УДК 512.57 MSC 15A69
DOI 10.17223/19988621/61/2

М.А. Приходовский

КРИТЕРИЙ БИНАРНОЙ РАЗЛОЖИМОСТИ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ОПЕРАЦИИ

Исследуется свойство разложимости операции, не являющейся бинарной, в композицию бинарных операций. Получены необходимые и достаточные условия, которым должен удовлетворять структурный тензор 3-арной алгебраической операции для того, чтобы эта операция являлась бинарно-разложимой.

Ключевые слова: *бинарная операция, n-арная операция, тензор, бинарная разложимость.*

Как правило, чаще всего в алгебре изучаются унарные и бинарные операции. Множество работ посвящено исследованиям групп гомоморфизмов $Hom(A,B)$ и колец эндоморфизмов $E(A)$, напр. [1–3]. Также известна группа умножений $Mult(A)$. При изучении гиперкомплексных числовых систем и конечномерных алгебр тоже идёт речь о бинарных операциях. Конечномерные алгебры тесно связаны с группой $Mult(A)$. Однако, кроме них, существуют и n-арные алгебраические операции, причём это вовсе не редко используемые абстракции, лишённые геометрического смысла, а напротив, довольно часто встречающиеся в геометрии. Так, к примеру, обобщённое векторное произведение в пространстве R^{n+1}, в результате которого может быть образован общий перпендикуляр к исходным n векторам, является n-арной операцией.

Представим некоторый обзор работ, связанных с n-арными операциями. Несмотря на то, что n-арные группы занимают в алгебре не столь значительное место, как группы с обычными бинарными операциями, тем не менее присутствует довольно большая серия работ по данной тематике. В основном исследования движутся по пути обобщения некоторых свойств, ранее известных для групп с бинарными операциями [4–13]. Эта тематика развивается ещё с первой половины XX века [4]. Также существует множество работ зарубежных авторов, например [6–8]. В XXI веке n-арные группы изучаются в Белоруссии (Гальмак А.М. и другие) [9–13].

Несмотря на обилие работ по обобщениям различных свойств на n-арный случай, непосредственно самим взаимосвязям между n-арной и бинарными операциями посвящено мало работ, и данная статья, следует надеяться, заполнит этот пробел. Бинарные алгебраические операции наиболее изучены. В связи с этим, естественно, возникает вопрос, какие из n-арных операций сводятся к композиции бинарных.

Автором исследовались некоторые свойства n-арных алгебраических операций [14]. Были найдены примеры бинарно-неразложимых операций и поставлен вопрос о нахождении необходимых и достаточных условий бинарной разложимости. В данной статье получает развитие предложенный автором в [15] матричнотензорный подход, а также решаются некоторые из проблем, поставленных в [14]. Исторически сложившееся использование символьной таблицы умножения (вместо структурного тензора) при построении гиперкомплексных систем и конечномерных алгебр, до настоящего времени присутствующее в данной области, не позволило бы ставить и решать подобного рода задачи. Таким образом, можно с уверенностью предположить, что данное исследование обладает новизной.

Операция $f(a,b,c)$ называется бинарно-разложимой, если существуют две такие бинарные операции g,h, что $f(a,b,c) = h(g(a,b),c)$. Отдельный интерес представляет изучение необходимых и достаточных условий бинарной разложимости полилинейных операций в связи с тем, что всякое нелинейное отображение из $f : R^n \to R^n$ представимо в виде обобщённого ряда Тейлора, состоящего из полилинейных отображений. В данной работе ставится задача выполнить такую базовую задачу: найти необходимые и достаточные условия, которым должен удовлетворять структурный тензор трилинейной операции так, что существует пара билинейных операций, композицией которых является исходная трилинейная операция.

