

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НАДЁЖНОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ И УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

УДК 519.718

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫМИ ПО НАДЁЖНОСТИ СХЕМАМИ С ТРИВИАЛЬНОЙ ОЦЕНКОЙ НЕНАДЁЖНОСТИ ПРИ НЕИСПРАВНОСТЯХ ТИПА 0 НА ВЫХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ¹

М. А. Алехина*, С. М. Грабовская**, Ю. С. Гусынина*

* Пензенский государственный технологический университет, г. Пенза, Россия

** Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадёжных функциональных элементов в полном конечном базисе. Предполагается, что все функциональные элементы независимо друг от друга с вероятностью $\varepsilon \in (0, 1/2)$ переходят в неисправные состояния типа 0 на выходах элементов. Найдены и дополнены ранее известные условия на функции базиса, при выполнении которых почти любую булеву функцию можно реализовать асимптотически оптимальной по надёжности схемой, функционирующей с ненадёжностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ключевые слова: схема, неисправности типа 0 на выходах элементов, ненадёжность, асимптотически оптимальная по надёжности схема, булева функция.

DOI 10.17223/20710410/45/5

SUFFICIENT CONDITIONS FOR IMPLEMENTATION OF BOOLEAN FUNCTIONS BY ASYMPTOTICALLY OPTIMAL ON RELIABILITY CIRCUITS WITH THE TRIVIAL ESTIMATE OF UNRELIABILITY IN THE CASE OF FAULTS OF TYPE 0 AT THE ELEMENT OUTPUTS

M. A. Alekhina*, S. M. Grabovskaya**, Yu. S. Gusynina*

*Penza State Technological University, Penza, Russia

**Penza State University, Penza, Russia

E-mail: alekhina@penzgtu.ru, alekhina.marina19@yandex.ru, swetazin@mail.ru, gusynina@mail.ru

The implementation of Boolean functions by circuits of unreliable functional elements is considered in a complete finite basis, containing a function of the set M , where

$$M = \bigcup_{i=1}^4 (M_i \cup M_i^*), \quad M_1 = \text{Congr}\{x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\bar{\sigma}_1} x_2^{\bar{\sigma}_2} x_3^{\sigma_3} : \sigma_i \in \{0, 1\}, i \in \{1, 2, 3\}\},$$

$$M_2 = \text{Congr}\{x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \vee x_1^{\sigma_1} x_2^{\bar{\sigma}_2} x_3^{\bar{\sigma}_3} \vee x_1^{\bar{\sigma}_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\bar{\sigma}_3} : \sigma_i \in \{0, 1\}, i \in \{1, 2, 3\}\}, \quad M_3 =$$

$$= \text{Congr}\{\bar{x}_1(x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3}) : \sigma_i \in \{0, 1\}, i \in \{1, 2, 3\}\}, \quad M_4 = \text{Congr}\{x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \vee x_1^{\bar{\sigma}_1} x_2^{\bar{\sigma}_2} x_3^{\bar{\sigma}_3} :$$

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 17-01-00451-а.

$\sigma_i \in \{0, 1\}, i \in \{1, 2, 3\}$. The set M_i^* is the set of functions, each of which is dual to some function of M_i . All functional elements independently of each other with the probability $\varepsilon \in (0, 1/2)$ are assumed to be prone to faults of type 0 at the element outputs. These faults are characterized by the fact that in good condition the functional element implements the function assigned to it, and in the faulty — constant 0. It is proved that almost any Boolean function can be implemented in a complete finite basis B , $B \cap M \neq \emptyset$, by an asymptotically optimal on reliability circuit working with unreliability asymptotically equal to ε at $\varepsilon \rightarrow 0$.

Keywords: *circuit, faults of type 0 at the element outputs, unreliability, asymptotically optimal on reliability circuit, Boolean function.*

Введение

Работа относится к одному из важнейших разделов математической кибернетики — теории синтеза, надёжности и сложности управляющих систем. Актуальность исследований в этой области обусловлена важностью многочисленных приложений, возникающих в различных разделах науки и техники.

К числу основных модельных объектов математической теории синтеза, сложности и надёжности управляющих систем относятся схемы из ненадёжных функциональных элементов, реализующие булевы функции. Проблема построения оптимальных по критериям надёжности и сложности схем из ненадёжных элементов является одной из наиболее важных и в то же время трудных в теории синтеза управляющих систем. Разработка специальных методов синтеза схем из ненадёжных функциональных элементов связана, главным образом, с выбранной математической моделью неисправностей. К основным моделям неисправностей относятся, например, инверсные и константные неисправности на выходах элементов. В работе рассматривается задача построения асимптотически оптимальных по надёжности схем в предположении, что функциональные элементы подвержены неисправностям типа 0 на выходах.

Исторически сложилось так, что сначала исследовались инверсные неисправности функциональных элементов, реализующих булевы функции. Первые существенные математические результаты, касающиеся синтеза надёжных схем из ненадёжных элементов, получил Дж. фон Нейман [1]. Он предполагал, что элементы подвержены инверсным неисправностям на выходах, когда функциональный элемент E с приписанной ему булевой функцией $e(\tilde{x})$, переходя в неисправное состояние с вероятностью ε ($0 < \varepsilon < 1/6$), реализует функцию $\bar{e}(\tilde{x})$. С помощью итерационного метода Дж. фон Неймана произвольную булеву функцию можно реализовать схемой, вероятность ошибки на выходе которой при любом входном наборе значений переменных не превосходит $c \cdot \varepsilon$ (c — некоторая положительная, зависящая лишь от базиса константа), т. е. ненадёжность схемы сравнима с ненадёжностью одного элемента (такие схемы в теории надёжности управляющих систем принято называть надёжными). С ростом числа итераций сложность схемы при использовании метода Дж. фон Неймана увеличивается экспоненциально.

