МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ СИСТЕМ

УДК 519.81

НЕПРОТИВОРЕЧИВОЕ АГРЕГИРОВАНИЕ ОТНОШЕНИЙ КВАЗИПОРЯДКА

В. Н. Нефёдов, С. О. Смерчинская, Н. П. Яшина

Московский авиационный институт, г. Москва, Россия

Работа относится к разделу «Групповой выбор» математической теории принятия решений. Предлагается методика непротиворечивого агрегирования отношений квазипорядка, основанная на построении нагруженного мажоритарного графа. Веса на дугах графа характеризуют степень превосходства одной альтернативы над другой и используются для разрушения противоречивых контуров, при этом сохраняются контуры, содержащие равноценные альтернативы. Удаление из контуров дуг минимального веса позволяет построить непротиворечивое отношение, учитывающее предпочтения большинства экспертов. Разработан алгоритм упорядочения альтернатив на основе отношения квазипорядка. Все процедуры могут быть использованы и при многокритериальном выборе в случае задания вербальной информации о попарном сравнении альтернатив по критериям качества.

Ключевые слова: *групповой выбор, мажоритарный граф, агрегированное отношение, квазипорядок, минимальное расстояние, противоречивый контур, уровни предпочтения.*

DOI 10.17223/20710410/45/13

NON-CONTRADICTORY AGGREGATION OF QUASI-ORDER RELATIONS

V. N. Nefedov, S. O. Smerchinskaya, N. P. Yashina

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia

E-mail: svetlana_os@mail.ru

The paper belongs to the “Collective choice” section of the mathematical theory of decision-making. A method for non-contradictory aggregation of expert preferences given by quasi-order relations is proposed. The aggregated relation is built according to the rule of “the majority of experts”, which satisfies the condition of the minimum distance from expert preferences. Let the expert preferences profile be given by the quasi-order relations $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ on the set of alternatives $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Relations will be given by the preference matrices $P^1, P^2, \ldots, P^m$ and the vertex adjacency matrices $R^1, R^2, \ldots, R^m$ of the corresponding digraphs. The preference matrix, in contrast to the adjacency matrix, contains elements $1/2$ for equivalent alternatives. The algorithm for constructing a non-contradictory aggregate relation contains the following steps.

1. Construction of a weighted majority digraph $G = \langle A, \rho_\Sigma \rangle$. The adjacency matrix $R_\Sigma = \|r_{ij}^\Sigma\|$ of the majority digraph is constructed on the basis of the matrix of total preferences $P_\Sigma = \sum\limits_{k=1}^{m} P^k$ according to the majority rule

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } p_{ij} \geqslant p_{ji}, \\ 0, & \text{if } p_{ij} < p_{ji}, \end{cases} \text{ where } p_{ij} \text{ are the elements of the matrix } P_\Sigma.$$

The weights on the digraph arcs $l_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{m} (p_{ij}^k - p_{ji}^k)$ characterize the degree of superiority of alternative a_i over a_j and are used to destroy contradictory cycles ($P^k = \|p_{ij}^k\|$; $i, j = 1, \ldots, n$).
2. The destruction of contradictory cycles. Arcs are removed from the cycles that have a minimum weight (with minimal advantage in expert preferences) and belong to the asymmetric part of the relation. In this case, arcs connecting equivalent alternatives are saved. We get a digraph $G' = \langle A, \rho \rangle$, R is the adjacency matrix.
3. Construction of aggregated quasi-order $\widehat{\rho}$. The adjacency matrix of an aggregate quasi-order is found by the formula $\widehat{R} = E \vee \operatorname{Tr} R$, where $\operatorname{Tr} R$ is the adjacency matrix of the transitive closure of the relation ρ without contradictory cycles.
The propositions about the uniqueness and non-contradictory of the constructed aggregated relation $\widehat{\rho}$ are proved. The computational complexity of the algorithm is $\mathrm{O}(n^3)$. Based on the constructed aggregated quasi-order relation, the ranking of alternatives is carried out. For this purpose, an algorithm for constructing digraph preference levels has been developed. The algorithm is based on the Demukron procedure of partitioning a digraph without contours into levels $N_0, N_1, \ldots, N_t$, where

$$N_0 = \{a_i : a_i \in A,\ \Gamma a_i = \varnothing\};\ N_k = \{a_i : a_i \in A \setminus \bigcup_{j=0}^{k-1} N_j,\ \Gamma a_i \subseteq \bigcup_{j=0}^{k-1} N_j\},\ k = 1, \ldots, t.$$

The propositions that allow to modify the Demukron procedure for partitioning into preference levels of an arbitrary digraph are proved. In this case, the condition that equivalent alternatives belong to the same level of preference is satisfied. Using this algorithm, it is possible in particular to build a nonstrict ranking of alternatives. The developed technique can be used to solve multi-criteria problems in case of verbal information about pairwise comparison of alternatives according to the quality criteria.

Keywords: *collective choice, weighted majority graph, aggregated relation, quasi-order, contradictory cycle, preference levels.*

Введение

При принятии сложных решений часто требуется агрегировать информацию о попарном сравнении альтернатив. Традиционно эти задачи относились к разделу «Групповой выбор»: исходная информация задаётся в результате опроса группы экспертов — квалифицированных специалистов в данной предметной области. В последнее время широкое распространение получили алгоритмы многокритериального выбора, использующие вербальную информацию о сравнении альтернатив по критериям качества [1]. И в том и в другом случае информация о предпочтениях на множестве альтернатив задаётся их попарным сравнением, а в алгоритмах принятия решений используется в виде бинарных отношений.

Методы группового выбора, такие, как процедуры Борда, Коупленда, Кемени и многие другие [2], в качестве входной информации используют только частный случай бинарных отношений — ранжирование альтернатив. Но при решении практических задач, особенно с большим числом альтернатив, не всегда удаётся найти экспертов, подробно знакомых с каждым вариантом. Целесообразнее потребовать от специалистов не ранжировать, а только сравнить между собой известные им альтернативы.