Пусть трилинейная алгебраическая операция в R^n задана с помощью своего структурного тензора. Каждой тройке базисных векторов e_i, e_j, e_k поставлен в соответствие вектор $\sum_{s=1}^{n} \gamma_{ijks} e_s$. Таким образом, имеется 4-мерная матрица C порядка n с элементами γ_{ijks}. Пусть существуют две билинейные операции g и h, заданные матрицами A и B соответственно. При этом матрица A состоит из элементов α_{ijk} таким образом, что

$$g(e_i, e_j) = \sum_{m=1}^{n} \alpha_{ijm} e_m ,$$

а для матрицы B и её элементов β_{mks} соответственно выполняется

$$h(e_m, e_k) = \sum_{s=1}^{n} \beta_{mks} e_s .$$

Тогда из равенства $f\left(e_i, e_j, e_k\right) = h\left(g\left(e_i, e_j\right), e_k\right)$ следует

$$h\left(\sum_{m=1}^{n} \alpha_{ijm} e_m, e_k\right) = \sum_{m=1}^{n} \alpha_{ijm} h(e_m, e_k) = \sum_{m=1}^{n} \alpha_{ijm} \left(\sum_{s=1}^{n} \beta_{mks} e_s\right) = \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{m=1}^{n} \alpha_{ijm} \beta_{mks}\right) e_s .$$

Таким образом, $\sum_{s=1}^{n} \gamma_{ijks} e_s = \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{m=1}^{n} \alpha_{ijm} \beta_{mks}\right) e_s$ для всякого $s = 1,...,n$.

В итоге, имеется n^4 равенств: $\sum_{m=1}^{n} \alpha_{ijm} \beta_{mks} = \gamma_{ijks}$.

Нахождение чисел $\alpha_{ijm}, \beta_{mks}$ возможно в данном случае с помощью приближённого решения получившейся системы нелинейных уравнений, содержащей n^4 уравнений и $2n^3$ неизвестных. Однако итерационные методы не могут дать ответ о существовании или не существовании точного решения. Поэтому наибольший интерес представляет не приближённое, а точное решение, а также способ находить однозначный ответ о существовании или не существовании бинарного разложения, зная структуру матрицы, состоящей из коэффициентов γ_{ijks}. Для нахождения такого критерия используем некоторые взаимосвязи между уравнениями в данной системе, возникающие вследствие специфики нелинейных уравнений этой системы.

Определение. Пусть C – четырёхмерная матрица, задающая трилинейную операцию в R^n. Её развёрткой назовём матрицу Ω порядка n^2, построенную следующим образом: в каждой строке содержатся все элементы того или иного двумерного сечения матрицы C, т. е. все элементы, полученные при фиксировании двух последних индексов. В столбце при этом расположены элементы из двумерного сечения при двух других фиксированных индексах:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{1111} & \cdots & \gamma_{1n11} \\ & & \\ \gamma_{111n} & & \gamma_{1n1n} \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} \gamma_{n111} & \cdots & \gamma_{nn11} \\ & & \\ \gamma_{n11n} & & \gamma_{nn1n} \end{pmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{pmatrix} \gamma_{11n1} & \cdots & \gamma_{1nn1} \\ & & \\ \gamma_{11nn} & & \gamma_{1nnn} \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} \gamma_{n1n1} & \cdots & \gamma_{nnn1} \\ & & \\ \gamma_{n1nn} & & \gamma_{nnnn} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Теорема. Трилинейная операция, заданная матрицей C, состоящей из структурных констант γ_{ijks}, является разложимой в композицию двух билинейных тогда и только тогда, когда развёртка матрицы C является матрицей ранга не более n.

Доказательство.