Любой метод синтеза схем из ненадёжных элементов характеризуется двумя важными параметрами: вероятностью ошибки на выходе схемы (ненадёжностью) и сложностью схемы. Именно оптимизации сложности схем, реализующих булевы функции, уделялось главное внимание в работах Р. Л. Добрушина, С. И. Ортюкова [2, 3], Д. Улига [4] и некоторых других авторов. Задача построения асимптотически оптимальных по надёжности схем из ненадёжных элементов, подверженных тем или иным

неисправностям, ни Дж. фон Нейманом, ни другими исследователями до появления работ М. А. Алехиной не рассматривалась.

Н. Пишпенджер [5] в классическом базисе $\{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$ построил надёжные схемы без существенного увеличения сложности в предположении, что все элементы схемы ненадёжны, подвержены инверсным неисправностям на выходах.

С. В. Яблонский [6] рассматривал задачу синтеза надёжных схем в базисе $\{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1, g(x_1, x_2, x_3)\}$. Он предполагал, что элемент, реализующий функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$, абсолютно надёжный, а конъюнктор, дизъюнктор и инвертор ненадёжные, подвержены произвольным неисправностям, ненадёжность каждого из них не больше ε . Им доказано, что для любого p существует алгоритм, который для каждой булевой функции строит асимптотически оптимальную по сложности схему, ненадёжность которой не больше p .

В. В. Тарасов [7] рассматривал задачу построения схем сколь угодно высокой надёжности (когда ненадёжность схемы стремится к 0). Для базисов из ненадёжных функциональных элементов с двумя входами и одним выходом он нашёл необходимые и достаточные условия, при которых любую булеву функцию можно реализовать схемой сколь угодно высокой надёжности.

Позднее в работах В. В. Чугуновой, А. В. Васина, Д. М. Клянчиной и некоторых других авторов решалась задача реализации булевых функций асимптотически оптимальными по надёжности схемами при различных неисправностях элементов.

Данная работа продолжает исследования, начатые в [8] для полного базиса $\{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2\}$, элементы которого подвержены неисправностям типа 0 на выходах. Позднее задача синтеза асимптотически оптимальных по надёжности схем при неисправностях типа 0 была решена [9] во всех полных неприводимых базисах из двухвходовых функциональных элементов, кроме одного. Задача построения асимптотически оптимальных по надёжности схем при инверсных неисправностях на выходах элементов решена А. В. Васиным [10] во всех полных конечных базисах, содержащих функции трёх переменных. В частности, А. В. Васин нашёл необходимые и достаточные условия на функции полного конечного базиса B_1 , содержащего функции трёх переменных, при которых почти любую функцию можно реализовать схемой с ненадёжностью, асимптотически равной 2ε при $\varepsilon \rightarrow 0$. Аналогичная задача при неисправностях типа 0 на выходах элементов ранее была решена в некоторых полных конечных базисах [11–13], а полученные результаты привели к гипотезе «В базисе B_1 почти любую функцию можно реализовать схемой с ненадёжностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \rightarrow 0$, если элементы подвержены неисправностям типа 0 на выходах». Доказательство гипотезы (исключая базисы, содержащие линейную функцию) приводится в этой работе.

Введём необходимые понятия и определения.

1. Необходимые понятия, определения и ранее известные результаты

Рассмотрим реализацию булевых функций схемами из ненадёжных функциональных элементов в полном конечном базисе B . Схема реализует функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ ($n \in \mathbb{N}$), если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a}^n = (a_1, \dots, a_n)$ при отсутствии неисправностей на выходе схемы появляется значение $f(\tilde{a}^n)$. Предполагается, что все функциональные элементы независимо друг от друга с вероятностью $\varepsilon \in (0, 1/2)$ переходят в неисправные состояния типа 0 на выходах элементов. Эти неисправности характеризуются тем, что в исправном состоянии функциональный элемент реализует приписанную ему функцию, а в неисправном — константу 0.

Пусть $P_{\bar{f}(\tilde{a}^n)}(S, \tilde{a}^n)$ — вероятность появления значения $\bar{f}(\tilde{a}^n)$ на выходе схемы S , реализующей функцию $f(\tilde{x}^n)$ при входном наборе $\tilde{a}^n$. Ненадёжность схемы S равна $P(S) = \max\{P_{\bar{f}(\tilde{a}^n)}(S, \tilde{a}^n)\}$, где максимум берётся по всем наборам $\tilde{a}^n$. Надёжность схемы S равна $1 - P(S)$.

Пусть $P_\varepsilon(f) = \inf P(S)$, где инфимум берётся по всем схемам S из ненадёжных элементов, реализующим функцию $f(\tilde{x}^n)$. Схему A из ненадёжных элементов, реализующую f , назовем *асимптотически оптимальной* (*асимптотически наилучшей*) по надёжности, если $P(A) \sim P_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P_\varepsilon(f)}{P(A)} = 1$.