В работе [3] предлагается процедура построения мажоритарного графа, позволяющая в качестве исходных использовать произвольные бинарные отношения, что значительно расширяет круг рассматриваемых задач. Мажоритарный граф, построенный по правилу большинства, удовлетворяет требованиям к групповым решениям: сохранение отношения Парето, монотонность, независимость, ненавязанность — и при этом наиболее полно учитывает мнения экспертов. Основным недостатком является то, что мажоритарный граф с большой вероятностью не транзитивен и может содержать контуры, а это затрудняет выбор наилучших альтернатив.

Ещё Ж.-А. Кондорсе (см. [4]) разработал алгоритм построения агрегированного ранжирования, соответствующего пути максимальной длины в нагруженном орграфе. Если в графе существует контур, то Кондорсе разрушает его по «слабому звену», удаляя дугу с минимальным весом, т. е. дугу с минимальной разностью в предпочтениях экспертов. Но П. Янг привёл пример, в котором уже для четырёх альтернатив путь с наибольшей длиной содержит удалённую дугу.

Принцип построения непротиворечивого группового решения путём разрушения контуров используется в [5]. При этом в качестве критерия приближённости агрегированного отношения к исходным берётся суммарное расстояние до экспертных предпочтений [6]. В [5] предложена процедура непротиворечивого агрегирования бинарных отношений строгого порядка. Метод основан на предварительном построении мажоритарного графа, но позволяет получить транзитивное и не содержащее контуров агрегированное отношение. Данная работа является продолжением и в некоторой степени обобщением этого исследования. При задании исходных предпочтений отношениями строгого порядка не учитывается возможность наличия равноценных альтернатив. Равноценные варианты решений наряду со строгим предпочтением одной альтернативы над другой допускает отношение квазипорядка. Квазипорядок — рефлексивное и транзитивное отношение — является обобщением частичного порядка и эквивалентности [7]. В этой работе отношения квазипорядка выбраны в качестве экспертных предпочтений и группового решения. Как и в [5], метод агрегирования экспертных предпочтений основывается на предварительном построении нагруженного мажоритарного графа. Разработана процедура нахождения транзитивного агрегированного предпочтения с учётом особенностей отношения квазипорядка. Она основана на разрушении противоречивых контуров в мажоритарном графе, при этом контуры, содержащие только равноценные альтернативы, сохраняются. Предлагается также алгоритм упорядочения альтернатив по уровням предпочтения, который, в частности, позволяет построить их нестрогое ранжирование.

1. Постановка задачи

Рассматривается множество альтернатив $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и множество экспертов $E = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$. Профиль индивидуальных предпочтений экспертов на множестве A задан отношениями квазипорядка $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$, причём $\langle a_i,\, a_j\rangle \in \rho_t$, $t = 1, \dots, m$, если элемент a_i не более предпочтителен, чем элемент a_j (отношения ρ_t можно выбрать и по-другому: $\langle a_i,\, a_j\rangle \in \rho_t \Leftrightarrow$ элемент a_i не менее предпочтителен, чем элемент a_j, но стандартные процедуры на графах для выбора наилучших альтернатив и их ранжирования (нахождение устойчивых множеств и разбиение вершин на уровни) удобнее реализовывать для отношения «не более предпочтителен»).

Требуется построить агрегированное отношение $\widehat{\rho}$ на множестве A, согласованное с предпочтениями $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ и также являющееся квазипорядком. Напомним, что квазипорядком называется рефлексивное и транзитивное отношение [7].

Бинарное отношение ρ будем задавать матрицей предпочтений и матрицей смежности соответствующего графа $G = \langle A, \rho \rangle$.

Определение 1. Под матрицей предпочтений будем понимать квадратную матрицу $P = \|p_{ij}\|$ порядка n (n — число альтернатив) с элементами

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i \text{ менее предпочтительна, чем } a_j, \\ 1/2, & \text{если } a_i \text{ и } a_j \text{ равноценны,} \\ 0, & \text{если } a_j \text{ менее предпочтительна, чем } a_i, \text{ или } a_i \text{ и } a_j \text{ не сравнимы} \end{cases}$$

при $i \neq j$. Элемент $p_{ii} = 1$ ($i = 1, \ldots, n$), если отношение ρ рефлексивно; в противном случае $p_{ii} = 0$.

Равноценность двух альтернатив a_i и a_j означает, что отношению ρ одновременно принадлежат пары $\langle a_i, a_j \rangle$ и $\langle a_j, a_i \rangle$ ($i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$).

Обозначим $P^1, P^2, \ldots, P^m$ матрицы экспертных предпочтений, где m — число экспертов. Профиль экспертных предпочтений $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ можно также задавать матрицами смежности графов соответствующих отношений. Для отношения квазипорядка матрицы предпочтений и смежности не совпадают. Матрицу смежности можно получить из матрицы предпочтений заменой всех элементов, равных $1/2$, на 1.

2. Построение агрегированного отношения квазипорядка

Потребуем от агрегированного отношения квазипорядка $\widehat{\rho}$, чтобы оно удовлетворяло следующим двум условиям:

1) было непротиворечивым;
2) наиболее полно отражало предпочтения каждого эксперта.

Формализуем условие непротиворечивости отношения с учётом особенностей отношений квазипорядка. Введём понятия симметричной и асимметричной частей отношения. Симметричная часть отношения ρ, заданного на множестве A (обозначается $\operatorname{Sym} \rho$) содержит все такие пары, для которых $\langle a_i, a_j \rangle \in \rho$ и $\langle a_j, a_i \rangle \in \rho$ одновременно ($a_i, a_j \in A$). Асимметричная часть отношения $\operatorname{As} \rho = \rho \setminus \operatorname{Sym} \rho$. Отношение квазипорядка фактически объединяет отношения частичного порядка и эквивалентности, допуская пары из симметричной и асимметричной части [7].