1. *Необходимость*. Запишем какие-либо n^2 из n^4 имеющихся уравнений, заранее задавая некоторые i, j, изменяя при этом лишь k, m. Если существуют такие две трёхмерные матрицы A, B, что выполняются равенства $\sum_{m=1}^{n} \alpha_{ijm}\beta_{mks} = \gamma_{ijks}$, то для любых i, j от 1 до n верно

$$\begin{cases} \alpha_{ij1}\beta_{111} + \ldots + \alpha_{ijn}\beta_{n11} = \gamma_{ij11}, \\ \ldots \\ \alpha_{ij1}\beta_{11n} + \ldots + \alpha_{ijn}\beta_{n1n} = \gamma_{ij1n}, \end{cases}$$

$$\ldots$$

$$\begin{cases} \alpha_{ij1}\beta_{1n1} + \ldots + \alpha_{ijn}\beta_{nn1} = \gamma_{ijn1}, \\ \ldots \\ \alpha_{ij1}\beta_{1nn} + \ldots + \alpha_{ijn}\beta_{nnn} = \gamma_{ijnn}. \end{cases}$$

В каждой из таких систем участвуют все n^3 элементов β. Если при этом рассматривать элементы β в качестве коэффициентов, каждая такая система равенств может рассматриваться как система линейных уравнений на n неизвестных $\alpha_{ij1}, \ldots, \alpha_{ijn}$, состоящая из n^2 уравнений. Ранг основной матрицы этой системы, очевидно, меньше или равен n, так как здесь всего n столбцов. Существуют базисные строки в количестве меньше или равном, чем n. Линейная зависимость между векторами-строками выражается с помощью некоторого набора коэффициентов K_{ms}. Для удобства записи расположим координаты этих n^2 векторов по столбцам:

$$\left(K_{11}\begin{pmatrix}\beta_{111}\\ \vdots\\ \beta_{n11}\end{pmatrix}+\ldots+K_{1n}\begin{pmatrix}\beta_{11n}\\ \vdots\\ \beta_{n1n}\end{pmatrix}\right)+\ldots+\left(K_{n1}\begin{pmatrix}\beta_{1n1}\\ \vdots\\ \beta_{nn1}\end{pmatrix}+\ldots+K_{nn}\begin{pmatrix}\beta_{1nn}\\ \vdots\\ \beta_{nnn}\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

Но в этом случае ранг расширенной матрицы должен быть равен рангу основной матрицы, то есть эта линейная зависимость должна сохраняться и для строк расширенной матрицы. В таком случае для любых $i, j = 1,\ldots,n$ верно

$$\left(K_{11}\gamma_{ij11}+\ldots+K_{1n}\gamma_{ij1n}\right)+\ldots+\left(K_{n1}\gamma_{ijn1}+\ldots+K_{nn}\gamma_{ijnn}\right)=0.$$

При этом данная зависимость распространяется на все столбцы матрицы Ω, ведь для элементов β всегда будут одни и те же коэффициенты K_{ms}, независимо от $i, j = 1,\ldots,n$. Таким образом, имеет место линейная зависимость строк матрицы Ω, определяемая коэффициентами K_{ms}. Ранг системы строк матрицы Ω в таком случае равен рангу основной матрицы, определяемой коэффицентами β, а значит, он меньше или равен n. Необходимость доказана.

2. *Достаточность*. Пусть ранг матрицы Ω меньше или равен n и пусть для определённости базисный минор расположен в первых n столбцах. Укажем способ построения матриц A и B. Система нелинейных уравнений может иметь бесконечно много решений, поэтому, если мы зафиксируем часть неизвестных и укажем точный способ вычисления остальных, этого будет достаточно для существования хотя бы одного решения. Зададим одно сечение 3-мерной матрицы A в количестве n^2 элементов таким способом:

$$\begin{pmatrix}\alpha_{111} & \cdots & \alpha_{11n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{1n1} & \cdots & \alpha_{1nn}\end{pmatrix}=E.$$