Булевы функции f_1 и f_2 назовем *конгруэнтными* [14], если одна из них может быть получена из другой заменой переменных (без отождествления).

Пусть $X \subseteq P_2$. Обозначим $\text{Congr}(X)$ множество всех функций, каждая из которых конгруэнтна некоторой функции множества X .

Рассмотрим следующие множества булевых функций:

$$\begin{aligned} M_1 &= \text{Congr}\{x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\bar{\sigma}_1} x_2^{\bar{\sigma}_2} x_3^{\sigma_3} : \sigma_i \in \{0, 1\}, i \in \{1, 2, 3\}\}, \\ M_2 &= \text{Congr}\{x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \vee x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\bar{\sigma}_3} \vee x_1^{\bar{\sigma}_1} x_2^{\bar{\sigma}_2} x_3^{\bar{\sigma}_3} : \sigma_i \in \{0, 1\}, i \in \{1, 2, 3\}\}, \\ M_3 &= \text{Congr}\{\bar{x}_1(x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3}) : \sigma_i \in \{0, 1\}, i \in \{1, 2, 3\}\}, \\ M_4 &= \text{Congr}\{x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \vee x_1^{\bar{\sigma}_1} x_2^{\bar{\sigma}_2} x_3^{\bar{\sigma}_3} : \sigma_i \in \{0, 1\}, i \in \{1, 2, 3\}\}, \end{aligned}$$

а также $M_1^*, M_2^*, M_3^*, M_4^*$ — множества функций, двойственных функциям из множеств M_1, M_2, M_3, M_4 соответственно.

Обозначим $M = \bigcup_{i=1}^4 (M_i \cup M_i^*)$, $P_2(n)$ — множество булевых функций, зависящих от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Ранее при инверсных неисправностях на выходах элементов [10] исследовались все полные в $P_2(3)$ конечные базисы, каждый из которых содержит функцию множества M . Доказано [10] (см. также [15]), что если базис B содержит функцию из множества M , то при инверсных неисправностях на выходах элементов любую булеву функцию можно реализовать схемой, ненадёжность которой не больше $2\varepsilon + 109\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$. Следовательно, в базисе B любую булеву функцию можно реализовать схемой, функционирующей с ненадёжностью асимптотически не больше 2ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

При неисправностях типа 0 на выходах элементов в [11, 12] исследовались полные конечные базисы, содержащие некоторые из функций множества M . При этих неисправностях в рассмотренных базисах доказано, что любую булеву функцию можно реализовать схемой, ненадёжность которой не больше $\varepsilon + 100\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$. Следовательно, в базисе B любую булеву функцию можно реализовать схемой, функционирующей с ненадёжностью асимптотически не больше ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Замечание 1. При неисправностях типа 0 на выходах элементов любая схема, содержащая хотя бы один функциональный элемент и реализующая отличную от константы 0 функцию, имеет ненадёжность не меньше ε при всех $\varepsilon \in (0, 1/2)$ [9].

Таким образом, из результатов, полученных в [11, 12, 13], с учётом замечания 1 следует, что в ряде базисов, содержащих некоторые из функций множества M , почти любую функцию можно реализовать асимптотически оптимальной по надёжности схемой, функционирующей с ненадёжностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \rightarrow 0$. Теперь более детально сформулируем выдвинутую во введении и доказанную далее гипотезу: «В полном конечном базисе, содержащем любую из функций множества M , почти любую булеву функцию можно реализовать асимптотически оптимальной по надёжности схемой, функционирующей с ненадёжностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ ».

Заметим, что в некоторых из рассматриваемых базисов для повышения надёжности исходных схем можно использовать схемы из работы [15], в других — искать новые схемы или способы доказательства результатов.

Сформулируем необходимые для доказательств теорем ранее известные леммы 1–3 и теорему 1. Заметим, что леммы 1 и 3 верны в любом полном конечном базисе при произвольных неисправностях элементов.

Обозначим $G = \text{Congr}\{x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\sigma_1}x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3} : \sigma_i \in \{0, 1\}, i \in \{1, 2, 3\}\}$.

Лемма 1 [9]. Пусть функция f реализована схемой S с ненадёжностью не больше $p \leq 1/2$. Пусть схема S_g реализует функцию $g \in G$ с ненадёжностью $P(S_g) \leq 1/2$, причём v_0 и v_1 — вероятности ошибок схемы S_g на наборах $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ и $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3)$ соответственно. Тогда функцию f можно реализовать схемой $\Phi(S)$, ненадёжность которой $P(\Phi(S)) \leq \max\{v_0, v_1\} + 3pP(S_g) + 3p^2$.

