

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УДК 519.17

СРАВНЕНИЕ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ ГАМИЛЬТОНОВОСТИ
ГРАФА, ОСНОВАННЫХ НА СТЕПЕНЯХ ВЕРШИН

М. Б. Абросимов

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия*

Для всех графов с числом вершин до 12 сравниваются наиболее популярные достаточные условия гамильтоновости, основанные на степенях вершин графа: теоремы Дирака, Оре, Поша, Хватала и Бонди — Хватала. Для каждого условия подсчитано число графов, ему удовлетворяющих. Наилучшие результаты показывает достаточное условие гамильтоновости, предложенное Бонди и Хваталом в 1976 г., — этому условию удовлетворяют около 90 % гамильтоновых графов.

Ключевые слова: гамильтонов граф, теорема Дирака, теорема Оре, теорема Поша, теорема Хватала, теорема Бонди — Хватала, FHCP.

DOI 10.17223/20710410/45/6

COMPARISON OF SUFFICIENT DEGREE BASED CONDITIONS FOR
HAMILTONIAN GRAPH

M. B. Abrosimov

*Saratov State University, Saratov, Russia***E-mail:** mic@rambler.ru

A graph G is said to be Hamiltonian if it contains a spanning cycle, i.e. a cycle that passes through all of its vertices. The Hamiltonian cycle problem is NP-complete, and many sufficient conditions have been found after the first sufficient condition proposed by Dirac in 1952. In this paper for all graphs with a number of vertices up to 12, the most popular sufficient degree based conditions for Hamiltonian graph are compared: theorems by Dirac, Ore, Posa, Chvatal and Bondy-Chvatal. The number of graphs which satisfy each condition is counted. With the number of vertices from 3 to 12, the number of graphs satisfying the Dirac condition is 1, 3, 3, 19, 29, 424, 1165, 108376, 868311, 495369040; the number of graphs satisfying the Ore condition is 1, 3, 5, 21, 68, 503, 4942, 128361, 5315783, 575886211; the number of graphs satisfying the Posa condition is 1, 3, 6, 31, 190, 2484, 53492, 2683649, 216082075, 40913881116; the number of graphs satisfying the Chvatal condition is 1, 3, 6, 34, 194, 2733, 54435, 2914167, 218674224, 43257613552 and the number of graphs satisfying the Bondy — Chvatal condition is 1, 3, 7, 45, 352, 5540, 157016, 8298805, 802944311, 141613919605. This result is the best one: about 90 % of the Hamiltonian graphs satisfy condition proposed by Bondy and Chvatal in 1976. The FHCP Challenge Set is a collection of 1001 instances of the Hamiltonian Cycle Problem, ranging in size from 66 vertices

up to 9528. All graphs from the FHCP Challenge Set were checked whether they satisfy considered conditions. It turned out that 11 graphs satisfy the Bondy — Chvatal condition: no. 59 (with 400 vertices), no. 72 (460), no. 79 (480), no. 84 (500), no. 90 (510), no. 96 (540), no. 128 (677), no. 134 (724), no. 150 (823), no. 162 (909), and no. 188 (with 1123 vertices). For these graphs we can check and find Hamiltonian cycle using Bondy — Chvatal's theorem with computational complexity $O(n^4)$ where n is the number of graph vertices.

Keywords: *Hamiltonian graph, Dirac's theorem, Ore's theorem, Posa's theorem, Chvatal's theorem, theorem by Bondy and Chvatal.*

