Вестник Томского государственного университета
Философия. Социология. Политология. 2019. № 50

УДК 164.07
DOI: 10.17223/1998863X/50/24

В.А. Суровцев

ПАРАДОКС С. ЯБЛО, АВТОРЕФЕРЕНТНОСТЬ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ[1]

Рассматриваются аргументы Е.В. Борисова против того, что парадокс С. Ябло не автореферентен. В качестве альтернативы критикуемого им подхода предлагается интерпретация, основанная на методе математической индукции. Метод математической индукции не является конструктивным. Предполагается, что формулировка логических парадоксов без автореферентности возможна, но при применении неконструктивных методов.
Ключевые слова: *парадокс С. Ябло, автореферентность, математическая индукция, неконструктивные методы.*

Данный текст является репликой на статью Е.В. Борисова, опубликованную в этом же номере журнала [1. С. 233–244]. В своей статье Е.В. Борисов анализирует претензию С. Ябло [2] на то, что его парадокс отличается от других логических парадоксов[2] отсутствием автореферентности, которая, как считалось уже Б. Расселом [6], лежит в основании всех видов логических парадоксов. Тезис об отсутствии автореферентности в парадоксе Ябло оказался дискуссионным. В частности, одним из первых против претензии Ябло высказался С. Прист [7], который считал, что ошибка кроется в самой формулировке парадокса. Ряд авторов высказались в пользу претензии Ябло. Анализируя аргументы за и против некоторых участников этой дискуссии, Е.В. Борисов отстаивает два тезиса: «1) в формальном аспекте парадокс Ябло является автореферентным; 2) при этом существуют неформальные аргументы, показывающие, что вопрос об автореферентности или неавтореферентности данного парадокса не имеет определенного ответа» [1. С. 233]. В своей реплике я рассмотрю некоторые аргументы Е.В. Борисова и предложу интерпретацию парадокса Ябло, основанную на методе математической индукции[3].

В формулировке парадокса Ябло, как он представлен в статье Борисова [1. С. 234], самым важным является переход от $\sim Ts_n$ к $(\forall k)\sim Ts_k$ на основании того, что n было взято произвольно. Насколько такой переход допустим? Сам по себе переход подобного рода применяется в логике предикатов, где имеет вполне почетный статус и название «правило генерализации», и в общем виде представим следующим образом:

(Gen) $A(t) \vdash \forall x A(x)$,

где «$\vdash$» – знак логического следования, $A(t)$ – открытое предложение, а терм t взят в интерпретации всеобщности (другими словами, абсолютно произвольно), т.е. не зависит ни от каких условий, кроме A. Поскольку в приведенной

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект № 18-18-00057.
[2] О типологии парадоксов и о месте в этой типологии парадокса Ябло см. [3–5].
[3] Выражаю признательность Е.В. Борисову за обсуждение первоначальной версии данного текста. Представленный здесь результат во многом обязан его конструктивным замечаниям.

формулировке парадокса Ябло n берется в интерпретации всеобщности, т.е. он произволен, казалось бы, правило (Gen) применимо и в подобных случаях. Если бы не одно обескураживающее возражение. Применение правила (Gen) к $\sim Ts_n$ не имеет смысла, поскольку выражения типа Ts_n или $\sim Ts_n$ попросту неправильно построены. Дело в том, что s_n является открытым предложением, поскольку n является переменной, а к открытым предложениям предикат истинности неприменим. Предикат истинности применяется только к закрытым предложениям.

Именно этой дорогой идет С. Прист в [7]. Поскольку s_n является открытым предложением, то речь, как показано в статье Е.В. Борисова, должна идти не о предикате истинности. К открытым предложениям должен применяться более общий предикат выполнимости, поэтому «допущение, что s_n истинно, следует заменить допущением, что число n выполняет предикат s^*» [1. С. 235]. Замена *mutatis mutandis* предиката истинности на предикат выполнимости при формулировке парадокса Ябло показывает, что парадокс содержит автореферентность. Таким образом, претензия Ябло является необоснованной, а «отсутствие автореферентности в парадоксе Ябло – это не более чем видимость, порожденная некорректным использованием предиката истинности (T) вместо предиката выполнения (S). Устранение этой ошибки делает автореферентный характер парадокса очевидным» [Там же. С. 236].