Лемма 2 [16]. При неисправностях типа 0 на выходах элементов любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой S , что $P(S) \leq 5,2\varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Лемма 3 [11]. Пусть схема S_φ реализует функцию $\varphi = x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2} \oplus x_3^{\sigma_3}$ ($\sigma_i \in \{0, 1\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$) с ненадёжностью $P(S_\varphi)$, причём w_0, w_1 — вероятности ошибок схемы S_φ на наборах $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, 0)$, $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, 1)$. Тогда можно построить такую схему S_g , реализующую функцию $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3)^{\sigma_3}$, что $P(S_g) \leq P(S_\varphi) + 2p_\oplus$ ($p_\oplus = \max\{P(S_1), P(S_2)\}$, S_1 — любая схема, реализующая функцию $x_1 \oplus x_2$, S_2 — любая схема, реализующая функцию $x_1 \oplus x_2 \oplus 1$ в рассматриваемом базисе), а для вероятностей ошибок v_1 и v_0 схемы S_g на наборах $(0, 0, 0)$ и $(1, 1, 1)$ выполняются неравенства $v_1, v_0 \leq \max\{w_0, w_1\} + 2p_\oplus^2$.

Теорема 1 [12]. Если полный конечный базис B содержит функцию из множества $M_3 \cup M_3^*$, то при неисправностях типа 0 на выходах элементов любую булеву функцию в этом базисе можно реализовать схемой, ненадёжность которой не больше $\varepsilon + 100\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

2. Основные результаты

Теорема 2. Если полный конечный базис B содержит функцию из множества $M_1 \cup M_1^*$, то любую булеву функцию можно реализовать схемой, ненадёжность которой не больше $\varepsilon + 100\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Доказательство. Пусть базис B содержит некоторую функцию множества $M_1 \cup M_1^*$, т. е. функцию, конгруэнтную одной из следующих функций:

- 1) $\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3^{\sigma_3}$ ($\sigma_3 \in \{0, 1\}$);
- 2) $\varphi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2x_3^{\sigma_3}$;
- 3) $\varphi_3(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2x_3^{\sigma_3}$;
- 4) $\varphi_4(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \& (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3^{\sigma_3})$;
- 5) $\varphi_5(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \bar{x}_2) \& (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3^{\sigma_3})$;
- 6) $\varphi_6(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \& (x_1 \vee x_2 \vee x_3^{\sigma_3})$.

С л у ч а й 1. Для σ_3 возможны два варианта: $\sigma_3 = 0$ или $\sigma_3 = 1$. Случай $\sigma_3 = 0$ рассмотрен в [11], для него утверждение теоремы верно.

Пусть $\sigma_3 = 1$. Тогда имеем $\varphi_1(x_1, x_1, x_3) = x_1 \vee x_3$, $\varphi_1(x_1, x_2, x_2) = x_1 \& x_2$ и по результатам из [9] утверждение теоремы верно.

С л у ч а й 2 рассмотрен в [11], для него утверждение теоремы верно.

С л у ч а й 3 при $\sigma_3 = 0$ рассмотрен в [11], для него утверждение теоремы верно. Пусть $\sigma_3 = 1$. Тогда имеем $\varphi_3(x_1, x_1, x_3) = \bar{x}_1 \vee x_3$, $\varphi_3(x_1, x_2, x_2) = x_1 \sim x_2$ и по результатам из [17] утверждение теоремы верно.

С л у ч а й 4 рассмотрен в [12], для него утверждение теоремы верно.

С л у ч а й 5. При $\sigma_3 = 0$ имеем $\varphi_5(x_1, x_2, x_2) = x_1 \vee \bar{x}_2$, $\varphi_5(x_1, x_2, x_1) = x_1 \sim x_2$ и по результатам из [17] утверждение теоремы верно.

Пусть $\sigma_3 = 1$. Тогда имеем $\varphi_5(x_1, x_2, x_1) = x_1 \vee \bar{x}_2$, $\varphi_5(x_1, x_2, x_2) = x_1 \sim x_2$ и по результатам из [17] утверждение теоремы верно.

С л у ч а й 6 рассмотрен в [12], для него утверждение теоремы верно. ■

Лемма 4. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3$ или двойственная ей функция φ^* содержатся в полном конечном базисе B , тогда в этом базисе любую булеву функцию можно реализовать схемой, ненадёжность которой не больше $\varepsilon + 74\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Доказательство.

1) Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \in B$. Для повышения надёжности исходных схем будем использовать схему $S_{\bar{g}}$ (рис. 1), реализующую функцию $\bar{g}(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3} \in G$. Эта схема использовалась также в [15], но теперь её элементы подвержены неисправностям типа 0 на выходах. Оценим её вероятностные характеристики и покажем, как их улучшить.

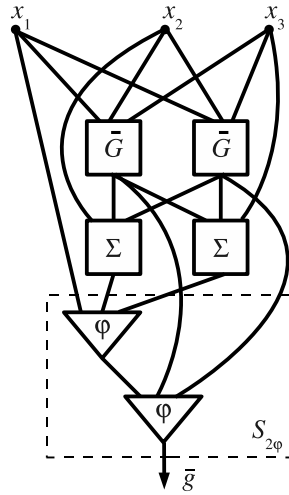


Рис. 1. Схема $S_{\bar{g}}$

Э т а п 1. По лемме 2 для функций $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$ и $\bar{g}(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3}$ можно построить схемы Σ и $\bar{G}$ соответственно, функционирующие с ненадёжностями $P(\Sigma)$ и $P(\bar{G})$, не превосходящими величины $5,2\varepsilon$. Возьмём два элемента, реализующих функцию φ , и по два экземпляра схем Σ и $\bar{G}$ и соединим их, как показано на рис. 1. Построенная схема $S_{\bar{g}}$ реализует функцию $\bar{g} \in G$. Ненадёжность схемы $S_{\bar{g}}$ удовлетворяет неравенству $P(S_{\bar{g}}) \leq 2P(\bar{G}) + 2P(\bar{\Sigma}) + 2\varepsilon \leq 23\varepsilon$.