Введение

В 1859 г. ирландский математик сэр Уильям Роуэн Гамильтон предложил игру, в которой требовалось найти обход додекаэдра по его ребрам с возвратом в исходную точку. В его честь позднее был назван соответствующий обход графа: гамильтоновым циклом называется остовный цикл в графе, то есть цикл, проходящий по всем вершинам графа. Граф, содержащий гамильтонов цикл, называется гамильтоновым. В 1952 г. Г. Дирак предложил достаточное условие гамильтоновости графа: если степень каждой вершины не меньше половины от общего числа вершин, то такой граф является гамильтоновым. Очевидно, что количество рёбер в графе, удовлетворяющем условию Дирака, должно быть достаточно большим. Впоследствии было получено много различных условий гамильтоновости, из которых большую группу образуют так называемые условия типа Дирака или достаточные условия, сформулированные в терминах степеней вершин графа. Задача проверки гамильтоновости графа является NP-полной, поэтому эффективного алгоритма для её решения неизвестно. Это приводит к тому, что количество различных достаточных условий гамильтоновости продолжает увеличиваться. Зачастую по формулировке условий оценить эффективность того или иного утверждения представляется сложным. Под эффективностью достаточного условия будем понимать число гамильтоновых графов, удовлетворяющих этому условию.

В работе рассматривается эффективность достаточных условий гамильтоновости, которые чаще всего встречаются в литературе по теории графов: теоремы Дирака [1], Оре [2, 3], Поша [4], Хватала [5] и Бонди — Хватала [6]. Обзоры по другим достаточным условиям гамильтоновости можно найти в работах [7–10].

Напомним, что простым неориентированным графом (далее — просто графом) называется пара $G = (V, \alpha)$, где α — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V , называемое отношением смежности. Если $(u, v) \in \alpha$, то говорят, что вершины u и v смежны и эти вершины соединены ребром (u, v) . При этом (u, v) и (v, u) — это одно и то же ребро, которое обозначают $\{u, v\}$. Говорят, что ребро $\{u, v\}$ инцидентно каждой из вершин u и v , и эти вершины называются концевыми вершинами или концами ребра $\{u, v\}$. Степенью вершины v в графе G будем называть количество вершин в G , смежных с v , и обозначать через $d(v)$. Число вершин и рёбер в графе будем обозначать n и m соответственно. Основные определения даются по работе [11].

1. Достаточные условия гамильтоновости

В 1952 г. Г. Дирак предложил первое достаточное условие гамильтоновости графа.

Теорема 1 (Г. Дирак, 1952 [1]). Если в графе G с числом вершин $n \geq 3$ степень любой вершины $d(u) \geq n/2$, то граф G гамильтонов.

Граф, который удовлетворяет условию теоремы Дирака, будем называть графом Дирака. Минимальные по числу вершин гамильтоновы графы, которые не являются графами Дирака, — это пять 5-вершинных графов с векторами степеней $(2, 2, 2, 2, 2)$, $(3, 3, 2, 2, 2)$, $(4, 3, 3, 2, 2)$, $(4, 4, 3, 3, 2)$, $(3, 3, 3, 3, 2)$. Первые три графа представлены на рис. 1. Вычислительная сложность проверки условия в теореме Дирака составляет $O(n + m)$.

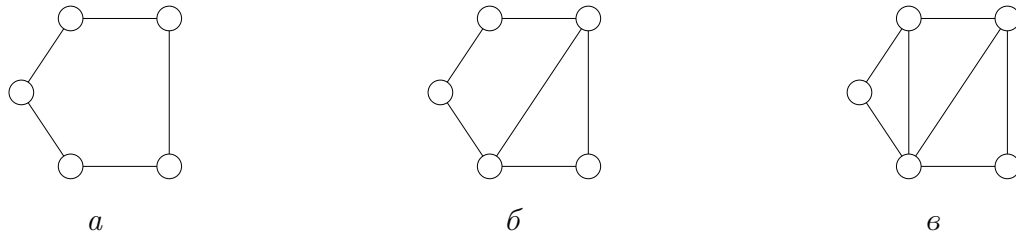


Рис. 1. Гамильтоновы графы, не являющиеся графами Оре

Теорема 2 (О. Оре, 1960 [2]). Если в графе G с числом вершин $n \geq 3$ для любых двух несмежных вершин u и v выполняется неравенство $d(u) + d(v) \geq n$, то граф G гамильтонов.

Граф, который удовлетворяет условию теоремы Оре, будем называть графом Оре. Легко видеть, что теорема 1 является следствием теоремы 2, то есть графы Дирака являются и графами Оре. Минимальные по числу вершин гамильтоновы графы, которые не являются графами Оре, — это три 5-вершинных графа (рис. 1). Вычислительная сложность проверки условия в теореме Оре составляет $O(n^2)$.