Из сложившейся ситуации для того, чтобы все-таки обосновать возможность неавтореферентного прочтения парадокса Ябло или какой-то его модификации, есть два возможных выхода. Первый выход представляется наиболее естественным. Поскольку предикат истинности действительно не применяется к открытым предложениям, можно попытаться сконструировать такую версию парадокса Ябло, которая использовала бы предикат выполнимости, но была бы неавтореферентной. Другими словами, в ряду предложений Ябло вместо истинности применяем выполнимость, но ряд строим таким образом, чтобы не возникала автореферентность. Этим путем идет сам С. Ябло, предлагая конструировать не ряд единообразно построенных предложений, но ряд, который был бы не регулярен, а состоял из попарно различных предложений [8]. Однако, как убедительно показывает Е.В. Борисов, подобный ряд нерегулярных предложений при соответствующей реконструкции формулировки парадокса все равно основан на автореферентности. Но вот чего не показывает Е.В. Борисов, так это того, что неавтореферентная формулировка парадокса Ябло в терминах выполнимости невозможна в принципе. Могут быть другие, пока не найденные, формулировки. Это в некоторой степени умаляет первый из тезисов Е.В. Борисова.

Второй, менее очевидный выход из сложившейся ситуации, заключается в том, чтобы сохранить предикат истинности, модифицировав при этом изначальную формулировку парадокса Ябло так, чтобы в ней в качестве свободной, пусть и взятой произвольно, не фигурировала переменная n. Ясно, что этот подход должен быть основан на ином, чем изначально, понимании обобщения. Такой подход представляется мне более интересным, чем предыдущий, в нескольких отношениях. Во-первых, он возвращает нас к изначальной формулировке парадокса Ябло в терминах истинности. Во-вторых, демонстрируя саму возможность парадоксов, не основанных на автореферентности и использующих предикат истинности, он позволяет минимизировать количество разнообразных конструкций парадокса в терминах выполнимости, раз уж соответствующая попытка Ябло оказалась неудачной. Наконец, он позволяет ограничиться модификацией только первой части парадокса, т.е. выводом $(\forall k) \sim Ts_k$, так как вторая его часть основывается на первой.

Этот второй подход представлен, например, в работе Буэно и Коливана [9]. Метод переформулировки парадокса Ябло, предложенный Буэно и Коливаном, также анализируется в статье Е.В. Борисова и, как представляется ему, является ошибочным. Но ошибочным не потому, что здесь также присутствует автореферентность в скрытом виде, как в предыдущем случае с предикатом выполнимости, но потому, что он воспроизводит изначальную ошибку парадокса Ябло, где предикат истинности неправомерно применяется к открытым предложениям.

В экспозиции Е.В. Борисовым парадокса Ябло в форме Буэно–Коливана [1. С. 237] ключевой является одна фраза, а именно «…(ошибочно) полагая…». На чем основывается эта фраза? Она основывается на том, что при выводе используется предложение s_i (где i считается не переменной, но константой для вполне определенного числа). Однако, как пытается показать Е.В. Борисов, используя предложенный им метод установления i с помощью функции $\min(X)$, областью определения которой являются подмножества множества натуральных чисел, а областью значения – сами натуральные числа, само i все-таки не может рассматриваться как константа, а следовательно, предложение s_i является открытым в той же мере, как и предложение s_n в изначальной формулировке парадокса Ябло. Следовательно, модификация парадокса Ябло в форме Буэно–Коливана столь же неправомерна, как и первоначальный парадокс Ябло в отношении применения правила (Gen), поскольку Ts_i здесь построено столь же неправильно, как и Ts_n там. В этом отношении Е.В. Борисов, вероятно, прав, что дедукция у Буэно и Коливана не завершена, поскольку они скрыто используют предложение вида $(\forall n){\sim}Ts_n$.

