^{r-i}-1} = q^{(n-r)r}\prod_{i=0}^{r-1}\frac{q^{n-i}-1}{q^{n-r}(q^{r-i}-1)} = q^{(n-r)r}\prod_{i=0}^{r-1}\frac{q^{n-i}-q^{n-r}+q^{n-r}-1}{q^{n-r}(q^{r-i}-1)} =$$

$$= q^{(n-r)r}\prod_{i=0}^{r-1}\left(1+\frac{1}{q^{r-i}-1}-\frac{1}{q^{n-r}(q^{r-i}-1)}\right) = q^{(n-r)r}\mathrm{e}^{\sum\limits_{i=0}^{r-1}\ln\left(1+\frac{1}{q^{r-i}-1}-\frac{1}{q^{n-r}(q^{r-i}-1)}\right)}.$$

В отношении показателя степени e имеют место соотношения

$$0 \leqslant \sum_{i=0}^{r-1}\ln\left(1+\frac{1}{q^{r-i}-1}-\frac{1}{q^{n-r}(q^{r-i}-1)}\right) < \sum_{i=0}^{r-1}\frac{1}{q^{r-i}-1}.$$

Таким образом, гауссов биномиальный коэффициент удовлетворяет неравенствам

$$q^{(n-r)r} \leqslant \binom{n}{r}_q < q^{(n-r)r}\mathrm{e}^{q/(q-1)^2} \leqslant q^{(n-r)r}\mathrm{e}^2, \tag{12}$$

из которых, в частности, следует переход от (4) к (10).

Нетрудно видеть, что для сомножителей в формуле биномиального коэффициента $\dfrac{n\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{r\cdot\ldots\cdot 1}$ для любого целого j, принимающего значения от 1 до $\lfloor r/2 \rfloor$, выполняются соотношения $\dfrac{(n-j)(n-r+j+1)}{(r-j)(j+1)} \leqslant \dfrac{(n-j+1)(n-r+j)}{(r-j+1)j}$, откуда следуют неравенства[1]

[1]Более точная нижняя оценка имеет вид $\left(\frac{(n-\lceil r/2\rceil+1)(n-\lfloor r/2\rfloor)}{(\lfloor r/2\rfloor+1)\lceil r/2\rceil}\right)^{r/2} \leqslant \binom{n}{r}$.

$$\left(\frac{2n-r}{r+2}\right)^r < \left(\frac{(2n-r+1)(2n-r)}{(r+2)(r+1)}\right)^{r/2} < \binom{n}{r} \leqslant \left(\frac{n(n-r+1)}{r}\right)^{r/2}, \tag{13}$$

из которых, в частности, следует переход от (5) к (11). ■

В примере 1 значения оценок, полученных на основе результатов следствия 3, составляют 0,2352... и 0,0017... соответственно, что не меняет качественного характера оценок.

Замечание 3. Что касается значения параметра $f_q^d(r)$, используемого в оценках теоремы 1, из следствия 1 имеем неравенство $f_q^d(r) \leqslant q^{\binom{r+d}{d}}$. Однако использование вместо $\sum\limits_{j=0}^{\lfloor d/q \rfloor}(-1)^j\binom{r}{j}\binom{r+d-qj}{d-qj}$ значения $\binom{r+d}{d}$ существенно искажает полученные оценки при $d \geqslant q$. В случае булевых функций с учётом замечания 1 можно воспользоваться известными оценками суммы биномиальных коэффициентов.

Замечание 4. В соответствии с замечанием 2 результаты теоремы 1 и следствия 3 могут быть использованы для оценки вероятности событий $\{d_f(r) = d\}$ и $\{\hat{d}_f(r) = d\}$. Для этого достаточно заменить $f_q^d(r)$ в соответствующих формулах на разность $f_q^d(r) - f_q^{d-1}(r)$. При этом значения оценок $\mathsf{P}(d_f(r) = d)$ и $\mathsf{P}(\hat{d}_f(r) = d)$ будут незначительно отличаться от соответствующих значений $\mathsf{P}(d_f(r) \leqslant d)$ и $\mathsf{P}(\hat{d}_f(r) \leqslant d)$, поскольку справедливо соотношение $\dfrac{f_q^d(r) - f_q^{d-1}(r)}{f_q^d(r)} = 1 - \dfrac{1}{h_q^d(r)}$. Исключение составляет случай $d = r(q-1)$, при котором $h_q^d(r) = q$.