Оре предложил ещё одно достаточное условие:

Теорема 3 (О. Оре, 1961 [3]). Если в графе G с числом вершин $n \geq 3$ число рёбер $m \geq (n^2 - 3n + 6)/2$, то граф G гамильтонов.

Это условие существенно слабее основной теоремы Оре и теоремы Дирака, а минимальный по числу вершин граф, который не удовлетворяет условию теоремы 3, — это 4-вершинный цикл C_4 .

Теорема 4 (Л. Поша, 1962 [4]). Если граф G с числом вершин $n \geq 3$ и степенной последовательностью $d_1 \leq \dots \leq d_n$ удовлетворяет следующим двум условиям, то он гамильтонов:

- 1) для всякого k , $1 \leq k < (n - 1)/2$, число вершин со степенями, меньшими или равными k , меньше, чем k ;
- 2) для нечётного n число вершин со степенями, меньшими или равными $(n - 1)/2$, не превосходит $(n - 1)/2$.

Граф, который удовлетворяет условию теоремы Поша, будем называть графом Поша. Теорема 2 является следствием теоремы 4, то есть графы Оре являются и графами Поша. Минимальные по числу вершин гамильтоновы графы, которые не являются графами Поша, — это два 5-вершинных графа с векторами $(2, 2, 2, 2, 2)$ и $(3, 3, 2, 2, 2)$ (рис. 1, а и б). Граф на рис. 1, в с вектором степеней $(4, 3, 3, 2, 2)$ является минимальным по числу вершин графом Поша, который не является графом Оре. Вычислительная сложность проверки условия в теореме Поша составляет $O(n + m)$. Достаточно часто теорема Поша встречается в следующей упрощённой формулировке:

Теорема 5 (Л. Поша, 1962 [4]). Если граф G с числом вершин $n \geq 3$ и степенной последовательностью $d_1 \leq \dots \leq d_n$ удовлетворяет следующему условию, то он

гамильтонов: для всякого k , $1 \leq k \leq n/2$, число вершин со степенями, меньшими или равными k , меньше, чем k .

Как будет видно дальше, теорема 5 при нечётном числе вершин существенно ухудшает теорему 4, а минимальным по числу вершин графом Поша, который не удовлетворяет теореме 5, является граф на рис. 1, в с вектором степеней $(4, 3, 3, 2, 2)$.

Теорема 6 (В. Хватал, 1972 [5]). Если граф G с числом вершин $n \geq 3$ и степенной последовательностью $d_1 \leq \dots \leq d_n$ удовлетворяет следующему условию, то он гамильтонов: для любого k верна импликация $(d_k \leq k < n/2) \Rightarrow (d_{n-k} \geq n - k)$.

Граф, который удовлетворяет условию теоремы Хватала, будем называть графом Хватала. Минимальные по числу вершин гамильтоновы графы, которые не являются графами Хватала, — это два 5-вершинных графа с векторами $(2, 2, 2, 2, 2)$ и $(3, 3, 2, 2, 2)$ (рис. 1, а и б). Теорема 5 является следствием теоремы 6, то есть графы Поша являются и графами Хватала. Минимальные по числу вершин графы Хватала, которые не являются графами Поша, — это два 6-вершинных графа с векторами степеней $(4, 4, 4, 4, 2, 2)$ и $(5, 4, 4, 3, 2, 2)$ (рис. 2). Вычислительная сложность проверки условия в теореме Хватала составляет $O(n + m)$.



Рис. 2. Графы Хватала, не являющиеся графами Поша

Для формулировки следующего результата дадим определение замыкания графа.

Определение 1. Замыкание $[G]$ n -вершинного графа G получается из графа G добавлением рёбер $\{u, v\}$ для всех пар вершин u и v , для которых выполняется условие $d(u) + d(v) \geq n$.

Теорема 7 (Дж. Бонди, В. Хватал, 1976 [6]). Граф G является гамильтоновым тогда и только тогда, когда его замыкание $[G]$ является гамильтоновым.