Кроме того, если аргументация Е.В. Борисова верна, то против интерпретации Буэно–Коливана в качестве следствия появляется еще одно возражение и связанное с ним затруднение (Е.В. Борисов на него не указывает), которое вряд ли легко преодолимо при попытке модификации этой интерпретации, хоть в терминах истинности, хоть в терминах выполнимости. Ряд предложений Ябло в этом случае становится неоднородным, поскольку включает как закрытое s_0, так и открытые s_i предложения. Соответственно, при формулировке предложений ряда некоторые из них следовало бы формулировать с использованием предиката истинности, а некоторые – с помощью предиката выполнимости, что вряд ли предполагалось изначально. Ряд предложений Ябло в модификации Буэно и Коливана становится неоднородным, поскольку построен из предложений, принадлежащих к разным семантическим и синтаксическим категориям.

Однако, я полагаю, что подход Буэно и Коливана к парадоксу Ябло можно модифицировать, по-другому интерпретировав то, зачем в первой части парадокса понадобился вывод $\sim Ts_0$, какую роль играет Ts_i, и в каком смысле можно понимать, что «i – это не переменная, но константа для вполне определенного (хоть и неизвестного) числа», как говорит Е.В. Борисов в своей экспозиции [Там же. С. 236].

Представляется, что вывод о наличии свойства неистинности у всех членов ряда предложений Ябло можно обосновать с помощью принципа математической индукции. При этом вывод будет основываться не на установлении свойства неистинности у тех или иных членов ряда предложений Ябло, а на доказательстве того, что свойство неистинности является наследуемым в соответствующем индуктивном ряду. Речь, таким образом, будет идти не об элементах ряда, а о наследуемости свойства, которое принадлежит всем элементам данного ряда.

Напомним, в чем заключается принцип математической индукции. Неформально принцип математической индукции можно выразить следующим образом:

«Всякое свойство, которое принадлежит первому члену ряда, а также последующему элементу каждого элемента данного ряда, имеющему это свойство, принадлежит всем элементам данного ряда».

Этот принцип применяется тогда, когда необходимо установить наличие некоторого свойства у всех элементов ряда в том случае, когда ряд бесконечен или необозрим. Например, данный принцип фигурирует в качестве одной из аксиом в арифметике Пеано. На этой аксиоме, в частности, основаны важные выводы, связанные со свойствами, общими для всех элементов натурального ряда чисел[1].

Для бесконечного ряда предложений Ябло формально этот принцип можно записать следующим образом:

(Induct) $$\forall A\ (As_0\ \&\ \forall i\ (As_i \supset As_{i+1})) \supset \forall k As_k.$$

Если принять этот принцип[2], остается только показать, что свойство неистинности, которое фигурирует как характеристика предложения Ябло в первой части парадокса, является наследственным, а сам ряд предложений Ябло относительно этого свойства является индуктивным. То есть для того, чтобы обосновать, что $(\forall k) \sim Ts_k$, следует показать:

(Herit) $$\sim Ts_0\ \&\ \forall \mathrm{i}\ ({\sim} Ts_i \supset {\sim} Ts_{i+1}),$$

а именно, что свойством неистинности обладает s_0 и это свойство является наследуемым в ряду предложений Ябло. Первый конъюнкт можно вывести так, как показано выше в экспозиции Е.В. Борисова. Значит, у элементов данного ряда это свойство есть, по крайней мере у первого. Остается показать, что если оно есть у членов ряда, а у первого члена ряда оно точно есть,

---

[1] Принцип математической индукции необязательно рассматривать в качестве аксиомы или правила вывода. Например, Б. Рассел считает математическую индукцию характеристикой свойств рядов, которые он называл индуктивными [10. С. 82–89]. В этом смысле, например, индуктивным является ряд натуральных чисел относительно определенных свойств. Такие свойства в этом случае называются наследственными. Относительно ряда предложений Ябло в этом случае можно было бы просто сказать, что он является индуктивным относительно свойства неистинности, а само это свойство является в этом ряду наследственным. Тогда первая часть парадокса Ябло сводилась бы просто к демонстрации того, что свойство неистинности наследственно.