Тогда для первой системы имеем

$$\begin{array}{ccc}
\begin{cases}\alpha_{111}\beta_{111}+\ldots+\alpha_{11n}\beta_{n11}=\gamma_{1111},\\ \ldots\\ \alpha_{111}\beta_{11n}+\ldots+\alpha_{11n}\beta_{n1n}=\gamma_{111n},\end{cases} & & \begin{cases}\beta_{111}+0\ldots+0=\gamma_{1111},\\ \ldots\\ \beta_{11n}+0\ldots+0=\gamma_{111n},\end{cases}\\
\ldots & \Rightarrow & \ldots\\
\begin{cases}\alpha_{111}\beta_{1n1}+\ldots+\alpha_{11n}\beta_{nn1}=\gamma_{11n1},\\ \ldots\\ \alpha_{111}\beta_{1nn}+\ldots+\alpha_{11n}\beta_{nnn}=\gamma_{11nn},\end{cases} & & \begin{cases}\beta_{1n1}+0\ldots+0=\gamma_{11n1},\\ \ldots\\ \beta_{1nn}+0\ldots+0=\gamma_{11nn}.\end{cases}
\end{array}$$

Отсюда получаем значения первых n^2 из n^3 элементов матрицы B.

Изменяя индекс j от 1 до n, с помощью n подобных систем получим в итоге значения всех n^3 элементов матрицы B. Последняя из систем равенств, к примеру, имеет вид

$$\begin{cases} \alpha_{1n1}\beta_{111}+...+\alpha_{1nn}\beta_{n11}=\gamma_{1n11}, \\ ... \\ \alpha_{1n1}\beta_{11n}+...+\alpha_{1nn}\beta_{n1n}=\gamma_{1n1n}, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0+...+0+\beta_{n11}=\gamma_{1n11}, \\ ... \\ 0+...+0+\beta_{n1n}=\gamma_{1n1n}, \end{cases}$$
$$... \qquad \Rightarrow \qquad ...$$
$$\begin{cases} \alpha_{1n1}\beta_{1n1}+...+\alpha_{1nn}\beta_{nn1}=\gamma_{1nn1}, \\ ... \\ \alpha_{1n1}\beta_{1nn}+...+\alpha_{1nn}\beta_{nnn}=\gamma_{1nnn}, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0+...+0+\beta_{nn1}=\gamma_{1nn1}, \\ ... \\ 0+...+0+\beta_{nn1}=\gamma_{1nnn}. \end{cases}$$

Далее, зная матрицу B, вычислим оставшиеся элементы матрицы A (одно её сечение мы заранее задали с помощью чисел 0 и 1).

Основная матрица каждой такой системы состоит из первых n столбцов матрицы Ω, а правая часть системы – какой-либо столбец этой же матрицы Ω, ранг которой меньше или равен n. Каждая такая система совместна, и можно найти значения $\left(\alpha_{ij1},...,\alpha_{ijn}\right)$ для заданных номеров i, j.

Пара чисел i, j определяет переменные $\left(\alpha_{ij1},...,\alpha_{ijn}\right)$ в системе уравнений, при этом правая часть – столбец матрицы Ω, такой, что первыми двумя индексами элемента γ являются i, j. Изначально мы присваивали значения элементам $\left(\alpha_{111},...,\alpha_{11n}\right)$, ..., $\left(\alpha_{1n1},...,\alpha_{1nn}\right)$, то есть пары i, j были от $(1,1)$ до $(1,n)$, потому что полагали базисный минор находящимся в первых n столбцах матрицы Ω. Если же он расположен иначе, то первоначальное присвоение будет производиться для другой совокупности из n^2 элементов матрицы A, после чего нахождение остальных элементов производится аналогичным образом.

Итак, если ранг матрицы Ω, построенной для 3-арной операции, меньше или равен n, то существуют две бинарные операции, в композицию которых разложима исходная 3-арная операция. Достаточность доказана. □

Таким образом, для получения ответа о бинарной разложимости той или иной трилинейной операции достаточно найти ранг матрицы Ω. Проблема определения наличия бинарного разложения может быть решена без использования приближённых методов решения систем нелинейных уравнений, данная проблема сводится к линейным системам.