Построение замыкания графа имеет вычислительную сложность $O(n^4)$ [6]. Обычно теорема Бонди — Хватала используется в форме следующего достаточного условия гамильтоновости.

Теорема 8 (Дж. Бонди, В. Хватал, 1976 [6]). Если замыкание $[G]$ графа G является полным графом, то граф G гамильтонов.

Граф, который удовлетворяет достаточному условию теоремы Бонди — Хватала, будем называть графом Бонди — Хватала. Минимальным по числу вершин гамильтоновым графом, который не является графом Бонди — Хватала, является цикл C_5 (рис. 1, а). Теорема 6 является следствием теоремы 8, то есть графы Хватала являются и графами Бонди — Хватала. Минимальный по числу вершин граф Бонди — Хватала, который не является графом Хватала, — это 5-вершинный граф с вектором степеней $(3, 3, 2, 2, 2)$ (рис. 1, б). Очевидно, что если в n -вершинном графе G все вершины имеют степень $d(v) < n/2$, то замыкание $[G]$ изоморфно самому графу G . Заметим, что любой цикл с числом вершин $n > 4$ не удовлетворяет условию Бонди — Хватала. Если граф удовлетворяет условию Бонди — Хватала, то можно построить и соответствующий гамильтонов цикл с вычислительной сложностью $O(n^3)$ [6].

2. Вычислительный эксперимент

В книгах по теории графов традиционно встречаются различные вариации теорем 1–8. Например, в [11] доказывается теорема Поша, а следствиями из неё выводятся теоремы Оре и Дирака. В [12] доказывается теорема Хватала, а следствием — теорема Дирака. В [13–15] доказывается теорема Хватала, а следствиями — теоремы Оре и Дирака. В [16] доказываются теоремы Оре, Дирака, Хватала и Бонди — Хватала. Интерес представляет то, насколько сильно каждый последующий результат улучшает предыдущий, а также насколько широко каждый результат охватывает всю совокупность гамильтоновых графов с заданным числом вершин. Некоторые условия на практике оказываются совсем малоэффективными [17].

Проведён вычислительный эксперимент по проверке условий теорем 1–6 и 8 для графов с числом вершин до 12. Для генерации графов использовалась программа `geng` из пакета `nauty`, разработанного Бренданом МакКеем [18]. Программа получает на вход целое число n , а результатом её работы являются все неизоморфные графы с заданным числом вершин n . Если дополнительно указать ключ `-s`, то будут построены только связные графы, а с ключом `-C` — только двусвязные. Напомним, что связный граф называется двусвязным, если в нём нет вершины, после удаления которой граф перестаёт быть связным. Так как все гамильтоновы графы являются двусвязными [11], то достаточно строить только их. Вычисления проводились с использованием кластера высокопроизводительных вычислений ПРЦ НИТ СГУ.

В табл. 1 приведены данные по количеству простых неориентированных графов с заданным числом вершин n , связных, двусвязных и гамильтоновых. Эти данные согласовываются с известными (последовательности A000088, A001349, A002218 и A003216 [19]). В табл. 2 приводятся эти же данные в процентах от общего числа графов с заданным числом вершин.

Т а б л и ц а 1

Количество связных, двусвязных и гамильтоновых графов

n	Всего	Связных	Двусвязных	Гамильтоновых
3	4	3	1	1
4	11	6	3	3
5	34	21	10	8
6	156	112	56	48
7	1044	853	468	383
8	12346	11117	7123	6196
9	274668	261080	194066	177083
10	12005168	11716571	9743542	9305118
11	1018997864	1006700565	900969091	883156024
12	165091172592	164059830476	153620333545	152522187830

В табл. 3 приводятся данные по числу графов Дирака, Оре, Поша, Хватала и Бонди — Хватала, а в табл. 4 — эти же данные в процентах от общего числа гамильтоновых графов с заданным числом вершин. Последней строкой в табл. 3 указана вычислительная сложность соответствующего достаточного условия. Количество графов Оре с числом вершин до 10 представлено в OEIS (последовательность A264683 [19]).