Оценим вероятность ошибки v_0 схемы $S_{\bar{g}}$ на наборе $(0, 0, 0)$. Нетрудно видеть, что ошибка в точности одной из подсхем $\bar{G}$ или Σ на входном наборе $(0, 0, 0)$, а также ошибка невыходного элемента подсхемы $S_{2\varphi}$ не приводит к ошибке на выходе всей схемы $S_{\bar{g}}$. Следовательно, чтобы произошла ошибка, нужно, чтобы ошибся выходной элемент подсхемы $S_{2\varphi}$ или чтобы ошиблись хотя бы две из других подсхем. Поэтому вероятность ошибки v_0 схемы $S_{\bar{g}}$ на наборе $(0, 0, 0)$ удовлетворяет неравенству

$$v_0 \leq \varepsilon + C_4^2(5,2\varepsilon)^2 + 4 \cdot 5,2\varepsilon^2 \leq \varepsilon + 6(5,2\varepsilon)^2 + 20,8\varepsilon^2 \leq \varepsilon + 184\varepsilon^2.$$

Аналогично получается верхняя оценка для вероятности ошибки v_1 схемы $S_{\bar{g}}$ на наборе $(1, 1, 1)$, только в этом случае вероятность ошибки выходного элемента равна 0, поэтому $v_1 \leq 184\varepsilon^2$.

Пусть f — произвольная булева функция. По лемме 2 её можно реализовать схемой S с ненадёжностью $P(S) \leq 5,2\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0, 1/960]$. Используя схему $S_{\bar{g}}$, с помощью леммы 1 по схеме S построим схему $\Phi(S)$ и оценим её ненадёжность при $\varepsilon \in (0, 1/960]$:

$$\begin{aligned} P(\Phi(S)) &\leq \max\{v_0, v_1\} + 3pP(S_g) + 3p^2 \leq \varepsilon + 184\varepsilon^2 + 3 \cdot 5,2\varepsilon \cdot 23\varepsilon + 3(5,2\varepsilon)^2 \leq \\ &\leq \varepsilon + 624\varepsilon^2 \leq 1,65\varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой S , что $P(S) \leq 1,65\varepsilon$ при $\varepsilon \leq 1/960$.

Э т а п 2. На первом этапе доказано, что схемы Σ и $\bar{G}$ можно построить с ненадёжностью $P(\Sigma) \leq 1,65\varepsilon$, $P(\bar{G}) \leq 1,65\varepsilon$. Тогда схему $S_{\bar{g}}$ на рис. 1 можно построить так, что $P(S_{\bar{g}}) \leq 2P(\bar{G}) + 2P(\bar{\Sigma}) + 2\varepsilon \leq 8,6\varepsilon$.

Оценим вероятность ошибки v_0 схемы $S_{\bar{g}}$ на наборе $(0, 0, 0)$ аналогично этапу 1:

$$v_0 \leq \varepsilon + C_4^2(1,65\varepsilon)^2 + 4 \cdot 1,65\varepsilon^2 \leq \varepsilon + 23\varepsilon^2.$$

Так же получается верхняя оценка для вероятности ошибки v_1 схемы $S_{\bar{g}}$ на наборе $(1, 1, 1)$, только в этом случае вероятность ошибки выходного элемента равна 0, поэтому $v_1 \leq 23\varepsilon^2$.

Пусть f — произвольная булева функция. Реализуем её схемой S с ненадёжностью $P(S) \leq 1,65\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0, 1/960]$. Используя схему $S_{\bar{g}}$, построенную на втором этапе, с помощью леммы 1 по схеме S построим схему $\Phi(S)$ и оценим её ненадёжность: $P(\Phi(S)) \leq \max\{v_0, v_1\} + 3pP(S_g) + 3p^2 \leq \varepsilon + 23\varepsilon^2 + 3 \cdot 1,65\varepsilon \cdot 8,6\varepsilon + 3(1,65\varepsilon)^2 \leq \varepsilon + 74\varepsilon^2$. Таким образом, любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой S , что $P(S) \leq \varepsilon + 74\varepsilon^2$.

2) Пусть $\varphi^*(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1 \in B$. Поскольку функции $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$ и $\bar{g}(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3}$ являются самодвойственными, для доказательства леммы будем использовать схему на рис. 1, заменив функциональные элементы, реализующие φ , на элементы, реализующие φ^* . Все рассуждения такие же, как в предыдущем случае. Отметим только несущественное отличие для оценок v_0, v_1 , а именно: на первом этапе $v_0, v_1 \leq \varepsilon + 184\varepsilon^2$, а на втором — $v_0, v_1 \leq \varepsilon + 23\varepsilon^2$. ■

Теорема 3. Если полный конечный базис B содержит функцию из множества $M_2 \cup M_2^*$, то любую булеву функцию в этом базисе можно реализовать схемой, ненадёжность которой не больше $\varepsilon + 100\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Доказательство. Пусть базис содержит функцию множества $M_2 \cup M_2^*$, т. е. функцию, конгруэнтную одной из таких функций:

- 1) $\phi_1(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3$;
- 2) $\phi_2(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$;
- 3) $\phi_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3$;
- 4) $\phi_4(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3$;
- 5) $\phi_5(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \& (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \& (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$;
- 6) $\phi_6(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \& (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \& (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$;
- 7) $\phi_7(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \& (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \& (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$;
- 8) $\phi_8(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \& (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \& (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$.