Противоречивость отношения обычно связывают с наличием контуров в его графе [5]. Будем говорить «контур отношения ρ», подразумевая контур соответствующего графа $G = \langle A, \rho \rangle$. Заметим, что множество дуг графа совпадает с множеством упорядоченных пар отношения ρ. Отношение квазипорядка может содержать равноценные альтернативы, следовательно, в нём допускается наличие контуров, полностью принадлежащих симметричной части отношения. Кроме того, отношение квазипорядка содержит петли, так как является рефлексивным. Будем различать противоречивые и непротиворечивые контуры графа.

Определение 2. Контур отношения ρ называется противоречивым, если в нём хотя бы одна пара $\langle a_i, a_j \rangle \in \operatorname{As} \rho$ ($a_i, a_j \in A$).

На рис. 1 изображён непротиворечивый контур: все дуги принадлежат симметричной части отношения и, следовательно, альтернативы a_1, a_2 и a_3 равноценны. Контур на рис. 2 противоречивый: дуга $\langle a_2, a_3\rangle$ принадлежит асимметричной части отношения.

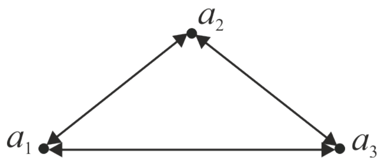

Рис. 1

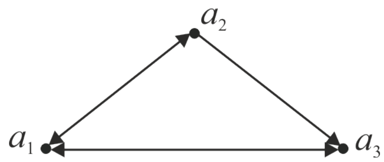

Рис. 2

Определение 3. Отношение ρ называется противоречивым, если оно содержит противоречивый контур.

Таким образом, выполнение условия о непротиворечивости агрегированного отношения означает, что $\widehat{\rho}$ не должно содержать контуров, в которых не все элементы равноценны. Отсутствие таких контуров — необходимое условие для однозначного непустого выбора наилучших альтернатив. Этому условию удовлетворяет отношение квазипорядка.

Лемма 1. Любой контур транзитивного отношения принадлежит симметричной части этого отношения.

Доказательство. Пусть K — контур транзитивного отношения ρ, заданного на множестве A. Покажем, что $K \subseteq \operatorname{Sym}\rho$. Докажем от противного. Пусть существует пара $\langle a_i, a_j\rangle \in (K \cap \operatorname{As}\rho)$, т. е. $\langle a_i, a_j\rangle \in K \subseteq \rho$, но $\langle a_j, a_i\rangle \notin \rho$ $(a_i, a_j \in A)$. Из того, что K — контур и $a_i, a_j \in K$, следует, что существует последовательность пар отношения ρ: $\langle a_j, a_{j_1}\rangle$, $\langle a_{j_1}, a_{j_2}\rangle, \ldots, \langle a_{j_t}, a_i\rangle$. Из транзитивности ρ получим $\langle a_j, a_i\rangle \in \rho$ и, следовательно, $\langle a_i, a_j\rangle \in \operatorname{Sym}\rho$. ■

Утверждение 1. Отношение квазипорядка непротиворечиво.

Доказательство. Следует из того, что отношение квазипорядка по определению транзитивно и, следовательно, по лемме 1 все его контуры принадлежат симметричной части отношения. Таким образом, отношение квазипорядка не может содержать противоречивых контуров, т. е. контуров, содержащих дуги из асимметричной части отношения. ■

Для формализации условия 2 о согласованности агрегированного отношения с экспертными предпочтениями введем понятие расстояния между отношениями.

Определение 4. Расстоянием между двумя отношениями ρ_k и ρ_t назовём величину $\mathrm{d}(\rho_k, \rho_t)$, вычисляемую по формуле

$$\mathrm{d}(\rho_k, \rho_t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |p_{ij}^k - p_{ij}^t|,$$

где p_{ij}^k и p_{ij}^t — элементы матриц предпочтения P^k и P^t.

Под агрегированным отношением, наиболее полно отражающим предпочтения каждого эксперта, будем понимать отношение $\widehat{\rho}$, такое, что сумма расстояний между $\widehat{\rho}$ и отношениями $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ минимальна:

$$D(\widehat{\rho}) = \sum_{t=1}^{m} \mathrm{d}(\widehat{\rho},\ \rho_t) \to \min.$$

Алгоритм нахождения агрегированного отношения квазипорядка основывается на построении нестрогого нагруженного мажоритарного графа.

Определение 5. Нестрогим нагруженным мажоритарным графом назовём ориентированный граф $G = \langle A, \rho_\Sigma \rangle$ с множеством вершин-альтернатив $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и дугами $\rho_\Sigma = \{\langle a_i, a_j \rangle : a_i, a_j \in A$ и $l_{ij} \geqslant 0\}$, где $l_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{m} (p_{ij}^k - p_{ji}^k)$. Каждой дуге $\langle a_i, a_j \rangle \in \rho_\Sigma$ поставим в соответствие вес l_{ij}.

Из определения 5 следует:

$$\begin{aligned} \operatorname{As} \rho_\Sigma =& \{\langle a_i, a_j \rangle : a_i, a_j \in A \text{ и } l_{ij} > 0\}, \\ \operatorname{Sym} \rho_\Sigma =& \{\langle a_i, a_j \rangle : a_i, a_j \in A \text{ и } l_{ij} = l_{ji} = 0\}. \end{aligned}$$

Нестрогий нагруженный мажоритарный граф может содержать дуги с нулевым весом: они соединяют равноценные альтернативы. Это позволит включить равноценные альтернативы и в искомое отношение квазипорядка. Матрицу смежности нагруженного мажоритарного графа $G = \langle A, \rho_\Sigma \rangle$ обозначим R_Σ.