Можно заметить, что теорема Оре значительно сильнее теоремы Дирака, особенно для нечётного числа вершин. Теоремы Поша и Хватала существенно усиливают теоремы Дирака и Оре, но между собой они отличаются не столь сильно. Наконец, теорема

Таблица 2

**Количество связных, двусвязных и гамильтоновых графов
в процентах**

n	Всего	Связных, %	Двусвязных, %	Гамильтоновых, %
3	4	75	25	25
4	11	54,55	27,27	27,27
5	34	61,76	29,41	23,53
6	156	71,79	35,90	30,77
7	1044	81,70	44,83	36,69
8	12346	90,05	57,69	50,19
9	274668	95,05	70,65	64,47
10	12005168	97,60	81,16	77,51
11	1018997864	98,79	88,42	86,67
12	165091172592	99,38	93,05	92,39

Таблица 3

Количество графов Дирака, Оре, Поша, Хватала и Бонди — Хватала

n	Дирак	Оре	Поша	Хватал	Бонди — Хватал
3	1	1	1	1	1
4	3	3	3	3	3
5	3	5	6	6	7
6	19	21	31	34	45
7	29	68	190	194	352
8	424	503	2484	2733	5540
9	1165	4942	53492	54435	157016
10	108376	128361	2683649	2914167	8298805
11	868311	5315783	216082075	218674224	802944311
12	495369040	575886211	40913881116	43257613552	141613919605
Сложность	$O(n + m)$	$O(n^2)$	$O(n + m)$	$O(n + m)$	$O(n^4)$

Таблица 4

**Количество графов Дирака, Оре, Поша, Хватала
и Бонди — Хватала в процентах**

n	Гамильтоновых	Дирак	Оре	Поша	Хватал	Бонди — Хватал
3	1	100	100	100	100	100
4	3	100	100	100	100	100
5	8	37,50	62,50	75,00	75,00	87,50
6	48	39,58	43,75	64,58	70,83	93,75
7	383	7,57	17,75	49,61	50,65	91,91
8	6196	6,84	8,12	40,09	44,11	89,41
9	177083	0,66	2,79	30,21	30,74	88,67
10	9305118	1,16	1,38	28,84	31,32	89,19
11	883156024	0,10	0,60	24,47	24,76	90,92
12	152522187830	0,32	0,38	26,82	28,36	92,85

Бонди — Хватала намного улучшает теоремы Поша и Хватала, причём покрывает около 90 % гамильтоновых графов.

В табл. 5 приводятся данные по числу графов, удовлетворяющих условиям Оре из теорем 2 и 3, а также условиям Поша из теорем 4 и 5. Можно заметить, что при чётном числе вершин теорема 5 существенно ухудшает теорему 4. Число графов, удовлетворяющих теореме 3, чрезвычайно мало даже по сравнению с числом графов Дирака.

Т а б л и ц а 5
Количество графов, удовлетворяющих условиям
из теорем 2–5

n	Теорема 2	Теорема 3	Теорема 4	Теорема 5
3	1	1	1	1
4	3	2	3	3
5	5	4	6	5
6	21	9	31	31
7	68	19	190	134
8	503	44	2484	2484
9	4942	108	53492	33869
10	128361	277	2683649	2683649
11	5315783	752	216082075	132370005
12	575886211	2179	40913881116	40913881116

Заключение

На основании исследования всех графов с числом вершин до 12 (более 166 миллиардов) можно сделать следующие выводы. Наилучшим из рассмотренных достаточных условий гамильтоновости графа является теорема Бонди — Хватала, которая, имея вычислительную сложность $O(n^4)$, позволяет установить гамильтоновость примерно 90 % графов. Из более простых условий можно использовать теоремы Поша или Хватала, которые имеют вычислительную сложность $O(n + m)$ и позволяют установить гамильтоновость более 25 % графов.