[2] Принцип математической индукции вполне применим в исчислениях с предикатом истинности. В частности, его использует С. Крипке при конструировании неподвижных точек [11], на которого в своей статье ссылается и Е.В. Борисов.

то оно является наследственным. Используем доказательство от противного, показав невозможность того, чтобы при $\sim Ts_i$ было Ts_{i+1}:

1.Допустим, что $\sim Ts_i$, но при этом Ts_{i+1}.

2. Однако $Ts_{i+1} \Rightarrow (\forall k > i + 1) \sim Ts_k \Rightarrow \sim Ts_{i+2}$.

3. С другой стороны, $Ts_{i+1} \Rightarrow (\forall k > i + 1) \sim Ts_k \Rightarrow (\forall k > i + 2) \sim Ts_k \Rightarrow Ts_{i+2}$.

4. Противоречие 2 и 3.

5. Следовательно, при $\sim Ts_i$ невозможно, чтобы Ts_{i+1}. То есть $\sim Ts_i \supset \sim Ts_{i+1}$.

Здесь может возникнуть возражение, связанное с несколько искусственным характером вывода, поскольку непосредственно не использовалось $\sim Ts_i$. Но для обоснованности самого вывода это не имеет принципиального значения. В силу своего строения Ts_{i+1} всегда приводит к противоречию. Показано лишь, что при $\sim Ts_i$ невозможно, чтобы Ts_{i+1}. Поскольку Ts_{i+1} в принципе невозможно.

Второе, более серьезное, возражение связано с тем, какую роль здесь играет i. Является ли i совершенно произвольным номером, как в исходном парадоксе Ябло, или наименьшим номером как у Буэно и Коливана? Если это так, то данный подход столь же неудовлетворителен, как и их подходы, что вполне показывает Борисов. Тогда обращение к индукции является просто излишним.

Укажем, однако, на то, что в данном выводе обосновывается не $\sim Ts_i$, но $\sim Ts_i \supset \sim Ts_{i+1}$. Это и есть основной шаг индукции, говорящий о том, что предложение, следующее в ряду за предложением, имеющим свойство неистинности, обладает свойством неистинности. Номер предложения здесь также неспецифицирован. Но в этом особенность трактовки вывода с использованием принципа математической индукции. Этот вывод представляет собой общую схему наследования свойства, неважно, с какого члена ряда начать. В этом случае если говорят, что i является наименьшим номером, то это может относится ко всем членам ряда начиная с первого. То есть если s_0 обладает свойством неистинности, то им обладает и s_1, если s_1 обладает свойством неистинности, то им обладает и s_2, и так до бесконечности. По сути дела, здесь подразумевается бесконечная конъюнкция следующего вида:

$$(\sim Ts_0 \supset \sim Ts_1) \,\&\, (\sim Ts_1 \supset \sim Ts_2) \,\&\, (\sim Ts_2 \supset \sim Ts_3) \ldots$$

Формула $\forall i\ (\sim Ts_i \supset \sim Ts_{i+1})$ рассматривается как сокращение для записи такой конъюнкции. Свойство неистинности, следовательно, наследственно в ряду предложений Ябло, а сам ряд предложений Ябло относительного этого свойства является индуктивным.

Отметим, что при таком подходе по-другому, чем у Буэно и Коливана, трактуется потребность в доказательстве $\sim Ts_{0,}$ поскольку необходимый для дальнейшей дедукции парадокса Ябло вывод $\forall k {\sim} Ts_k$ получаем из (Induct) и (Herit) по *modus ponens*. Да и сам $\forall k {\sim} Ts_k$ трактуется по-другому, поскольку рассматривается как способ записи соответствующей бесконечной конъюнкции. Дальнейший вывод парадокса строится так же, как в изначальной формулировке парадокса Ябло.