Зададим матрицу весов $C = \|c_{ij}\|$ порядка n, где n — число альтернатив и

$$c_{ij} = \begin{cases} l_{ij}, & \text{если } \langle a_i, a_j \rangle \in \rho_\Sigma, \\ \infty & \text{иначе.} \end{cases}$$

Введём матрицу суммарных предпочтений $P_\Sigma = \|p_{ij}^\Sigma\|$ порядка n, где $p_{ij}^\Sigma = \sum\limits_{k=1}^{m} p_{ij}^k$. С её помощью удобно находить матрицу весов C:

$$c_{ij} = \begin{cases} p_{ij}^\Sigma - p_{ji}^\Sigma, & \text{если } \langle a_i, a_j \rangle \in \rho_\Sigma, \\ \infty & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для построения агрегированного квазипорядка $\widehat{\rho}$ найдём предварительно суммарное отношение, не содержащее противоречивых контуров (алгоритм 1).

Алгоритм 1. Построение отношения ρ, не содержащего противоречивых контуров, по ρ_Σ

1: Проверяем граф $G = \langle A, \rho_\Sigma \rangle$ на наличие противоречивых контуров. Если таких контуров нет, то граф $G = \langle A, \rho_\Sigma \rangle$ без весов на дугах и есть граф $G' = \langle A, \rho \rangle$ искомого отношения ρ. Если противоречивые контуры есть, переходим к п. 2.

2: Из противоречивых контуров графа $G = \langle A, \rho_\Sigma \rangle$ удаляем все дуги $\langle a_i, a_j \rangle \in \operatorname{As} \rho$ $(a_i, a_j \in A)$, имеющие наименьший вес среди дуг всех противоречивых контуров. Переходим к п. 1.

Заметим, что по построению нагруженного мажоритарного графа вес дуги из асимметричной части отношения всегда больше нуля, вес дуги из симметричной части равен нулю.

Утверждение 2. Не содержащее противоречивых контуров отношение ρ на множестве A, построенное из отношения ρ_Σ по алгоритму 1, является единственным.

Доказательство. Следует из однозначности действий на каждом шаге алгоритма. ■

При практической реализации алгоритма 1 удобно воспользоваться следующим утверждением и его следствием. Обозначим $\mathrm{Tr}\,\rho$ транзитивное замыкание отношения ρ, т. е. наименьшее транзитивное отношение, содержащее ρ.

Утверждение 3. Отношение ρ, заданное на множестве A, непротиворечиво тогда и только тогда, когда $\mathrm{As}\,\rho \subseteq \mathrm{As}(\mathrm{Tr}\,\rho)$.

Доказательство. Пусть отношение ρ не содержит противоречивых контуров, но не выполняется включение $\mathrm{As}\,\rho \subseteq \mathrm{As}(\mathrm{Tr}\,\rho)$. Следовательно, существует упорядоченная пара $\langle a_i, a_j\rangle$ элементов из множества A, такая, что $\langle a_i, a_j\rangle \in \mathrm{As}\,\rho$ и $\langle a_i, a_j\rangle \in \mathrm{Sym}(\mathrm{Tr}\,\rho)$. Но в этом случае $\langle a_j, a_i\rangle \in \mathrm{Sym}(\mathrm{Tr}\,\rho)$ и по определению транзитивного замыкания отношения существует цепочка пар, принадлежащих отношению ρ: $\langle a_j, a_{k_1}\rangle, \ldots, \langle a_{k_t}, a_i\rangle$. Учитывая, что $\langle a_i, a_j\rangle \in \mathrm{As}\,\rho$, получим противоречивый контур отношения ρ, что не соответствует предположению о непротиворечивости ρ.

Пусть теперь для отношения ρ выполняется $\mathrm{As}\,\rho \subseteq \mathrm{As}(\mathrm{Tr}\,\rho)$. Если отношение ρ противоречиво, то в нём существует контур, содержащий дугу из $\mathrm{As}\,\rho$ и $\mathrm{Sym}(\mathrm{Tr}\,\rho)$ одновременно, что противоречит предположению. ■

Заметим, что $\mathrm{Sym}\,\rho \subseteq \mathrm{Sym}(\mathrm{Tr}\,\rho)$ для произвольного отношения ρ.

Следствие 1. Отношение ρ является непротиворечивым тогда и только тогда, когда $\mathrm{As}\,\rho \cap \mathrm{Sym}(\mathrm{Tr}\,\rho) = \varnothing$.

Искомое агрегированное отношение предпочтения $\widehat{\rho}$ должно быть квазипорядком. Найдём $\widehat{\rho}$ по формуле

$$\widehat{\rho} = e \cup \mathrm{Tr}\,\rho, \tag{1}$$

где e — тождественное отношение (диагональ). Напомним, что отношение ρ получается из отношения ρ_Σ путём разрушения противоречивых контуров. Полученное по формуле (1) отношение рефлексивно и транзитивно, следовательно, является квазипорядком. Его матрицы смежности и предпочтений обозначим соответственно $\widehat{R}$ и $\widehat{P}$.

Будем рассматривать матрицы смежности как элементы булевой алгебры. Введём на множестве матриц операции конъюнкции & и дизъюнкции $\vee$:

$$R^k \& R^t = \|r_{ij}^k \,\&\, r_{ij}^t\|, \quad R^k \vee R^t = \|r_{ij}^k \vee r_{ij}^t\|.$$

Будем обозначать матрицы смежности графов отношений ρ, $\mathrm{Tr}\,\rho$, $\mathrm{As}\,\rho$, $\mathrm{Sym}\,\rho$ соответственно R, $\mathrm{Tr}\,R$, $\mathrm{As}\,R$, $\mathrm{Sym}\,R$. Найдём матрицу смежности $\widehat{R}$ отношения $\widehat{\rho}$ согласно формуле (1):

$$\widehat{R} = E \vee \mathrm{Tr}\,R.$$

Матрицу предпочтений $\widehat{P}$ получим заменой в матрице смежности $\widehat{R}$ элементов, симметричных относительно главной диагонали и равных 1, на элементы, равные 1/2.

Работа алгоритма 1 основывается на нахождении отношения ρ_K, содержащего контуры отношения ρ_Σ. Матрицу смежности R_K графа отношения ρ_K, содержащего все контуры отношения ρ_Σ, вычислим по следующей формуле [5]:

$$R_K = \widehat{R}_\Sigma \,\&\, (\widehat{R}_\Sigma)^{\mathrm{T}} \,\&\, R_\Sigma,$$

где $\widehat{R}_\Sigma$ — матрица смежности отношения $\mathrm{Tr}\,\rho_\Sigma$; T — транспонирование матрицы.