Рассмотренные достаточные условия позволяют установить гамильтоновость графа за полиномиальное время, если в нём достаточно большое число рёбер. В случае произвольного графа проверка графа на гамильтоновость является NP-полной задачей, которая сводится к перебору различных вариантов построения гамильтонового цикла. Разработка алгоритмов, которые могут определить гамильтоновость графа с большим числом вершин, представляет большой интерес. В таких алгоритмах применяются различные эвристики, которые позволяют уменьшить перебор [20]. Для оценки эффективности используются различные классы графов, например обобщённые графы Петерсена или специально составленные библиотеки сложных задач, например TSPLIB [21].

В 2015 г. был объявлен конкурс «FHCP Challenge Set», в рамках которого за один год требовалось найти гамильтоновы циклы в заданном наборе из 1001 специально подобранного графа с числом вершин от 66 до 9528 [20]. Победителям удалось справиться с 985 графами.

В рамках описываемого вычислительного эксперимента были проверены все 1001 граф из набора FHCP на предмет того, удовлетворяют ли они каким-либо из рассмотренных достаточных условий. Оказалось, что 11 графов удовлетворяют условию Бонди — Хватала: № 59 (400 вершин), № 72 (460), № 79 (480), № 84 (500), № 90 (510), № 96 (540), № 128 (677), № 134 (724), № 150 (823), № 162 (909) и № 188 (1123 вершин). Это позволяет достаточно быстро найти гамильтонов цикл в указанных графах (за $O(n^4)$ выполняется построение замыкания и проверка условия Бонди — Хватала, дополнительно за $O(n^3)$ выполняется построение гамильтонова цикла). Остальным достаточным условиям, которые рассмотрены в работе, графы из набора FHCP не удовлетворяют. В табл. 6 для каждого из перечисленных графов указывается его номер в наборе FHCP, число вершин n и рёбер m , максимальная степень вершины Δ и минимальная степень вершины δ .

Т а б л и ц а 6

№ П/П	n	m	Δ	δ
59	400	40001	362	323
72	460	52901	268	134
79	480	57601	420	455
84	500	62501	200	387
90	510	65026	235	287
96	540	72901	474	458
128	677	114583	585	77
134	724	131045	312	206
150	823	169333	744	479
162	909	206571	274	195
188	1123	315283	908	2

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dirac G. A.* Some theorems on abstract graphs // Proc. London Math. Soc. 1952. V. 2. P. 69–81.
2. *Ore O.* Note on Hamilton circuits // Amer. Math. Monthly. 1960. V. 67. P. 55.
3. *Ore O.* Arc coverings of graphs // Ann. Mat. Pura Appl. 1961. V. 55. P. 315–322.
4. *Posa L.* On the circuits of finite graphs // Magyar Tud. Akad. Mat. Kutatd Int. Kozl. 1963. V. 8. P. 355–361.
5. *Chvatal V.* On Hamilton's ideals // J. Combin. Theory. 1972. V. 12. P. 163–168.
6. *Bondy J. A. and Chvatal V.* A method in graph theory // Discr. Math. 1976. V. 15. Iss. 2. P. 111–135.
7. *Gould R. J.* Updating the Hamiltonian problem — A survey // J. Graph Theory. 1991. V. 15. No. 2. P. 121–157.
8. *Gould R. J.* Advances on the Hamiltonian problem — A survey // Graphs and Combinatorics. 2003. V. 19. P. 7–52.
9. *DeLeon M.* A study of sufficient conditions for Hamiltonian cycles // Rose — Hulman Undergraduate Mathematics J. 2000. V. 1. Iss. 1. Article 6. P. 129–145.
10. *Li H.* Generalizations of Diracs theorem in Hamiltonian graph theory — A survey // Discr. Math. 2013. V. 313. P. 2034–2053.
11. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.
12. *Diestel R.* Graph Theory. Heidelberg: Springer Verlag, 2017. 447 p.
13. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990. 384 с.
14. *Асанов М. О., Баранский В. А., Расин В. В.* Дискретная математика. Графы, матроиды, алгоритмы. Ижевск: НИЦ «РХД», 2001. 288 с.
15. *Касьянов В. Н., Евстигнеев В. А.* Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. СПб.: БХВ-Петербург, 2003. 1104 с.
16. *Омельченко А. В.* Теория графов. М.: МЦНМО, 2018. 416 с.
17. *Абросимов М. Б.* О достаточном условии Гудмана — Хедетниemi гамильтоновости графа // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18. Вып. 3. С. 347–353.
18. *McKay B. D. and Piperno A.* Practical graph isomorphism. II // J. Symbolic Computation. 2014. No. 60. P. 94–112.
19. <http://oeis.org> — The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, 2018.
20. *Haythorpe M.* FHCP Challenge Set: The first set of structurally difficult instances of the Hamiltonian cycle problem // Bulletin of the ICA. 2018. V. 83. P. 98–107.