Пример. Рассмотрим пример из [5], докажем бинарную неразложимость способом, полученным в данной работе. Рассматривалось обобщённое векторное полипроизведение в пространстве R^4. Получающийся результат такой операции – вектор, ортогональный всем трём исходным и вычисляемый с помощью определителя следующим образом:

$$\omega(x,y,z)=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ i & j & k & l \end{vmatrix}.$$

При этом для базисных элементов i, j, k, l выполняются равенства:

$$\omega(i,j,k)=\omega(j,k,i)=\omega(k,i,j)=l,\ \omega(j,i,k)=\omega(i,k,j)=\omega(k,j,i)=-l,$$
$$\omega(k,j,l)=\omega(l,k,j)=\omega(j,l,k)=i,\ \omega(j,k,l)=\omega(k,l,j)=\omega(l,j,k)=-i,$$
$$\omega(k,l,i)=\omega(l,i,k)=\omega(i,k,l)=j,\ \omega(l,k,i)=\omega(i,l,k)=\omega(k,i,l)=-j,$$
$$\omega(i,l,j)=\omega(l,j,i)=\omega(j,i,l)=k,\ \omega(l,i,j)=\omega(i,j,l)=\omega(j,l,i)=-k.$$

Таким образом, 24 из 64 произведений отличны от 0, остальные соответствуют наборам элементов, содержащим хотя бы пару совпадающих, и поэтому равны 0. Тогда развёртка тензора для этой операции является матрицей порядка 16, в общем виде она выглядит так:

$$\begin{pmatrix}
\begin{pmatrix}\gamma_{1111} & \gamma_{1211} & \gamma_{1311} & \gamma_{1411}\\ \gamma_{1112} & \gamma_{1212} & \gamma_{1312} & \gamma_{1412}\\ \gamma_{1113} & \gamma_{1213} & \gamma_{1313} & \gamma_{1413}\\ \gamma_{1114} & \gamma_{1214} & \gamma_{1314} & \gamma_{1414}\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix}\gamma_{2111} & \gamma_{2211} & \gamma_{2311} & \gamma_{2411}\\ \gamma_{2112} & \gamma_{2212} & \gamma_{2312} & \gamma_{2412}\\ \gamma_{2113} & \gamma_{2213} & \gamma_{2313} & \gamma_{2413}\\ \gamma_{2114} & \gamma_{2214} & \gamma_{2314} & \gamma_{2414}\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix}\gamma_{3111} & \gamma_{3211} & \gamma_{3311} & \gamma_{3411}\\ \gamma_{3112} & \gamma_{3212} & \gamma_{3312} & \gamma_{3412}\\ \gamma_{3113} & \gamma_{3213} & \gamma_{3313} & \gamma_{3413}\\ \gamma_{3114} & \gamma_{3214} & \gamma_{3314} & \gamma_{3414}\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix}\gamma_{4111} & \gamma_{4211} & \gamma_{4311} & \gamma_{4411}\\ \gamma_{4112} & \gamma_{4212} & \gamma_{4312} & \gamma_{4412}\\ \gamma_{4113} & \gamma_{4213} & \gamma_{4313} & \gamma_{4413}\\ \gamma_{4114} & \gamma_{4214} & \gamma_{4314} & \gamma_{4414}\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}\gamma_{1121} & \gamma_{1221} & \gamma_{1321} & \gamma_{1421}\\ \gamma_{1122} & \gamma_{1222} & \gamma_{1322} & \gamma_{1422}\\ \gamma_{1123} & \gamma_{1223} & \gamma_{1323} & \gamma_{1423}\\ \gamma_{1124} & \gamma_{1224} & \gamma_{1324} & \gamma_{1424}\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix}\gamma_{2121} & \gamma_{2221} & \gamma_{2321} & \gamma_{2421}\\ \gamma_{2122} & \gamma_{2222} & \gamma_{2322} & \gamma_{2422}\\ \gamma_{2123} & \gamma_{2223} & \gamma_{2323} & \gamma_{2423}\\ \gamma_{2124} & \gamma_{2224} & \gamma_{2324} & \gamma_{2424}\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix}\gamma_{3121} & \gamma_{3221} & \gamma_{3321} & \gamma_{3421}\\ \gamma_{3122} & \gamma_{3222} & \gamma_{3322} & \gamma_{3422}\\ \gamma_{3123} & \gamma_{3223} & \gamma_{3323} & \gamma_{3423}\\ \gamma_{3124} & \gamma_{3224} & \gamma_{3324} & \gamma_{3424}\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix}\gamma_{4121} & \gamma_{4221} & \gamma_{4321} & \gamma_{4421}\\ \gamma_{4122} & \gamma_{4222} & \gamma_{4322} & \gamma_{4422}\\ \gamma_{4123} & \gamma_{4223} & \gamma_{4323} & \gamma_{4423}\\ \gamma_{4124} & \gamma_{4224} & \gamma_{4324} & \gamma_{4424}\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}\gamma_{1131} & \gamma_{1231} & \gamma_{1331} & \gamma_{1431}\\ \gamma_{1132} & \gamma_{1232} & \gamma_{1332} & \gamma_{1432}\\ \gamma_{1133} & \gamma_{1233} & \gamma_{1333} & \gamma_{1433}\\ \gamma_{1134} & \gamma_{1234} & \gamma_{1334} & \gamma_{1434}\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix}\gamma_{2131} & \gamma_{2231} & \gamma_{2331} & \gamma_{2431}\\ \gamma_{2132} & \gamma_{2232} & \gamma_{2332} & \gamma_{2432}\\ \gamma_{2133} & \gamma_{2233} & \gamma_{2333} & \gamma_{2433}\\ \gamma_{2134} & \gamma_{2234} & \gamma_{2334} & \gamma_{2434}\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix}\gamma_{3131} & \gamma_{3231} & \gamma_{3331} & \gamma_{3431}\\ \gamma_{3132} & \gamma_{3232} & \gamma_{3332} & \gamma_{3432}\\ \gamma_{3133} & \gamma_{3233} & \gamma_{3333} & \gamma_{3433}\\ \gamma_{3134} & \gamma_{3234} & \gamma_{3334} & \gamma_{3434}\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix}\gamma_{4131} & \gamma_{4231} & \gamma_{4331} & \gamma_{4431}\\ \gamma_{4132} & \gamma_{4232} & \gamma_{4332} & \gamma_{4432}\\ \gamma_{4133} & \gamma_{4233} & \gamma_{4333} & \gamma_{4433}\\ \gamma_{4134} & \gamma_{4234} & \gamma_{4334} & \gamma_{4434}\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}\gamma_{1141} & \gamma_{1241} & \gamma_{1341} & \gamma_{1441}\\ \gamma_{1142} & \gamma_{1242} & \gamma_{1342} & \gamma_{1442}\\ \gamma_{1143} & \gamma_{1243} & \gamma_{1343} & \gamma_{1443}\\ \gamma_{1144} & \gamma_{1244} & \gamma_{1344} & \gamma_{1444}\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix}\gamma_{2141} & \gamma_{2241} & \gamma_{2341} & \gamma_{2441}\\ \gamma_{2142} & \gamma_{2242} & \gamma_{2342} & \gamma_{2442}\\ \gamma_{2143} & \gamma_{2243} & \gamma_{2343} & \gamma_{2443}\\ \gamma_{2144} & \gamma_{2244} & \gamma_{2344} & \gamma_{2444}\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix}\gamma_{3141} & \gamma_{3241} & \gamma_{3341} & \gamma_{3441}\\ \gamma_{3142} & \gamma_{3242} & \gamma_{3342} & \gamma_{3442}\\ \gamma_{3143} & \gamma_{3243} & \gamma_{3343} & \gamma_{3443}\\ \gamma_{3144} & \gamma_{3244} & \gamma_{3344} & \gamma_{3444}\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix}\gamma_{4141} & \gamma_{4241} & \gamma_{4341} & \gamma_{4441}\\ \gamma_{4142} & \gamma_{4242} & \gamma_{4342} & \gamma_{4442}\\ \gamma_{4143} & \gamma_{4243} & \gamma_{4343} & \gamma_{4443}\\ \gamma_{4144} & \gamma_{4244} & \gamma_{4344} & \gamma_{4444}\end{pmatrix}
\end{pmatrix}.$$