Если принять подобный подход, то, как мне представляется, при формулировке парадокса Ябло можно обойтись предикатом неистинности, не прибегая к предикату выполнимости. Открытым предложениям действительно нельзя приписать предикат истинности, но это не означает, что свойство неистинности не является наследуемым в ряду предложений Ябло, а сам ряд не является индуктивным относительно этого свойства.

Отметим еще два важных момента, которые следует учитывать для данной интерпретации. Во-первых, интерпретация парадокса Ябло с помощью принципа математической индукции, как представлено выше, ничего не говорит о его автореферентности или неавтореферентности. Просто рассматривается возможность его реконструкции с изначальным предикатом неистинности. Вполне возможно, что сама эта формулировка также содержит автореферентность. Во-вторых, принцип математической индукции неконструктивен. В частности, при его формулировке запись всеобщности трактуется как сокращение для бесконечной конъюнкции, что возможно только при принятии позиции реализма при построении подобных рядов.

Второе замечание содержит один важный нюанс, который касается не только формальной возможности дедукции парадокса Ябло, но и философских оснований, которые отличают позицию реализма при построении подобных рядов. В частности, Е.В. Борисов, анализируя аргументацию Р. Соренсена [12] и противопоставляя ее аргументации Дж. Билла [13], в рамках «неформального рассмотрения» приходит к выводу, что «у нас есть основания сомневаться как в автореферентности, так и в неавтореферентности парадокса Ябло» [1. С. 243]. Я полагаю, что аргументация Соренсена основана на позиции реализма и восходит к Ф.П. Рамсею, который при предложенном им способе разрешения логических парадоксов последовательно проводил различие между объективным значением функции и субъективными способностями выражающим эту функцию логиком [14. С. 52–64]. Как мне представляется, неавтореферентная формальная дедукция парадокса Ябло даже если и возможна, то только в том случае, если применять неконструктивные методы типа принципа математической индукции. Но это уже другая тема.

Литература

1. *Борисов Е.В.* Является ли парадокс Ябло автореферентным // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. 2019. № 50. С. 233–244. DOI: 10.17223/1998863X/50/20

2. *Yablo S.* Paradox without Self-Reference // Analysis. 1993. Vol. 53, № 4. P. 251–252.

3. *Ладов В.А.* Б. Рассел и Ф. Рамсей о проблеме парадоксов // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. 2018. № 43. С. 101–110. DOI: 10.17223/1998863X/43/9

4. *Ладов В.А.* Критический анализ иерархического подхода Рассела–Тарского к решению проблемы парадоксов // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. 2018. № 44. С. 11–24. DOI: 10.17223/1998863X/44/2

5. *Нехаев А.В.* Истина об «истине» // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. 2018. № 45. С. 34–46. DOI: 10.17223/1998863X/45/4

6. *Рассел Б.* Математическая логика, основанная на теории типов // Рассел Б. Введение в математическую философию. Новосибирск : Сиб. унив. изд-во, 2007.

7. *Priest G.* Yablo's Paradox // Analysis. 1997. Vol. 57, № 4. P. 236–242.

8. *Yablo S.* Circularity and Paradox // Self-Reference / Th. Bolander, V.F. Hendricks, S.A. Pedersen (eds.). Stanford, 2006. P. 165–183.

9. *Bueno O., Colyvan M.* Paradox without Satisfaction // Analysis. 2003. Vol. 63, № 2. P. 152–156.

10. *Рассел Б.* Введение в математическую философию. Новосибирск : Сиб. унив. изд-во, 2007.

11. *Крипке С.* Очерк теории истины // Крипке С. Витгенштейн о правилах и индивидуальном языке. М. : Канон+. 2010. С. 206–254.

12. *Sorensen R.A.* Yablo's Paradox and Kindred Infinite Liars // Mind. 1998. Vol. 107. P. 137–155.
13. Beall Jc. Is Yablo's Paradox Non-Circular? // Analysis. 2001. Vol. 61. № 3. P. 176–187.
14. *Рамсей Ф.П.* Основания математики // Философские работы. М. : Канон+. 2011. С. 16–86.