С л у ч а й 1. Поскольку $\phi_1(x_1, x_1, x_3) = \bar{x}_1 \& \bar{x}_3$, по результатам из работы [9] утверждение теоремы верно.

С л у ч а и 2, 5 и 6 рассмотрены в [12], для них утверждение теоремы верно.

С л у ч а й 4 рассмотрен в [11], для него утверждение теоремы верно.

С л у ч а и 3 и 7 рассмотрены в лемме 4, для них утверждение теоремы верно.

С л у ч а й 8. Нетрудно проверить, что $\phi_8(x_1, x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$, а $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \phi_8(x_1, x_3, \phi_8(x_1, x_1, x_2)) = \phi_8(x_1, x_3, x_1 \vee x_2) = \bar{x}_1 x_2 \oplus x_3$. Моделируя последнюю формулу, строим схему S_φ из двух элементов. Вычислим вероятности ошибок w_0 на наборе $(1, 0, 1)$ и w_1 на наборе $(1, 0, 0)$ (см. лемму 3) на выходе схемы S_φ и получим $w_0 = \varepsilon$ и $w_1 = \varepsilon(1 - \varepsilon)$. Следовательно, $\max\{w_0, w_1\} = \varepsilon$.

По условию B — полный базис, следовательно, функции $(x_1 \oplus x_2)^0, (x_1 \oplus x_3)^1 \in [B]$. По лемме 2 реализуем их такими схемами S_1 и S_2 соответственно, что $P(S_1) \leq 5,2\varepsilon$ и $P(S_2) \leq 5,2\varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$. Нетрудно видеть, что $\varphi((x_1 \oplus x_2)^0, (x_1 \oplus x_3)^1, x_1) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3 = g \in G$. Моделируя формулу $\varphi((x_1 \oplus x_2)^0, (x_1 \oplus x_3)^1, x_1)$, построим схему S_g , реализующую функцию $g \in G$. Легко проверить, что $P(S_g) \leq 2\varepsilon + 2 \cdot 5,2\varepsilon = 12,4\varepsilon$. С помощью леммы 3 оценим вероятности ошибок v_0 и v_1 схемы S_g на наборах $(0, 0, 0)$ и $(1, 1, 1)$ соответственно: $v_0, v_1 \leq \max\{w_0, w_1\} + 2p_\oplus^2 \leq \varepsilon + 2(5,2\varepsilon)^2 \leq \varepsilon + 54,1\varepsilon^2$.

Пусть f — произвольная булева функция. По лемме 2 её можно реализовать схемой S с ненадёжностью $P(S) \leq 5,2\varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Возьмём три экземпляра схемы S , реализующей функцию f . Используя их и схему S_g , построим схему $\Phi(S)$, которая реализует функцию f . Оценим ненадёжность схемы $\Phi(S)$, используя лемму 1. Получим неравенство $P(\Phi(S)) \leq \max\{v_0, v_1\} + 3pP(S_g) + 3p^2 \leq \varepsilon + 54,1\varepsilon^2 + 3(5,2\varepsilon)12,4\varepsilon + 3(5,2\varepsilon)^2 \leq \varepsilon + 328,7\varepsilon^2 \leq 1,35\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0, 1/960]$. По схеме $\Phi(S)$ построим схему $\Phi^2(S)$. По лемме 1 оценим ненадёжность схемы $\Phi^2(S)$. Получим $P(\Phi^2(S)) \leq \varepsilon + 54,1\varepsilon^2 + 3(1,35\varepsilon)12,4\varepsilon + 3(1,35\varepsilon)^2 \leq \varepsilon + 110\varepsilon^2 \leq 1,12\varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$. По схеме $\Phi^2(S)$ построим схему $\Phi^3(S)$. По лемме 1 оценим ненадёжность схемы $\Phi^3(S)$. Получим $P(\Phi^3(S)) \leq \varepsilon + 54,1\varepsilon^2 + 3(1,12\varepsilon)12,4\varepsilon + 3(1,12\varepsilon)^2 \leq \varepsilon + 100\varepsilon^2$. Схема $\Phi^3(S)$ — искомая. ■

Теорема 4. Если полный конечный базис B содержит функцию из множества $M_4 \cup M_4^*$, то любую булеву функцию можно реализовать схемой, ненадёжность которой не больше $\varepsilon + 100\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Доказательство. Пусть базис B содержит функцию множества $M_4 \cup M_4^*$, т. е. функцию, конгруэнтную одной из следующих функций:

- 1) $\psi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$;
- 2) $\psi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$;
- 3) $\psi_3(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \& (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$;
- 4) $\psi_4(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \& (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$.

С л у ч а и 1 и 2 рассмотрены в [11], для них утверждение теоремы верно.

В с л у ч а е 3 имеем $\psi_3(x_1, x_1, x_3) = x_1 \oplus x_2$, $\psi_3(x_1, x_1, x_1) = 0$, $\psi_3(x_1, x_2, 0) = x_1 \vee x_2$ и по результатам из [17] утверждение теоремы верно.