Отличными от нуля являются лишь те элементы, где нет двух совпадающих индексов. Так, например, $\omega(i,j,k) = l$, или в других обозначениях $\omega(e_1, e_2, e_3) = e_4 = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 1e_4$, вследствие чего $\gamma_{1231} = \gamma_{1232} = \gamma_{1233} = 0$, $\gamma_{1234} = 1$. Аналогично строятся структурные константы и для остальных произведений. В итоге для исследуемой операции эта матрица имеет вид

$$\Omega = \begin{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}
\end{pmatrix}.$$

Перечислим, где расположены ненулевые элементы:

2-й и 5-й столбцы: 12, 15 строки, 3-й и 9-й столбцы: 8, 14 строки,
4-й и 13-й столбцы: 7, 10 строки, 7-й и 10-й столбцы: 4, 13 строки,
8-й и 14-й столбцы: 3, 9 строки, 12-й и 15-й столбцы: 2, 5 строки.

Базисный минор состоит из 6 столбцов, ранг данной матрицы равен 6, что больше 4, поэтому операция, ей соответствующая, не может быть представлена в виде композиции двух бинарных.

Данный способ установления бинарной разложимости 3-арной операции является легко программируемым на любом алгоритмическом языке.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Krylov P.A.*, *Mikhalev A.V.*, *Tuganbaev A.A.* Endomorphism rings of abelian groups. Boston: Kluwer Acad. Publ., 2003.
2. *Крылов П.А.*, *Чехлов А.Р.* Абелевы группы без кручения с большим числом эндоморфизмов // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7. № 2. С. 194–207.
3. *Гриншпон С.Я.* О равенстве нулю группы гомоморфизмов абелевых групп // Изв. вузов. Математика. 1998. № 9. С. 42–46.
4. *Чунихин С.А.* К теории неассоциативных *n*-групп // ДАН СССР. 1945. Т. 48. № 1. С. 7–10.
5. *Сохацкий Ф.Н.* Об ассоциативности многоместных операций // Дискретная математика. 1992. № 4. С. 66–84.
6. *Dudek W.*, *Głazek K.*, *Gleichgewicht B.* A note on the axioms of *n*-groups // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. 1977. V. 29. P. 195–202.
7. *Głazek K.* Bibliographi of *n*-groups (poliadic groups) and same group like *n*-ary sistems // Proc. of the sympos. *n*-ary structures. Skopje, 1982. P. 259–289.
8. *Uvsan J.* n-Groups in the light of the neutral operations // Mathematika Moravica. 2006. Special Vol. 162 p.
9. *Гальмак А.М.* *n*-Арные группы // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2007. Т. 4. № 2(8). С. 76–95.
10. *Гальмак А.М.*, *Щучкин Н.А.* *n*-Арные аналоги коммутанта группы // Чебышевский сборник. 2009. Т. 10. № 2 (30). С. 4–9.
11. *Кусов В.М.*, *Щучкин Н.А.* Свободные абелевы полуциклические *n*-арные группы // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12. № 2 (38). С. 68–76.
12. *Щучкин Н.А.* Свободные абелевы *n*-арные группы // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12. № 2 (38). С. 163–170.
13. *Кусов В.М.*, *Щучкин Н.А.* Эндоморфизмы абелевых полуциклических *n*-арных групп // Информатика и кибернетика. 2018. № 1 (11). С. 65–75.
14. *Приходовский М.А.* О некоторых классах *n*-арных алгебраических операций // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 2(6). С. 48–54.
15. *Приходовский М.А.* Применение многомерных матриц для исследования гиперкомплексных чисел и конечномерных алгебр // Вестник ТГУ. 2004. № 284. С. 27–30.