Далее рассмотрим вопросы, связанные с изучением аффинных ограничений функций q-значной логики на линейные многообразия. В связи с тем, что $f_q^1(r) = q^{r+1}$, оценки, приведённые в теореме 1, следствиях 2 и 3, существенно упрощаются.

2. Асимптотические оценки числа линейных многообразий с аффинными ограничениями функции

Для $f \in P_q^n$ обозначим через $a_f(r)$ и $\hat{a}_f(r)$ число многообразий из множеств $\mathfrak{M}_q^n(r)$ и $\hat{\mathfrak{M}}_q^n(r)$ соответственно, на которых ограничения функции f являются аффинными. Очевидно, что справедливы соотношения $a_f(0) = \hat{a}_f(0) = q^n$. Для случая булевых функций также выполняются равенства $a_f(1) = 2^{n-1}(2^{n-1}-1)$ и $\hat{a}_f(1) = 2^{n-1}n$.

Теорема 2. При $n \to \infty$ для почти всех функций из P_q^n относительно параметров $a_f(r)$ и $\hat{a}_f(r)$, где r — целое неотрицательное число, удовлетворяющее условиям $1 \leqslant r \leqslant n$, справедливы соотношения

$$a_f(r) = \begin{cases} \dfrac{q^{n+1}\binom{n}{r}_q}{q^{q^r}}(1+\mathrm{o}(1)), & \text{если } r \leqslant \lfloor \log_q n + \log_q \log_q n \rfloor, \\ 0, & \text{если } r > \lceil \log_q n + \log_q \log_q n \rceil; \end{cases} \tag{14}$$

$$\hat{a}_f(r) = \begin{cases} \dfrac{q^{n+1}\binom{n}{r}}{q^{q^r}}(1+\mathrm{o}(1)), & \text{если } r \leqslant \lfloor \log_q n \rfloor, \\ 0, & \text{если } r > \lceil \log_q n \rceil. \end{cases} \tag{15}$$

Доказательство. Начнём со вторых частей формул (14) и (15).

Рассмотрим дискретные случайные величины $a_f(r)$ и $\hat{a}_f(r)$ и события $P_q^n(a_f(r) = 0) = \{f \in P_q^n \mid a_f(r) = 0\}$ и $P_q^n(\hat{a}_f(r) = 0) = \{f \in P_q^n \mid \hat{a}_f(r) = 0\}$.

Для вероятности события $\{a_f(r)=0\}$ выполняются соотношения $\mathsf{P}(a_f(r)=0)=\mathsf{P}(d_f(r)>1)=1-\mathsf{P}(d_f(r)\leqslant 1)$. Из теоремы 1 следует неравенство $\mathsf{P}(d_f(r)\leqslant 1)\leqslant\phi_q^n(r)$, где $\phi_q^n(r)=\dfrac{q^{n+1}\binom{n}{r}_q}{q^{q^r}}$.

Используем представление гауссовых биномиальных коэффициентов, введенное при доказательстве следствия 3. Задействуем вспомогательные параметры $\left\langle{n \atop r}\right\rangle_q=\dfrac{\binom{n}{r}_q}{q^{(n-r)r}}$, которые назовём нормированными гауссовыми биномиальными коэффициентами. Из (12) вытекает справедливость неравенств

$$1\leqslant\left\langle{n \atop r}\right\rangle_q<\mathrm{e}^{q/(q-1)^2}\leqslant\mathrm{e}^2, \tag{16}$$

а выражение для оценки доли функций, имеющих аффинные ограничения на многообразиях размерности r, примет вид

$$\phi_q^n(r)=\frac{q^{(n-r+1)(r+1)}\left\langle{n \atop r}\right\rangle_q}{q^{q^r}}. \tag{17}$$

Пусть $\check{r}$ — наименьшее целое, удовлетворяющее неравенству $\check{r}>\lceil\log_q n+\log_q\log_q n\rceil$, и, следовательно, $\check{r}=\log_q n+\log_q\log_q n+\lambda$, где $1\leqslant\lambda<2$. Подставив $\check{r}$ в (17) и используя оценку из (16), получим

$$\phi_q^n(\check{r})=\frac{q^{(n-\log_q n-\log_q\log_q n-\lambda+1)(\log_q n+\log_q\log_q n+\lambda+1)}\mathrm{e}^2}{q^{q^\lambda n\log_q n}}.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\phi_q^n(\check{r})=0$, из чего следует справедливость второй части утверждения (14) для $\check{r}$, а значит, и для всех бо́льших r.