В с л у ч а е 4 функция $\psi_4(x_1, x_2, x_3)$ представима в виде $x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_3 \oplus 1$, т. е. является особенной. По результатам из [18] утверждение теоремы верно. ■

Заключение

Из теорем 1–4 и замечания 1 следует, что при неисправностях типа 0 на выходах элементов в базисе B , $B \cap M \neq \emptyset$, почти любую функцию можно реализовать асимп-

тотически оптимальной по надёжности схемой, функционирующей с ненадёжностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Таким образом, значительно расширено множество функций, при наличии каждой из которых в базисе возможна реализация почти любой булевой функции асимптотически оптимальной по надёжности схемой, функционирующей с ненадёжностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Поскольку $M = M^*$, полученные результаты справедливы при неисправностях типа 1 на выходах базисных элементов [19].

ЛИТЕРАТУРА

1. Von Neumann J. Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components // Automata studies / eds. C. Shannon and J. McCarthy. Princeton University Press, 1956. P. 43–98.
2. Добрушин Р. Л., Ортюков С. И. Верхняя оценка для избыточности самокорректирующихся схем из ненадежных функциональных элементов // Пробл. передачи информ. 1977. Т. 13. № 3. С. 56–76.
3. Ортюков С. И. Об избыточности реализации булевых функций схемами из ненадежных элементов // Труды семинара по дискретной математике и её приложениям (Москва, 27–29 января 1987 г.). М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. С. 166–168.
4. Uhlig D. Reliable networks from unreliable gates with almost minimal complexity // LNCS. 1987. V. 278. P. 462–469.
5. Pippenger N. On networks of noisy gates // 26th Ann. Symp. Foundations of Computer Science. Portland, 21–23 Oct. 1985. P. 30–38.
6. Яблонский С. В. Асимптотически наилучший метод синтеза надежных схем из ненадежных элементов // Banach Center Publ. 1982. V. 7. No. 1. P. 11–19.
7. Тарасов В. В. К синтезу надежных схем из ненадежных элементов // Матем. заметки. 1976. Т. 20. № 3. С. 391–400.
8. Алехина М. А. О синтезе надежных схем из функциональных элементов x/y при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1991. № 5. С. 80–83.
9. Алехина М. А. Синтез асимптотически оптимальных по надежности схем. Пенза: ИИЦ ПГУ, 2006. 156 с.
10. Васин А. В. Асимптотически оптимальные по надежности схемы в полных базисах из трехвходовых элементов. Пенза: ИИЦ ПГУ, 2010. 100 с.
11. Алехина М. А., Клянчина Д. М. Достаточные условия реализации булевых функций асимптотически оптимальными схемами с тривиальной оценкой ненадежности // Междунар. симп. «Надежность и качество, 2010» (Пенза, 24–31 мая 2010). Пенза: ИИЦ ПГУ, 2010. Т. 1. С. 229–232.
12. Алехина М. А., Клянчина Д. М. Об асимптотически оптимальных по надежности схемах в некоторых специальных базисах // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2010. № 4 (16). С. 3–13.
13. Алехина М. А., Клянчина Д. М. Об асимптотически оптимальных по надежности схемах в базисах, содержащих существенную линейную функцию и функцию вида $x_1^a \& x_2^b$ // Материалы XVI Междунар. конф. «Проблемы теоретической кибернетики» (Нижний Новгород, 20–25 июня 2011). Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2011. С. 33–37.
14. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике: учеб. пособие. 3-е изд., перераб. М.: Физматлит, 2006. 416 с.

15. *Алехина М. А., Васин А. В.* О базисах с коэффициентом ненадежности 2 // Матем. заметки. 2014. Т. 95. № 2. С. 170–201.
16. *Алехина М. А., Гусынина Ю. С., Шорникова Т. А.* Верхняя оценка ненадежности схем в полном конечном базисе (в P_2) при произвольных неисправностях элементов // Изв. вузов. Математика. 2017. № 12. С. 8–83.
17. *Алехина М. А.* О надежности схем в полном конечном базисе, содержащем линейную функцию двух переменных и обобщенную дизъюнкцию // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2019. № 1. С. 64–73.
18. *Алехина М. А., Гусынина Ю. С., Шорникова Т. А.* О надежности схем при неисправностях типа 0 на выходах элементов в полном конечном базисе, содержащем особенную функцию // Изв. вузов. Математика. 2019. № 6. С. 85–88.
19. *Алехина М. А., Пичугина П. Г.* О надежности двойственных схем в полном конечном базисе // XVIII Междунар. школа-семинар «Синтез и сложность управляющих систем» (Пенза, 28 сентября–3 октября 2009). М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2009. С. 10–13.