Valeriy A. Surovtsev, Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation).
E-mail: surovtsev1964@mail.ru
Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Filosofiya. Sotsiologiya. Politologiya – Tomsk State University Journal of Philosophy, Sociology and Political Science. 2019. 50. pp. 262–268.
DOI: 10.17223/1998863X/50/24

YABLO'S PARADOX, SELF-REFERENCE AND MATHEMATICAL INDUCTION

Keywords: Yablo's paradox; self-reference; mathematical induction; nonconstructive methods.

Some arguments of Evgeny Borisov for the self-reference of Yablo's paradox are analyzed. An interpretation based on the method of mathematical induction is proposed in this article as an alternative to the approach Borisov criticizes. The method of mathematical induction is not constructive. The main thesis of the article is: We may construct a semantic paradox without self-reference if only we use nonconstructive methods.

References

1. Borisov, E.V. (2019) Is Paradox Yablo self-referential? *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Filosofiya. Sotsiologia. Politologiya – Tomsk State University Journal of Philosophy, Sociology and Political Science*. 50. pp. 233–244. (In Russian). DOI: 10.17223/1998863X/50/20

2. Yablo, S. (1993) Paradox without Self-Reference. *Analysis*. 53(4). pp. 251–252. DOI: 10.2307/3328245

3. Ladov, V.A. (2018) Russell and Ramsey on the problem of paradoxes. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Filosofiya. Sotsiologia. Politologiya – Tomsk State University Journal of Philosophy, Sociology and Political Science.* 43. pp. 101–110. (In Russian). DOI: 10.17223/1998863X/43/9

4. Ladov, V.A. (2018) Critical analysis of the hierarchical approach to the solution of the problem of paradoxes. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Filosofiya. Sotsiologia. Politologiya – Tomsk State University Journal of Philosophy, Sociology and Political Science.* 44. pp. 11–24. (In Russian). DOI: 10.17223/1998863X/44/2

5. Nekhaev, A.V. (2018) The truth about "truth". *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Filosofiya. Sotsiologia. Politologiya – Tomsk State University Journal of Philosophy, Sociology and Political Science.* 45. pp. 34–46. (In Russian). DOI: 10.17223/1998863X/45/4

6. Russel, B. (2007) *Vvedenie v matematicheskuyu filosofiyu* [Introduction to Mathematical Philosophy]. Translated from English. Novosibirsk: Sib. univ. izd-vo.

7. Priest, G. (1997) Yablo's paradox. *Analysis*. 57(4). pp. 236–242. DOI: 10.1111/1467-8284.00081

8. Yablo, S. (2006) Circularity and Paradox. In: Bolander, Th., Hendricks, V.F. & Pedersen, S.A. (eds) *Self-Reference*. Stanford. pp. 165–183.

9. Bueno, O. & Colyvan, M. (2003) Paradox without Satisfaction. *Analysis.* 63(2). pp. 152–156. DOI: 10.1111/1467-8284.00026

10. Russel, B. (2007) *Vvedenie v matematicheskuyu filosofiyu* [Introduction to Mathematical Philosophy]. Translated from English. Novosibirsk: Sib. univ. izd-vo.

11. Kripke, S. (2010) *Vitgenshteyn o pravilakh i individual'nom yazyke* [Wittgenstein on Rules and Individual Language]. Translated from English. Moscow: Kanon+. S. 206–254.

12. Sorensen, R.A. (1998) Yablo's Paradox and Kindred Infinite Liars. *Mind.* 107. pp. 137–155. DOI: 10.1093/mind/107.425.137

13. Beall, J.C. (2001) Is Yablo's Paradox Non-Circular? *Analysis.* 61(3). pp. 176–187. DOI: 10.1111/1467-8284.00292

14. Ramsey, F.P. (2011) *Filosofskie raboty* [Philosophical works]. Translated from English. Moscow: Kanon+. pp. 16–86.