Аналогично доказывается вторая часть формулы (15). При этом в соответствии с (13) для оценки доли функций, имеющих аффинные подфункции, может быть использовано выражение

$$\hat{\phi}_q^n(r)=\frac{q^{n+1+(\log_q n+\log_q(n-r+1)-\log_q r)r/2}}{q^{q^r}}.$$

Для доказательства первых частей формул (14) и (15) найдём математические ожидания и дисперсии величин $a_f(r)$ и $\hat{a}_f(r)$. Введём вспомогательную случайную величину $a_{f|_M}$, положив

$$a_{f|_M}=\begin{cases}1, & \text{если } d_{f|_M}\leqslant 1,\\ 0, & \text{если } d_{f|_M}>1.\end{cases}$$

Для математического ожидания величины $a_{f|_M}$, с учётом (6), выполняются соотношения $\mathsf{E}(a_{f|_M})=\mathsf{P}(a_{f|_M}=1)=\mathsf{P}(d_{f|_M}\leqslant 1)=\dfrac{q^{r+1}}{q^{q^r}}$. Применив формулу математического ожидания суммы случайных величин, получим

$$\mathsf{E}(a_f(r))=\sum_{M\in\mathfrak{M}_q^n(r)}\mathsf{E}(a_{f|_M})=\frac{q^{n+1}\binom{n}{r}_q}{q^{q^r}}; \tag{18}$$

$$\mathsf{E}(\hat{a}_f(r))=\sum_{M\in\hat{\mathfrak{M}}_q^n(r)}\mathsf{E}(a_{f|_M})=\frac{q^{n+1}\binom{n}{r}}{q^{q^r}}. \tag{19}$$

Используя нижние оценки в (12) и (13), нетрудно показать, что при $n \to \infty$ в случае $r \leqslant \lfloor \log_q n + \log_q \log_q n \rfloor$ верно неравенство $\mathsf{E}(a_f(r)) > 1$, а для $r \leqslant \lfloor \log_q n \rfloor$ имеем $\mathsf{E}(\hat{a}_f(r)) > 1$.

Для определения значений дисперсии докажем вспомогательную лемму.

Лемма 2. Пусть s является целым неотрицательным числом, удовлетворяющим условию $0 < s \leqslant r$; $m_q^n(r,s)$ — число пар многообразий размерности r, пересечением которых является многообразие размерности $r - s$, и $\hat{m}_q^n(r,s)$ — аналогичный параметр для многообразий, заданных фиксацией переменных. Тогда справедливы соотношения

$$m_q^n(r,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\, q^{n-r+s+s^2} \dbinom{n}{r}_q \dbinom{r}{s}_q \dbinom{n-r}{s}_q, & \text{если } s \leqslant n-r, \\ 0, & \text{если } s > n-r; \end{cases} \tag{20}$$

$$\hat{m}_q^n(r,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\, q^{n-r+s} \dbinom{n}{r} \dbinom{r}{s} \dbinom{n-r}{s}, & \text{если } s \leqslant n-r, \\ 0, & \text{если } s > n-r. \end{cases} \tag{21}$$

Доказательство. Используя метод подсчёта числа подпространств [3], получим

$$m_q^n(r,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\, m_q^n(r-s) \displaystyle\prod_{i=r-s}^{r-1} \frac{q^n - q^i}{q^r - q^i} \prod_{j=r-s}^{r-1} \frac{q^n - q^{s+j}}{q^r - q^j}, & \text{если } s \leqslant n-r, \\ 0, & \text{если } s > n-r. \end{cases} \tag{22}$$