Если в отношении ρ_K существуют одновременно дуги $\langle a_i, a_j\rangle$ и $\langle a_j, a_i\rangle$, что соответствует равноценности альтернатив a_i и a_j (следовательно, эти дуги принадлежат $\mathrm{Sym}\,\rho_\Sigma$), то они из контура не удаляются. Заметим, что эти дуги легко распознать:

их вес равен нулю. Таким образом, из контура удаляются только дуги, вес которых минимальный, но больше нуля, т. е. принадлежащие $\mathrm{As}\,\rho_\Sigma$. Наличие таких дуг в отношении ρ_K свидетельствует о существовании противоречивых контуров в отношении ρ_Σ.

При реализации алгоритма 1 для построения отношения ρ, не содержащего противоречивых контуров, можно выделить только дуги противоречивых контуров из $\mathrm{As}\,\rho_\Sigma$.

Утверждение 4. Справедлива формула

$$\mathrm{As}\,\rho_K = \mathrm{As}\,\rho_\Sigma \cap \mathrm{Sym}(\mathrm{Tr}\,\rho_\Sigma). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $\langle a_i, a_j\rangle \in \mathrm{As}\,\rho_K$, тогда из построения ρ_K следует $\langle a_i, a_j\rangle \in \mathrm{As}\,\rho_\Sigma$ (если $\langle a_i, a_j\rangle \in \mathrm{Sym}\,\rho_\Sigma$, то $\langle a_i, a_j\rangle \in \mathrm{Sym}\,\rho_K$). Условие $\langle a_i, a_j\rangle \in \rho_K$ означает, что $\langle a_i, a_j\rangle \in K \subseteq \rho_K$, где K — некоторый контур из ρ_Σ. По лемме 1 $K \subseteq \mathrm{Sym}(\mathrm{Tr}\,\rho_\Sigma) \Rightarrow \langle a_i, a_j\rangle \in \mathrm{Sym}(\mathrm{Tr}\,\rho_\Sigma)$. С учётом $\langle a_i, a_j\rangle \in \mathrm{As}\,\rho_\Sigma$ получим $\langle a_i, a_j\rangle \in$ $\in \mathrm{As}\,\rho_\Sigma \cap \mathrm{Sym}(\mathrm{Tr}\,\rho_\Sigma)$.

Пусть $\langle a_i, a_j\rangle \in \mathrm{As}\,\rho_\Sigma \cap \mathrm{Sym}(\mathrm{Tr}\,\rho_\Sigma)$. Из $\langle a_i, a_j\rangle \in \mathrm{As}\,\rho_\Sigma$ следует $\langle a_i, a_j\rangle \in \rho_\Sigma$, но $\langle a_j, a_i\rangle \notin \rho_\Sigma$. Из $\langle a_i, a_j\rangle \in \mathrm{Sym}(\mathrm{Tr}\,\rho_\Sigma)$ следует, что $\langle a_j, a_i\rangle \in \mathrm{Tr}\,\rho_\Sigma$ и существует цепочка пар, принадлежащих отношению ρ_Σ: $\langle a_j, a_{k_1}\rangle, \ldots, \langle a_{k_t}, a_i\rangle$. С учётом $\langle a_i, a_j\rangle \in \rho_\Sigma$ получаем контур в ρ_Σ, т. е. $\langle a_i, a_j\rangle \in \rho_K$. Но $\langle a_j, a_i\rangle \notin \rho_\Sigma$, значит, $\langle a_j, a_i\rangle \notin \rho_K$ ($\rho_K \subseteq \rho_\Sigma$) и, следовательно, $\langle a_i, a_j\rangle \in \mathrm{As}\,\rho_K$. ■

В матричном виде формула (2) примет вид

$$\mathrm{As}\,R_K = \mathrm{As}\,R_\Sigma \,\&\, \mathrm{Sym}(\mathrm{Tr}\,R_\Sigma).$$

Согласно алгоритму 1, из отношения $\mathrm{As}\,\rho_K$ поочерёдно удаляются все дуги, имеющие минимальный вес, до тех пор, пока противоречивые контуры отношения ρ_Σ не будут разрушены.

Заметим, что для произвольного отношения q с матрицей смежности Q матрицы смежности отношений $\mathrm{As}\,q$ и $\mathrm{Sym}\,q$ находятся по формулам [5]

$$\mathrm{Sym}\,Q = Q \,\&\, Q^T, \quad \mathrm{As}\,Q = Q - \mathrm{Sym}\,Q.$$

Предлагаемый метод согласования экспертных предпочтений состоит из двух частей: построения нагруженного мажоритарного графа и разрушения контуров с целью построения непротиворечивого агрегированного отношения. Можно осуществить выбор наилучших альтернатив на основе мажоритарного графа, не прибегая к разрушению противоречивых контуров, например, для упорядочения альтернатив воспользоваться процедурой Коупленда. Для мажоритарного графа данная процедура сводится к вычислению индексов вершин, равных разности количеств входящих в вершину и исходящих из неё дуг (для отношения «не более предпочтительна»). Для нагруженного мажоритарного графа процедуру можно усилить, учитывая веса на дугах: складывать и вычитать веса соответствующих дуг. Затем упорядочить вершины графа в соответствии с вычисленными индексами: лучшая вершина-альтернатива имеет наибольший индекс.

Наибольшую вычислительную сложность имеет алгоритм нахождения транзитивного замыкания отношения — $\mathrm{O}(n^3)$. В случае построения ранжирования альтернатив через индексы вершин мажоритарного графа сложность алгоритма уменьшится до $\mathrm{O}(n^2)$.

Приведём пример, демонстрирующий возможности метода непротиворечивого агрегирования отношений квазипорядка. Во всех примерах в качестве экспертной информации будем брать отношения, в которых все альтернативы сравнимы между собой.

