УДК 1(091)
DOI: 10.17223/1998863X/50/21

О.А. Доманов

О САМОРЕФЕРЕНТНОСТИ ПАРАДОКСА ЯБЛО

Аргумент Евгения Борисова против Буэно и Коливана некорректен. В то же время подход последних также не свободен от проблем, как показано Кетландом. Рассмотренные Борисовым аргументы, а также подходы, основанные на теории нефундированных множеств, показывают, что одной из главных проблем дискуссии о самореферентности парадокса Ябло является неясность понятия самореферентности.
Ключевые слова: *парадокс Ябло, самореферентность, нефундированные множества.*

Краткость заметки не позволяет затронуть много тем, поэтому я хотел бы остановиться на двух из них: критике одного из аргументов Евгения Борисова и общих соображениях, касающихся самореферентности парадокса Ябло.

Одной из центральных тем статьи Евгения Борисова является возможно самая известная попытка оспорить несамореферентность парадокса С. Ябло, предпринятая Г. Пристом [1], а также критика этой попытки О. Буэно и М. Коливаном [2]. Прист предлагает формализацию парадокса Ябло, в которой самореферентность присутствует явно, и делает вывод о скрытой самореферентности самого парадокса. Буэно и Коливан возражают, замечая, что самореферентность относится к способу формализации, выбранному Пристом, но не к парадоксу самому по себе. Борисов, в свою очередь, критикует возражение Буэно и Коливана, защищая аргумент Приста от атаки. Аргументация разбираемых авторов прекрасно изложена в статье, я сосредоточусь на возражении Борисова, которое считаю неверным. Рассмотрим его внимательнее.

Прист представляет предложения парадокса Ябло как значения определенного им предиката на натуральных числах (иногда называемого предикатом Ябло) и затем демонстрирует, что сам этот предикат является неподвижной точкой некоторого предиката выполнимости, также построенного Пристом. Тем самым, утверждает Прист, формулировка парадокса Ябло предполагает предикат, определенный через самореферентность, что указывает на самореферентность самого парадокса. Возражение Буэно и Коливана состоит в том, что противоречие, необходимое для парадокса, можно получить без построения предиката выполнимости Приста, т.е. самореферентность не обязательно относится к свойствам парадокса, скорее, это свойство предиката, который, однако, для возникновения парадокса не требуется. Самореферентность – делают вывод Буэно и Коливан – есть артефакт формализации Приста, а не характеристика парадокса самого по себе. Их идея состоит в том, чтобы рассмотреть лишь некоторые предложения Ябло без построения предиката на них всех (точнее, на их номерах). Если s_0 – первое предложение последовательности Ябло, то из его истинности противоречие выводится путем простых шагов. Но и из его ложности противоречие также можно вывести без построения общего предиката. Согласно Буэно и Коливану, $\neg Ts_0$ означает, что существует как минимум одно истинное s_i, где i, что важно для аргумента, является просто конкретным числом, а не переменной (заметим, в скобках, что этот шаг доказательства неконструктивен – у нас нет способа вычислить i). Затем из истинности s_i легко выводится противоречие. Здесь существенно, что нам достаточно вывести противоречие лишь для *некоторого* i; именно на этот пункт рассуждения направлена критика Борисова. Он говорит: «Когда вводится i, мы не знаем, чему i равно, поэтому мы должны допустить, что оно может оказаться каким угодно (от 1 до бесконечности)». Но в том-то и дело, что мы здесь ничего не допускаем. Хотя i нам не известно, оно фиксировано (самим положением дел, если угодно) и не оставляет места для допущений. Разумеется, мы можем заметить, что вывод противоречия для данного i может быть повторен для любого другого номера и даже провести генерализацию, но этот факт в самом доказательстве не используется. Поэтому, вопреки Борисову, неверно, что «нам нужна гарантия, что на следующем шаге можно получить противоречие *для любого значения* i». Мы можем заметить это задним числом, но нам не нужно этого *предполагать*.

Борисов далее замечает, что для определения i нам требуется некоторое распределение истинностных значений P, и полагает, что мы должны быть способны получить противоречие для любого такого P. Но ситуация здесь аналогична предыдущему: хотя мы не знаем, каково распределени P, оно тем не менее фиксировано. Нам нужно вывести противоречие лишь для этого распределения, а не для любого из них. Поэтому утверждение Борисова «i зависит от P, т.е. не является константой» неверно, поскольку здесь P само является константой.

В результате аргумент Буэно и Коливана защищен от данной атаки. Что, разумеется, еще не говорит нам ничего о том, является ли парадокс Ябло самореферентным. Тем более что сам аргумент Приста проблематичен. Например, как можно показать [3], в теории, расширяющей арифметику, всякий одноместный предикат является неподвижной точкой (в слабом смысле) некоторого двухместного предиката. Поэтому, хотя тезис Приста о неподвижной точке, безусловно, верен, неясно, какие следствия, касающиеся самореферентности как причины парадокса, мы можем из него извлечь. Предикат Ябло в этом отношении ничем не хуже всякого иного.