Из (7) имеем $m_q^n(r-s) = q^{n-r+s} \dbinom{n}{r-s}_q$. Преобразуем другие сомножители, выделив гауссовы биномиальные коэффициенты, следующим образом:

$$\prod_{i=r-s}^{r-1} \frac{q^n - q^i}{q^r - q^i} = \prod_{i=0}^{s-1} \frac{q^{n-r+s-i} - 1}{q^{s-i} - 1} = \binom{n-r+s}{s}_q,$$

$$\prod_{j=r-s}^{r-1} \frac{q^n - q^{s+j}}{q^r - q^j} = q^{s^2} \prod_{j=r-s}^{r-1} \frac{q^{n-s} - q^j}{q^r - q^j} = q^{s^2} \prod_{j=0}^{s-1} \frac{q^{n-r-j} - 1}{q^{s-j} - 1} = q^{s^2} \binom{n-r}{s}_q.$$

Подставив полученные выражения в (22) и используя соотношение для гауссовых биномиальных коэффициентов $\dbinom{n}{r-s}_q \dbinom{n-r+s}{s}_q = \dbinom{n}{r}_q \dbinom{r}{s}_q$, придём к (20).

В свою очередь, величина $\hat{m}_q^n(r,s)$ задается системой вида

$$\hat{m}_q^n(r,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\, \hat{m}_q^n(r-s) \dbinom{n-r+s}{s} \dbinom{n-r}{s}, & \text{если } s \leqslant n-r, \\ 0, & \text{если } s > n-r. \end{cases} \tag{23}$$

Подставив в (23) выражение $\hat{m}_q^n(r-s)$ из (9) и используя аналогичное соотношение для обыкновенных биномиальных коэффициентов, получим (21).

Лемма 2 доказана. ■

Вернёмся к доказательству теоремы. Используя формулу дисперсии суммы случайных величин, получим выражение дисперсии для $a_f(r)$:

$$\mathsf{D}(a_f(r)) = \sum_{M \in \mathfrak{M}_q^n(r)} \mathsf{D}(a_{f|_M}) + 2 \sum_{M_i, M_j \in \mathfrak{M}_q^n(r), i<j} \operatorname{cov}(a_{f|_{M_i}}, a_{f|_{M_j}}). \tag{24}$$

Поскольку $\mathsf{E}(a^2_{f|_M}) = \mathsf{E}(a_{f|_M})$, имеем соотношение $\mathsf{D}(a_{f|_M}) = \dfrac{q^{r+1}}{q^{q^r}} - \dfrac{q^{2r+2}}{q^{2q^r}}$.

Как следует из леммы 2, пересечением многообразий M_i и M_j размерности r может быть многообразие размерности $r-s$, где $1 \leqslant s \leqslant \min\{r, n-r\}$, или пустое множество. В первом случае для ковариации справедливо $\operatorname{cov}(a_{f|_{M_i}}, a_{f|_{M_j}}) = \dfrac{q^{r+s+1}}{q^{2q^r - q^{r-s}}} - \dfrac{q^{2r+2}}{q^{2q^r}}$, в случае пустого множества имеем $\operatorname{cov}(a_{f|_{M_i}}, a_{f|_{M_j}}) = 0$. С учётом полученного значения дисперсии для $a_{f|_M}$ и леммы 2 преобразуем (24) следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathsf{D}(a_f(r)) &= m_q^n(r)\Big(\frac{q^{r+1}}{q^{q^r}} - \frac{q^{2r+2}}{q^{2q^r}}\Big) + 2\sum_{s=1}^{\min\{r,n-r\}} m_q^n(r,s)\Big(\frac{q^{r+s+1}}{q^{2q^r-q^{r-s}}} - \frac{q^{2r+2}}{q^{2q^r}}\Big) = \\ &= \frac{q^{n+1}\binom{n}{r}_q}{q^{2q^r}}\left[(q^{q^r} - q^{r+1}) + \sum_{s=1}^{\min\{r,n-r\}} q^{2s+s^2}(q^{q^{r-s}} - q^{r-s+1})\binom{r}{s}_q\binom{n-r}{s}_q\right] = \\ &= \frac{q^{n+1}\binom{n}{r}_q}{q^{2q^r}}\sum_{s=0}^{\min\{r,n-r\}} q^{2s+s^2}(q^{q^{r-s}} - q^{r-s+1})\binom{r}{s}_q\binom{n-r}{s}_q .\end{aligned} \tag{25}$$