Это даёт возможность сравнить предложенную процедуру с известными, хотя метод работает и в случае, когда часть альтернатив попарно несравнимы.

Пример 1. Пусть множество A содержит пять альтернатив $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ и профиль предпочтений трех экспертов — нестрогие ранжирования (отношение квазипорядка, при котором любые два элемента сравнимы между собой). Требуется построить агрегированное отношение, также являющееся квазипорядком. Нестрогие ранжирования альтернатив представлены в таблице. В верхней строке расположены наиболее предпочтительные альтернативы. Равноценные альтернативы расположены на одной строке.

ρ_1	ρ_2	ρ_3
a_4	a_5	a_1
a_1	a_3	a_2
$a_2 - a_3$	$a_1 - a_2$	$a_3 - a_5$
a_5	a_4	a_4

Представим отношения ρ_1, ρ_2, ρ_3 матрицами предпочтений:

$$P^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \; P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица суммарных предпочтений $P_\Sigma = P^1 + P^2 + P^3$ имеет вид

$$P_\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 & 1 & 1 & 1 \\ 5/2 & 3 & 3/2 & 1 & 1 \\ 2 & 3/2 & 3 & 1 & 3/2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3/2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрицы смежности и весов мажоритарного графа можно записать так:

$$R_\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 2 & 0 & 0 & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 0 & \infty & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

Мажоритарный граф (рис. 3) содержит противоречивые контуры. Разрушим их, удалив, согласно алгоритму, дуги с весом 1 (одна дуга, которая изображена на рис. 3 пунктирной линией). Получим матрицу смежности R и матрицу предпочтений R^p отношения, не содержащего противоречивых контуров. Вычислив транзитивное замыкание отношения ρ, получим искомый квазипорядок $\widehat{\rho}$. При этом к отношению ρ добавятся дуги $\langle a_2, a_5\rangle$ и $\langle a_5, a_2\rangle$. Матрицы смежности и предпочтений искомого агрегированного отношения квазипорядка имеют следующий вид:

$$\widehat{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

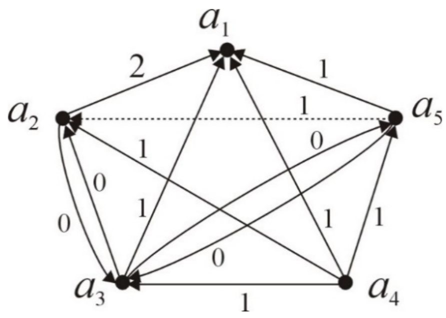

Рис. 3

Граф на рис. 3 не полностью соответствует своей матрице смежности: для большей наглядности производимых вычислений в нём отсутствуют петли.

Минимальное суммарное расстояние до экспертных предпочтений $D(\rho_\Sigma) = 19$ [3]; для агрегированного отношения $\widehat{\rho}$ суммарное расстояние до экспертных предпочтений $D(\widehat{\rho}) = 20$.

Сравним этот результат с суммарными расстояниями, полученными по простой процедуре Коупленда и модифицированной — с разностью весов дуг. Обе процедуры основаны на предварительном построении мажоритарного графа. Простая процедура Коупленда приписывает каждой вершине-альтернативе индекс, равный разности количеств входящих и исходящих из неё дуг. Модифицированная процедура приписывает каждой вершине-альтернативе индекс, равный разности сумм весов входящих и исходящих дуг. Нестрогое ранжирование, полученное по модифицированной процедуре Коупленда, — $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 - a_3 \\ a_5 \\ a_4 \end{pmatrix}$ — даёт расстояние 20: $a_1(5)$, $a_2(0)$, $a_3(0)$, $a_4(-4)$, $a_5(-1)$.

Используя обычную процедуру Коупленда, получим $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_5 \\ a_4 \end{pmatrix}$, суммарное расстояние — 21: $a_1(4)$, $a_2(1)$, $a_3(0)$, $a_4(-4)$, $a_5(-1)$.

Нестрогое ранжирование с минимальным суммарным расстоянием 20 можно также получить, используя процедуру построения медианы Кемени, но она трудна алгоритмически и имеет экспоненциальную вычислительную сложность.

Процедура непротиворечивого агрегирования предпочтений может применяться и в случае задания профиля экспертных предпочтений произвольными бинарными отношениями. Заметим, что противоречивые исходные отношения могут привести к нарушению второй аксиомы Эрроу о сохранении в агрегированном отношении предпочтений, совпадающих у всех экспертов [2]. Рекомендуется в качестве исходных брать транзитивные отношения, что исключает их противоречивость.

Для применения разработанного алгоритма в случае задания численных оценок альтернатив необходимо воспользоваться предложенным в [8] способом формирования матриц предпочтения.

3. Процедура упорядочения альтернатив на основе отношения квазипорядка

Построение агрегированного отношения предпочтения предшествует процедуре выбора наилучших альтернатив или их ранжированию. Для реализации этих процедур обычно используются алгоритмы на графах. Подмножества независимых и доминирующих альтернатив можно найти, используя метод Магу нахождения внутренне и внешне устойчивых множеств вершин графа, а также ядра графа, являющегося одновременно внутренне и внешне устойчивым. Для графа без контуров ядро определяется однозначно. Упорядочить альтернативы по предпочтению, в частности ранжировать их, можно с помощью алгоритма Демукрона разбиения графа без контуров на уровни [9]. Применение этих процедур для графа, содержащего контуры, либо невозможно, либо может привести к неоднозначному или пустому выбору альтернатив.

Отношение квазипорядка допускает наличие непротиворечивых контуров, т. е. контуров, в которые входят только равноценные альтернативы. Модифицируем алгоритм Демукрона таким образом, чтобы его можно было применить при наличии в графе агрегированного отношения непротиворечивых контуров. Равноценные альтернативы при этом должны принадлежать одному уровню предпочтения. Это позволит на основе отношения квазипорядка упорядочить альтернативы, в частности построить их нестрогое ранжирование. Напомним, что под нестрогим ранжированием понимается такое отношение квазипорядка, что любые два элемента множества, на котором оно задано, сравнимы.