REFERENCES

1. *Von Neumann J.* Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components. Automata studies (eds. C. Shannon and J. McCarthy). Princeton University Press, 1956, pp. 43–98.
2. *Dobrushin R. L. and Ortyukov S. I.* Upper bound on the redundancy of self-correcting arrangements of unreliable functional elements. Problems Inform. Transmission, 1977, vol. 13, no. 3, pp. 203–218.
3. *Ortyukov S. I.* Ob izbytochnosti realizatsii bulevykh funktsiy skhemami iz nenadezhnykh elementov [On the redundancy of the Boolean functions implementation by circuits from unreliable elements]. Seminar on Discr. Math. and its Appl. (Moscow, 27–29 Jan. 1987). Moscow, MSU Publ., 1989, pp. 166–168. (in Russian)
4. *Uhlig D.* Reliable networks from unreliable gates with almost minimal complexity. LNCS, 1987, vol. 278, pp. 462–469.
5. *Pippenger N.* On networks of Noisy Gates. 26th Ann. Symp. Foundations of Computer Science, Portland, 21–23 Oct. 1985, pp. 30–38.
6. *Yablonskiy C. V.* Asimptoticheski nailuchshiy metod sinteza nadezhnykh skhem iz nenadezhnykh elementov [Asymptotically best method for synthesizing reliable circuits from unreliable elements]. Banach Center Publ., 1982, vol. 7, no 1, pp. 11–19. (in Russian)
7. *Tarasov V. V.* The synthesis of reliable circuits from unreliable elements. Math. Notes, 1976, vol. 20, iss. 3, pp. 775–780.
8. *Alekhina M. A.* O sinteze nadezhnykh skhem iz funktsional'nykh elementov x/y pri odnotipnykh konstantnykh neispravnostyakh na vykhodakh elementov [On the synthesis of reliable circuits of x/y functional elements at the same type constant faults at the element outputs]. Vestnic MSU, Matematika Mekhanika, 1991, no. 5, pp. 80–83. (in Russian)
9. *Alekhina M. A.* Sintez asimptoticheski optimal'nykh po nadezhnosti skhem [The synthesis of asymptotically optimal on reliability circuits]. Penza, Penz. State Univ., 2006. 156 p. (in Russian)
10. *Vasin A. V.* Asimptoticheski optimal'nyye po nadezhnosti skhemy v polnykh bazisakh trekhvkhodovykh elementov [Asymptotically optimal on reliability circuits in complete bases of three-input elements]: PhD Thesis. Penza, Penz. State Univ., 2010. 100 p. (in Russian)
11. *Alekhina M. A. and Klyanchina D. M.* Dostatochnyye usloviya realizatsii bulevykh funktsiy asimptoticheski optimal'nymi skhemami s trivial'noy otsenkoy nenadezhnosti [Sufficient conditions for the implementation of Boolean functions by asymptotically optimal circuits]

- with a trivial estimate of unreliability]. Int. Symp. "Reliability and quality, 2010" (Penza, Russia, 24–31 May 2010). Penza, Penz. State Univ., 2010, pp. 229–232. (in Russian)
12. Alekhina M. A. and Klyanchina D. M. Ob asimptoticheski optimal'nykh po nadezhnosti skhemakh v nekotorykh spetsial'nykh bazisakh [On asymptotically optimal on reliability circuits in some special bases]. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Povolzhskiy Region. Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2010, no. 4 (16), pp. 3–13. (in Russian)
 13. Alekhina M. A. and Klyanchina D. M. Ob asimptoticheski optimal'nykh po nadezhnosti skhemakh v bazisakh, sodержashchikh sushchestvennyuyu lineynuyu funktsiyu i funktsiyu vida $x_1^a \& x_2^b$ [On asymptotically optimal on reliability circuits in bases containing an essential linear function and a function of the form $x_1^a \& x_2^b$]. XVI Int. Conf. "Problems of Theoretical Cybernetics" (Nizhny Novgorod, 20–25 June 2011), Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod State Univ., 2011, pp. 33–37. (in Russian)
 14. Gavrilov G. P. and Sapozhenko A. A. Zadachi i uprazhneniya po diskretnoy matematike [Tasks and Exercises in Discrete Mathematics]: tutorial, 3rd ed., revised. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 416 p. (in Russian)
 15. Alekhina M. A. and Vasin A. V. On bases with unreliability coefficient 2. Math. Notes, 2014, vol. 93, no. 2, pp. 147–173.
 16. Alekhina M. A., Gussykina Yu. S. and Shornikova T. A. Upper estimate of unreliability of schemes in full finite basis (in P_2) for arbitrary faults of gates. Russian Mathematics, 2017, vol. 61, no. 12, pp. 70–72.
 17. Alekhina M. A. O nadezhnosti skhem v polnom konechnom bazise, sodержashchem lineynuyu funktsiyu dvukh peremennykh i obobshchennuyu diz'yunktsiyu [On the reliability of circuits in a complete finite basis containing a linear function of two variables and a generalized disjunction]. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Povolzhskiy Region. Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2019, no. 1, pp. 64–73. (in Russian)
 18. Alekhina M. A. and Gussykina Yu. S. and Shornikova T. A. O nadezhnosti skhem pri neispravnostyakh tipa 0 na vykhodakh elementov v polnom konechnom bazise, sodержashchem osobennuyu funktsiyu [On the reliability of circuits in case of faults of type 0 at the outputs of elements in the complete finite basis, containing a special function]. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 2019, no. 6, pp. 85–88. (in Russian)
 19. Alekhina M. A. and Pichugina P. G. O nadezhnosti dvoystvennykh skhem v polnom konechnom bazise [On the reliability of dual circuits in the complete finite basis]. XVIII Int. School-Seminar "Synthesis and Complexity of Control Systems" (Penza, 28 Sept.–3 Oct. 2009), Moscow, Faculty of Mechanics and Mathematics of Moscow State University, 2009, pp. 10–13. (in Russian)