Для оценки дисперсии вновь потребуются нормированные гауссовы биномиальные коэффициенты. После перехода к ним в (25) получим

$$\mathsf{D}(a_f(r)) = \frac{q^{(n-r+1)(r+1)}\left\langle{n \atop r}\right\rangle_q}{q^{2q^r}}\sum_{s=0}^{\min\{r,n-r\}} q^{(n-s+2)s}(q^{q^{r-s}} - q^{r-s+1})\left\langle{r \atop s}\right\rangle_q\left\langle{n-r \atop s}\right\rangle_q. \tag{26}$$

При изменении параметра s на отрезке от 0 до r, где $1 \leqslant r \leqslant \lfloor\log_q n + \log_q\log_q n\rfloor < n/2$, исследование выражений $(n-s+2)s + q^{r-s}$ и $\left\langle{n-r \atop s}\right\rangle_q$ показывает, что они принимают максимальное значение при $s = r$. Кроме того, из рекуррентного соотношения для нормированных гауссовых биномиальных коэффициентов $\left\langle{n \atop r}\right\rangle_q = \left\langle{n-1 \atop r}\right\rangle_q + \dfrac{1}{q^{n-r}}\left\langle{n-1 \atop r-1}\right\rangle_q$ следует неравенство $\left\langle{n-r \atop r}\right\rangle_q < \left\langle{n \atop r}\right\rangle_q$, а из (16) вытекает оценка $\sum\limits_{s=0}^{r}\left\langle{r \atop s}\right\rangle_q < \mathrm{e}^2(r+1)$. С учётом перечисленных замечаний к выражению (26) имеем неравенство

$$\mathsf{D}(a_f(r)) < \frac{q^{(n-r+1)(r+1)}\left\langle{n \atop r}\right\rangle_q^2}{q^{2q^r}} q^{(n-r+2)r+1}\mathrm{e}^2(r+1).$$

Из последнего с очевидностью следует

$$\mathsf{D}(a_f(r)) \leqslant \mathsf{E}^2(a_f(r))q^{-n+2r}\mathrm{e}^2(r+1).$$

Для оценки доли функций, на которых случайная величина $a_f(r)$ отклоняется от значения своего математического ожидания на величину, большую или равную ε, воспользуемся неравенством Чебышева для случайной величины $a_f(r)$ вида

$$\mathsf{P}(|a_f(r) - \mathsf{E}(a_f(r))| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathsf{D}(a_f(r))}{\varepsilon^2}.$$

Положим $\varepsilon = \mathsf{E}(a_f(r))/n$. Тогда при $1 \leqslant r \leqslant \lfloor\log_q n + \log_q\log_q n\rfloor < n/2$ имеем оценку

$$\mathsf{P}(|a_f(r) - \mathsf{E}(a_f(r))| \geqslant \mathsf{E}(a_f(r))/n) \leqslant \psi_q^n(r),$$

где $\psi_q^n(r) = q^{-n+2(r+\log_q n)}\mathrm{e}^2(r+1)$. При изменении r в указанных границах, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_q^n(r) = 0$, из чего следует справедливость второй части соотношения (14).

Первая часть формулы (15) доказывается аналогично. При этом, опираясь на результат леммы 2 относительно многообразий из множества $\hat{\mathfrak{M}}_q^n(r)$, можно получить следующее значение дисперсии для $\hat{a}_f(r)$:

$$\mathsf{D}(\hat{a}_f(r)) = \frac{q^{n+1}\binom{n}{r}}{q^{2q^r}}\left((q^{q^r} - q^{r+1}) + \sum_{s=1}^{\min\{r,n-r\}} q^{2s}(q^{q^{r-s}} - q^{r-s+1})\binom{r}{s}_q\binom{n-r}{s}_q\right).$$

При изменении параметра s на отрезке от 1 до r, где $1 \leqslant r \leqslant \lceil \log_q n\rceil < n/2$, исследование выражения $2s + q^{r-s}$ показывает, что оно принимает максимальное значение при $s=1$. Используя формулу для биномиальных коэффициентов $\binom{n}{r} = \sum\limits_{s=0}^{r}\binom{r}{s}\binom{n-r}{s}$, придём к оценке дисперсии $\mathsf{D}(\hat{a}_f(r)) \leqslant \mathsf{E}^2(\hat{a}_f(r))\left(q^{q^r-n-1}\Big/\binom{n}{r} + q^{q^{r-1}-n+1}\right)$, которая позволяет воспользоваться неравенством Чебышева для завершения доказательства (15).