21. *Reinelt G.* <http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/> — TSPLIB, 2018.

REFERENCES

1. *Dirac G. A.* Some theorems on abstract graphs. Proc. London Math. Soc., 1952, vol. 2, pp. 69–81.
2. *Ore O.* Note on Hamilton circuits. Amer. Math. Monthly, 1960, vol. 67, p. 55.
3. *Ore O.* Arc coverings of graphs. Ann. Mat. Pura Appl., 1961, vol. 55, pp. 315–322.
4. *Posa L.* On the circuits of finite graphs. Magyar Tud. Akad. Mat. Kutatd Int. Kozl., 1963, vol. 8, pp. 355–361.
5. *Chvatal V.* On Hamilton's ideals. J. Combin. Theory, 1972, vol. 12, pp. 163–168.
6. *Bondy J. A. and Chvatal V.* A method in graph theory. Discr. Math., 1976, vol. 15, iss. 2, pp. 111–135.
7. *Gould R. J.* Updating the Hamiltonian problem — A survey. J. Graph Theory, 1991, vol. 15, no. 2, pp. 121–157.
8. *Gould R. J.* Advances on the Hamiltonian problem — A survey. Graphs and Combinatorics, 2003, vol. 19, pp. 7–52.
9. *DeLeon M.* A study of sufficient conditions for Hamiltonian cycles. Rose — Hulman Undergraduate Mathematics J., 2000, vol. 1, iss. 1, article 6, pp. 129–145.
10. *Li H.* Generalizations of Diracs theorem in Hamiltonian graph theory — A survey. Discr. Math., 2013, vol. 313, pp. 2034–2053.
11. *Harary F.* Теория графов [Graph theory]. Moscow, Mir Publ., 1973. 300 p. (in Russian)
12. *Diestel R.* Graph Theory. Heidelberg, Springer Verlag, 2017. 447 p.
13. *Emelichev V. A., Melnikov O. I., Sarvanov V. I., and Tyshkevich R. I.* Лекции по теории графов [Lectures on Graph Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 384 p. (in Russian)
14. *Asanov M. O., Baranskij V. A., and Rasin V. V.* Дискретная математика. Графы, матроиды, алгоритмы [Discrete Mathematics: Graphs, Matroids, Algorithms]. Izhevsk, NIC RHD Publ., 2001. 288 p. (in Russian)
15. *Kasyanov V. N. and Evstigneev V. A.* Графы в программировании: обработка, визуализация и применение [Graphs in Programming: Processing, Visualization and Application]. SPb., BHV-Peterburg Publ., 2003. 1104 p. (in Russian)
16. *Omelchenko A. V.* Теория графов [Graph Theory]. Moscow, MCCME Publ., 2018. 416 p. (in Russian)
17. *Abrosimov M. B.* On a Goodman — Hedetniemi sufficient condition for the graph hamiltonicity. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., 2018, vol. 18, iss. 3, pp. 347–353 (in Russian).
18. *McKay B. D. and Piperno A.* Practical graph isomorphism, II. J. Symbolic Computation, 2014, no. 60, pp. 94–112.
19. <http://oeis.org> — The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, 2018.
20. *Haythorpe M.* FHCP Challenge Set: The first set of structurally difficult instances of the Hamiltonian cycle problem. Bulletin of the ICA, 2018, vol. 83, pp. 98–107.
21. *Reinelt G.* <http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/> — TSPLIB, 2018.