Дадим определение уровней графа. Пусть $G = \langle A, \rho \rangle$ — орграф с множеством вершин $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и множеством дуг ρ.

Определение 6 [9]. Уровнями $N_0, N_1, \ldots, N_t$ графа $G = \langle A, \rho \rangle$ называются следующие непустые множества вершин графа:

$$\begin{aligned}
&N_0 = \{a_i : a_i \in A,\ \Gamma a_i = \varnothing\},\\
&N_1 = \{a_i : a_i \in A \setminus N_0,\ \Gamma a_i \subseteq N_0\},\\
&\ldots\\
&N_t = \{a_i : a_i \in A \setminus \bigcup_{j=0}^{t-1} N_j,\ \Gamma a_i \subseteq \bigcup_{j=0}^{t-1} N_j\},\\
&\Gamma^{-1} N_t = \varnothing.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь для любой вершины a_i определены вершины из её образа Γa_i и прообраза $\Gamma^{-1} a_i$:

$$\Gamma a_i = \{a_j : \langle a_i, a_j \rangle \in \rho,\ a_j \in A\},$$
$$\Gamma^{-1} a_i = \{a_j : \langle a_j, a_i \rangle \in \rho,\ a_j \in A\}.$$

Утверждение 5 [9]. Орграф можно разбить на уровни тогда и только тогда, когда он не содержит контуров.

Рассмотрим транзитивный граф $G = \langle A, \rho \rangle$ с множеством вершин $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, который может содержать контуры, состоящие из равноценных альтернатив.

Утверждение 6. Пусть альтернативы a_i и a_j равноценны по транзитивному отношению ρ, заданному на множестве A. Тогда $\Gamma a_i = \Gamma a_j$ $(a_i, a_j \in A)$.

Доказательство. Пусть $a_k \in \Gamma a_i$. Тогда $\langle a_i, a_k \rangle \in \rho$. В силу транзитивности ρ из $\langle a_j, a_i \rangle \in \rho$ и $\langle a_i, a_k \rangle \in \rho$ получим $\langle a_j, a_k \rangle \in \rho$. Отсюда $a_k \in \Gamma a_j$ и, следовательно, $\Gamma a_i \subseteq \Gamma a_j$.

Аналогично доказывается, что $\Gamma a_j \subseteq \Gamma a_i$. ■

Утверждение 7. Равноценные по транзитивному отношению ρ альтернативы принадлежат одному уровню графа отношения $\operatorname{As}\rho$.

Доказательство. Граф $G = \langle A, \operatorname{As}\rho\rangle$ не содержит контуров, так как по лемме 1 в транзитивном отношении ρ все контуры принадлежат $\operatorname{Sym}\rho$. Следовательно, по утверждению 5 граф $G = \langle A, \operatorname{As}\rho\rangle$ можно разбить на уровни $N_0, N_1, \ldots, N_t$ (3).

Заметим, что уровни $N_0, N_1, \ldots, N_t$ полностью определяются множествами образов вершин Γa_i. Поскольку у равноценных альтернатив a_i и a_j в силу утверждения 6 $\Gamma a_i = \Gamma a_j$, то a_i и a_j принадлежат одному уровню графа отношения $\operatorname{As}\rho$ $(a_i, a_j \in A)$. ■

Пусть $\widehat{\rho}$ — отношение квазипорядка, построенное на множестве альтернатив $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Отношение $\widehat{\rho}$ транзитивно и, согласно утверждению 7, равноценные альтернативы находятся на одном уровне графа отношения $\operatorname{As}\widehat{\rho}$. Этот факт позволяет предложить для упорядочения альтернатив алгоритм 2.

Алгоритм 2. Упорядочение альтернатив на основе отношения квазипорядка

1: Найдем $\operatorname{As}\widehat{\rho}$ — асимметричную часть отношения квазипорядка $\widehat{\rho}$.
2: Разбить граф отношения $\operatorname{As}\widehat{\rho}$ на уровни $N_0, N_1, \ldots, N_t$ (3), используя алгоритм Демукрона.
3: Восстановить на каждом из уровней дуги из $\operatorname{Sym}\widehat{\rho}$.
4: Упорядочить альтернативы согласно уровням $N_0, N_1, \ldots, N_t$; наилучшие альтернативы будут принадлежать уровню N_0.

Отметим, что на каждом из уровней могут оказаться как равноценные, так и несравнимые вершины-альтернативы. Нестрогое ранжирование альтернатив можно получить только в случае, когда все альтернативы сравнимы по отношению квазипорядка.

Пример 2. Воспользовавшись полученным в примере 1 отношением квазипорядка $\widehat{\rho}$, проведём ранжирование альтернатив множества $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. Матрица смежности графа отношения $\widehat{\rho}$ имеет вид

$$\widehat{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдём матрицу смежности асимметричной части отношения $\widehat{\rho}$:

$$\operatorname{As}\widehat{R} = \widehat{R} - \operatorname{Sym}\widehat{R} = \widehat{R} - (\widehat{R} \,\&\, \widehat{R}^{\mathrm{T}}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя алгоритм Демукрона, разобьем граф отношения $\operatorname{As}\widehat{\rho}$ на уровни (3). Этапы работы алгоритма легко проследить на примере.

Согласно алгоритму, просуммируем элементы каждой строки матрицы смежности $\operatorname{As}\widehat{R}$. Получим вектор $L^{(0)} = (0\ 1\ 1\ 4\ 1)^{\mathrm{T}}$. Элемент $l_1^{(0)}$ равен 0, следовательно, $a_1 \in N_0$.