Теорема 2 доказана. ■

Для $f \in P_q^n$ обозначим через r_f и $\hat{r}_f$ максимальную размерность многообразия из множеств $\mathfrak{M}_q^n(r)$ и $\hat{\mathfrak{M}}_q^n(r)$ соответственно, на котором ограничение функции f является аффинным.

Следствие 4. При $n \to \infty$ для почти всех функций из P_q^n справедливы оценки

$$\lfloor \log_q n + \log_q \log_q n\rfloor \leqslant r_f \leqslant \lceil \log_q n + \log_q \log_q n\rceil; \tag{27}$$

$$\lfloor \log_q n\rfloor \leqslant \hat{r}_f \leqslant \lceil \log_q n\rceil. \tag{28}$$

В случае целых значений логарифмов получим $r_f = \log_q n + \log_q \log_q n$ и $\hat{r}_f = \log_q n$.

В случае булевых функций в [6] при $n \to \infty$ для почти всех функций из P_2^n получена верхняя оценка максимальной размерности интервала в множестве единиц функции, равная $\lfloor \log_q n\rfloor + 1$ (термин «r-мерный интервал» соответствует многообразию размерности r, заданному фиксацией $n-r$ переменных). Последнее означает, что при достаточно больших значениях n для случайно выбранной булевой функции от n переменных с вероятностью близкой к 1 не найдётся единичной подфункции-константы, заданной фиксацией менее чем $n - \lfloor \log_q n\rfloor - 1$ переменных. Из данной оценки с очевидностью следует, что при $n \to \infty$ для почти всех функций из P_2^n справедлива верхняя оценка параметра $\hat{r}_f$ вида $\lfloor \log_q n\rfloor + 2$. В [7] показано, при $n \to \infty$ для почти всех функций из P_2^n имеет место нижняя оценка параметра $\hat{r}_f$ вида $\lfloor \log_2 n\rfloor - 1$. Оценка (28) настоящей работы уточняет и обобщает указанный результат на случай функций q-значной логики. Предпринятая в [8] попытка получить верхние асимптотические оценки параметра r_f для почти всех булевых функций не привела к успеху из-за ошибок в доказательстве. В [7, 8] величины $n - \hat{r}_f$ и $n - r_f$ названы уровнем аффинности и обобщённым уровнем аффинности функции f.

В работе [9] детально рассмотрено поведение параметров r_f и $\hat{r}_f$ квадратичных форм булевых функций.

Заключение

Результаты первой части работы позволяют говорить о поведении степени ограничений функций q-значной логики от n переменных на линейные многообразия векторного пространства $\mathbb{F}_q^n$ для произвольных значений n. В частности, из теоремы 1 можно получить верхние оценки максимальной размерности многообразия, на котором ограничение функции и, в частности, подфункция являются аффинными, для преобладающего числа функций q-значной логики. В таблице приведены подобные оценки для булевых функций от 4 до 16 переменных.

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
r_f	$\leqslant 3$	$\leqslant 3$	$\leqslant 4$	$\leqslant 4$	$\leqslant 4$	$\leqslant 5$	$\leqslant 5$	$\leqslant 5$	$\leqslant 5$	$\leqslant 5$	$\leqslant 6$	$\leqslant 6$	$\leqslant 6$
$\hat{r}_f$	$\leqslant 2$	$\leqslant 3$	$\leqslant 3$	$\leqslant 3$	$\leqslant 4$	$\leqslant 4$	$\leqslant 4$	$\leqslant 4$	$\leqslant 4$	$\leqslant 4$	$\leqslant 4$	$\leqslant 4$	$\leqslant 4$

Из таблицы следует, что преимущество использования произвольных многообразий по сравнению с фиксацией переменных при решении задач линеаризации начинает сказываться при $n \geqslant 9$.