Изложенное не означает также, что аргумент Буэно и Коливана корректен. Как показывает Дж. Кетланд [4. P. 297], множество предложений Ябло противоречиво, лишь если мы учитываем стандартные модели арифметики, но при этом оно имеет нестандартную модель (и значит, формально непротиворечиво). Таким образом, из $(\exists n > 0)\neg Ts(n)$ не следует $(\exists n \in \omega)\neg Ts(n)$, поскольку искомое число может оказаться нестандартным. Поэтому доказательство противоречия требует принятия принципа, называемого Кетландом единым гомогенным принципом Ябло. Последний сам по себе в парадоксе не содержится, однако должен быть предположен Буэно и Коливаном для вывода противоречия. В результате их рассуждение либо неверно, либо предполагает формализацию, связь которой с исходным парадоксом еще требуется прояснить. По крайней мере их попытку избежать подобной формализации можно признать недостаточной.

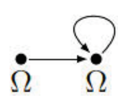
* * *

Оживленные дебаты нередко вызываются неясностью используемых понятий. В данном случае таким понятием является самореферентность. Р. Кук указывает на двусмысленность в определении самореферентности через неподвижную точку [3]. В другой работе он моделирует референцию с помощью отношения принадлежности [5. § 2.2]. Тогда предложения Ябло представляются следующими характеристическими множествами:

$$s_0 = \{s_1, s_2, s_3, \dots\},$$
$$s_1 = \{s_2, s_3, s_4, \dots\},$$
$$s_2 = \{s_3, s_4, s_5, \dots\},$$
$$\dots$$

Эта «система уравнений» имеет решение в теории нефундированных множеств [6]: все множества совпадают и равны $\Omega = \{\Omega\}$, что означает, что все уравнения Ябло совпадают с $s = \neg Ts$. Самореферентность и парадоксальность, таким образом, видны непосредственно. Проблема, однако, состоит в том, что существует несколько вариантов теории нефундированных множеств, различающихся тем, какие из множеств считаются в них равными. В отличие от теорий типа Цермело–Френкеля здесь недостаточно одного только принципа экстенсиональности. Например, если представлять множества в виде направленных графов, ребра которых изображают отношение принадлежности, то Ω можно изобразить как

Но точно так же его можно представить как



или даже

Мы можем считать, что эти графы изображают одно и то же множество. Тогда бесконечная цепь принадлежности («референции») последнего графа будет эквивалентна принадлежности самому себе первого графа. Но мы можем так и не считать, и тогда эта цепь не будет эквивалентна самореферентному множеству (см. подробнее указанную книгу Кука: [5]). Для парадокса Ябло это различие соответствует тому, будем ли мы считать предложения «Все следующие пропозиции ложны» одним и тем же или разными в зависимости от места, на котором они стоят в последовательности. Это вопрос нашего решения.

Приведенные соображения не имеют, конечно, целью разрешить вопрос самореферентности. Они, скорее, указывают, что он связан не столько с проблемой, которую необходимо разрешить, сколько с решением, которое требуется принять.

Литература

1. *Priest G.* Yablo’s paradox // Analysis. 1997. Vol. 57, № 4. P. 236–242. DOI: 10.1111/1467-8284.00081

2. *Bueno O., Colyvan M.* Paradox without satisfaction // Analysis. 2003. Vol. 63, № 2. P. 152–156. DOI: 10.1111/1467-8284.00026

3. *Cook R.T.* There Are Non-Circular Paradoxes (but Yablo's Isn't One of Them!) // The Monist. 2006. Vol. 89, № 1. P. 118–149.

4. *Ketland J.* Yablo's Paradox and ω-Inconsistency // Synthese. Dordrecht, 2005. Vol. 145, № 3. P. 295–302. DOI: 10.1007/s11229-005-6201-6

5. *Cook R.T.* The Yablo Paradox : an Essay on Circularity. Oxford : OUP, 2014. 208 p.

6. *Aczel P.* Non-well-founded sets / with a forew. by J. Barwise. Stanford, CA : Stanford University, Center for the Study of Language, Information, 1988. xx, 137. (CSLI Lecture Notes; 14).

Oleg A. Domanov, Institute of Philosophy and Law of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (Novosibirsk, Russian Federation).

E-mail: domanov@philosophy.nsc.ru

Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Filosofiya. Sotsiologiya. Politologiya – Tomsk State University Journal of Philosophy, Sociology and Political Science. 2019. 50. pp. 245–248.

DOI: 10.17223/1998863X/50/21

ON THE SELF-REFERENCE OF YABLO'S PARADOX

Keywords: Yablo's paradox; self-reference; non-well-founded sets.

Evgeny Borisov's argument against Bueno and Colyvan is not correct. At the same time, their approach is not free of problems as well, as Jeffrey Ketland demonstrated. The arguments Borisov discusses along with approaches based on the theory of non-well-founded sets show that one of the principal problems in the debate on Yablo's paradox consists in the obscurity of the concept of self-reference.

References

1. Priest, G. (1997) Yablo's paradox. *Analysis*. 57(4). pp. 236–242. DOI: 10.1111/1467-8284.00081

2. Bueno, O. & Colyvan, M. (2003) Paradox without Satisfaction. *Analysis*. 63(2). pp. 152–156. DOI: 10.1111/1467-8284.00026

3. Cook, R.T. (2006) There Are Non-circular Paradoxes (But Yablo's Isn't One of Them!). *The Monist*. 89(1). pp. 118–149. DOI: 10.5840/monist200689137

4. Ketland, J. (2005) Yablo's Paradox and ω-Inconsistency. *Synthese*. 145(3). pp. 295–302. DOI: 10.1007/s11229-005-6201-6

5. Cook, R.T. (2014) *The Yablo Paradox. An Essay on Circularity*. Oxford: OUP.

6. Aczel, P. (1988) *Non-well-founded sets*. Stanford, CA: Stanford University, Center for the Study of Language, Information.