Обнуляем первый столбец матрицы смежности (соответствующий вершине a_1):

$$\operatorname{As}\widehat{R}1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдём вектор, компоненты которого равны сумме единиц каждой строки полученной матрицы (кроме первой строки): $L^{(1)} = (* \ 0 \ 0 \ 3 \ 0)^{\mathrm{T}}$. Элемент $l_1^{(1)} = *$, так как $a_1 \in N_0$; $l_2^{(1)} = l_3^{(1)} = l_5^{(1)} = 0$, следовательно, $a_2, a_3, a_5 \in N_1$.

Обнуляем второй, третий и пятый столбцы матрицы $\operatorname{As}\widehat{R}1$, получаем

$$\operatorname{As}\widehat{R}2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

следовательно, $L^{(2)} = (* \ * \ * \ 0 \ *)^{\mathrm{T}}$ и $a_4 \in N_2$.

Разбиение графа отношения $\operatorname{As}\widehat{\rho}$ на уровни с добавлением дуг графа отношения $\widehat{\rho}$ (кроме петель) представлено на рис. 4. Соответствующее нестрогое ранжирование альтернатив: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 - a_3 - a_5 \\ a_4 \end{pmatrix}$.

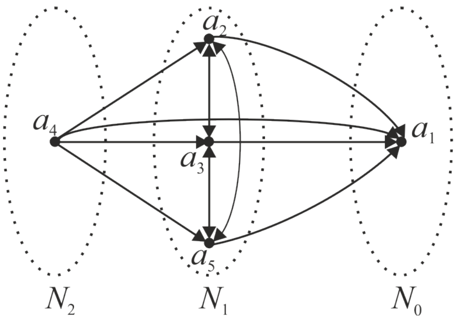

Рис. 4

Из рис. 4 видно, что построенное агрегированное отношение позволяет осуществить однозначный выбор наилучшей альтернативы. Существование дуг $\langle a_2, a_1\rangle$, $\langle a_3, a_1\rangle$, $\langle a_4, a_1\rangle$ и $\langle a_5, a_1\rangle$ указывает на то, что альтернатива a_1 предпочтительнее всех остальных — победитель по Кондорсе [2].

Заметим, что если не все альтернативы попарно сравнимы с помощью построенного квазипорядка, то, используя предложенный алгоритм, мы получим упорядочение, но не ранжирование альтернатив, при этом наилучшие альтернативы будут принадлежать уровню N_0.

Заключение

В работе предложена методика непротиворечивого агрегирования отношений квазипорядка, основанная на построении нагруженного мажоритарного графа с весами на дугах, характеризующими различия в предпочтениях экспертов. Для построения транзитивного группового отношения используется алгоритм разрушения противоречивых контуров путём удаления дуг из асимметричной части отношения, имеющих наименьший вес. Предложен алгоритм упорядочения альтернатив по предпочтительности на основе отношения квазипорядка. Разработанные алгоритмы могут использоваться и при решении многокритериальных задач, в частности при задании численных оценок альтернатив по критериям качества [8]. Все алгоритмы обладают вычислительной сложностью не более $\mathrm{O}(n^3)$ от числа альтернатив, что даёт возможность эффективно применять их для решения задач с большими массивами исходных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ларичев О. И.* Вербальный анализ решений / под ред. А. Б. Петровского. М.: Наука, 2006. 400 с.
2. *Петровский А. Б.* Теория принятия решений. М.: Академия, 2009. 400 с.
3. *Миркин Б. Г.* Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974. 256 с.
4. *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. М.: Мир, 1991. 464 с.
5. *Нефедов В. Н., Осипова В. А., Смерчинская С. О., Яшина Н. П.* Непротиворечивое агрегирование отношений строгого порядка // Изв. вузов. Математика. 2018. №5. С. 71–85.
6. *Нефедов В. Н., Смерчинская С. О., Яшина Н. П.* Построение агрегированного отношения, минимально удаленного от экспертных предпочтений // Прикладная дискретная математика. 2018. №42. С. 120–132.
7. *Шрейдер Ю. А.* Равенство, сходство, порядок. М.: Наука, 1971. 256 с.
8. *Smerchinskaya S. O. and Yashina N. P.* An algorithm for pairwise comparison of alternatives in multi-criteria problems // Intern. J. Modeling, Simulation, and Scientific Computing. 2018. V. 9. No. 1. https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S179396231850006X.
9. *Нефедов В. Н., Осипова В. А.* Курс дискретной математики. М.: Изд-во МАИ, 1992. 262 с.

REFERENCES

1. *Larichev O. and Moshkovich H.* Verbal Decision Analysis for Unstructured Problems. Boston, Kluwer Acedemic Publishers, 1997. 272 p.
2. *Petrovskiy A. B.* Teoriya prinyatiya resheniy [Decision Making Theory]. Moscow, Akademiya Publ., 2009. 400 p. (in Russian)
3. *Mirkin B. G.* Group Choice. V. H. Winston & Sons Publ., 1979. 252 p.
4. *Moulin H.* Axioms of Cooperative Decision Making. Cambridge, Cambridge University Press, 1988. 348 p.
5. *Nefyodov V. N., Osipova V. A., Smerchinskaya S. O., and Yashina N. P.* Non-contradictory aggregation of strict order relations. Russian Mathematics, 2018, vol. 62, pp. 61–73.
6. *Nefyodov V. N., Smerchinskaya S. O., and Yashina N. P.* Postroenie agregirovannogo otnosheniya, minimal'no udalyonnogo ot ehkspertnyh predpochtenij [Constructing an aggregated relation with a minimum distance from the expert preferences]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2018, no. 42, pp. 120–132. (in Russian)
7. *Schreider Ju. A.* Equality, Resemblance and Order. Moscow, Mir Publ., 1979. 279 p.
8. *Smerchinskaya S. O. and Yashina N. P.* An algorithm for pairwise comparison of alternatives in multi-criteria problems. Intern. J. Modeling, Simulation, and Scientific Computing, 2018, vol. 9, no. 1. www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S179396231850006X.
9. *Nefedov V. N. and Osipova V. A.* Kurs diskretnoy matematiki [Discrete Mathematics Course]. Moscow, MAI Publ., 1992. 262 p. (in Russian)