Вторая часть работы даёт представление об асимптотике появления многообразий, на которых ограничения и, в частности, подфункции являются аффинными для почти всех функций q-значной логики при $n \to \infty$. Стоит, однако, заметить, что, как видно из таблицы, полученные в следствии 4 верхние оценки параметров r_f и $\hat{r}_f$ справедливы для преобладающего числа булевых функций при всех $n \geqslant 4$, за исключением оценки $\hat{r}_f$ при $n = 8$, который требует дополнительного изучения.

Для оценки долей функций, обладающих заданными свойствами, использован аппарат вероятностных методов в дискретной математике. Некоторые промежуточные результаты, как, например, определение числа функций q-значной логики степени не выше заданной и оценки гауссовых и обыкновенных биномиальных коэффициентов, имеют самостоятельное значение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дьедонне Ж.* Линейная алгебра и элементарная геометрия. М.: Наука, 1972. 336 с.
2. *Глухов М. М., Шишков А. Б.* Математическая логика. Дискретные функции. Теория алгоритмов. СПб.: Лань, 2012. 416 с.
3. *Глухов М. М., Елизаров В. П., Нечаев А. А.* Алгебра. Т. II. М.: Гелиос АРВ, 2003. 416 с.
4. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984. 528 с.
5. *Сачков В. Н.* Комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1977. 320 с.
6. *Журавлев Ю. И.* Теоретико-множественные методы в алгебре логики // Проблемы кибернетики. 1962. Вып. 8. С. 5–44.
7. *Логачев О. А.* О значениях уровня аффинности для почти всех булевых функций // Прикладная дискретная математика. 2010. № 3(9). С. 17–21.
8. *Буряков М. Л.* Асимптотические оценки уровня аффинности для почти всех булевых функций // Дискретная математика. 2008. Т. 20. Вып. 3. С. 73–79.
9. *Черемушкин А. В.* Об оценке уровня аффинности квадратичных форм // Дискретная математика. 2017. Т. 29. Вып. 1. С. 114–125.

REFERENCES

1. *D'edonne Zh.* Lineynaya algebra i elementarnaya geometriya [Linear Algebra and Elementary Geometry]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 336 p. (in Russian)

2. *Glukhov M. M. and Shishkov A. B.* Matematicheskaya logika. Diskretnye funktsii. Teoriya algoritmov [Mathematical Logic. Discrete Functions. Theory of Algorithms]. St. Petersburg, Lan Publ., 2012. 416 p. (in Russian)
3. *Glukhov M. M., Elizarov V. P., and Nechaev A. A.* Algebra [Algebra]. Vol. II. Moscow, Gelios ARV Publ., 2003. 416 p. (in Russian)
4. *Feller V.* Vvedenie v teoriyu veroyatnostey i ee prilozheniya [An Introduction to Probability Theory and its Applications]. Vol. 1. Moscow, Mir Publ., 1984. 528 p. (in Russian)
5. *Sachkov V. N.* Kombinatornye metody diskretnoy matematiki [Combinatorial Methods in Discrete Mathematics]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 320 p.. (in Russian)
6. *Zhuravlev Yu. I.* Teoretiko-mnozhestvennyye metody v algebre logiki [Set-theoretical methods in the algebra of logic]. Problemy Kibernetiki, 1962, no. 8, pp. 5–44. (in Russian)
7. *Logachev O. A.* O znacheniyakh urovnya affinnosti dlya pochti vsekh bulevykh funktsiy [On values of affinity level for almost all Boolean functions]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2010, no. 3(9), pp. 17–21. (in Russian)
8. *Buryakov M. L.* Asimptoticheskiye otsenki urovnya affinnosti dlya pochti vsekh bulevykh funktsiy [Asymptotic bounds for the affinity level for almost all Boolean functions]. Discrete Math. Appl., 2008, vol. 20, no. 3, pp. 73–79. (in Russian)
9. *Cheremushkin A. V.* Ob otsenke urovnya affinnosti kvadratichnykh form [Estimating the level of affinity of a quadratic form]. Discrete Math. Appl., 2017, vol. 29, no. 1, pp. 114–125. (in Russian)