Статья поступила 30.03.2019 г.

Prikhodovsky M.A. (2019) CRITERION FOR BINARY DECOMPOSABILITY OF AN ALGEBRAIC OPERATION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 61. pp. 11–18

DOI 10.17223/19988621/61/2

Keywords: binary operation, *n*-ary operation, tensor, binary decomposability.

In this article, the author considers *n*-ary algebraic operations and their properties. There is a problem to find out conditions under which a ternary operation can be decomposed into a composition of two binary ones. Not every third operation is decomposed into such a composition. An example of an indecomposable operation was built by the author earlier, in a previous article in 2009. Now the problem has been solved, a criterion that establishes the relationship between decomposability of a ternary operation into two binary operations and the rank of the auxiliary matrix which can be constructed has been proved.

Initially, each ternary operation is associated with a 4-dimensional matrix consisting of its structural constants. However, the idea is to reduce the calculation to flat matrices, for which such concepts as rank and determinant are well applied.

The resulting criterion can be widely used to construct computer programs that can answer questions about whether an operation is decomposable into a composition of two binary operations.

AMS Mathematical Subject Classification: 15A69

PRIHODOVSKY Mikhail Anatolyevich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, Russian Federation). E-mail: prihod1@yandex.ru

REFERENCES

1. Krylov P.A., Mikhalev A.V., Tuganbaev A.A. (2003) *Endomorphism rings of abelian groups*. Boston, Kluwer Acad. Publ.
2. Krylov P.A., Chekhlov A.R. (2001) Abelian torsion-free groups with a large number of endomorphisms. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* (Supplementary issues), suppl. 2. pp. 156–168
3. Grinshpon S.Ya. (1998) On the equality to zero of the homomorphism group of abelian groups. *Russian Mathematics* (Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Ser. Mat.) 42(9). pp. 39–43
4. Chunikhin S.A.(1945) To the theory of non-associative *n*-groups. *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 48(1). pp. 7–10.
5. Sokhatskii F.N. (1992) Ob assotsiativnosti mnogomestnykh operatsiy [On associativity of multiplace operations]. *Diskretnaya Matematika.* 4(1). pp. 66–84.
6. Dudek W., Głazek K., Gleichgewicht B. (1977) A note on the axioms of *n*-groups. *Colloq. Math Soc. J. Bolyai*. 29. pp. 195–202.
7. Głazek K. (1982) Bibliography of *n*-groups (polyadic groups) and the same group-like *n*-ary systems. *Proc. Symp. "n-Ary Structures", Skopje 1982*. pp. 259–289.
8. Uvsan J. (2006) *n*-Groups in the light of the neutral operations. *Mathematika Moravica*. *Special Vol.* 162 p.
9. Galmak A.M.(2007) *n*-Arnye gruppy [*n*-Ary groups]. *Giperkompleksnye chisla v geometrii i fizike – Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*. 4. 2(8). pp. 76–95.
10. Galmak A.M., Shchuchkin N.A. (2009) *n*-Arnyye analogi kommutanta gruppy [*n*-Ary analogues of the group commutant] *Chebyshevskiy sbornik*. 10. 2(30). pp. 4–9.
11. Kusov V.M., Schuchkin N.A. (2011) Svobodnyye abelevy polutsiklicheskiye *n*-arnyye gruppy [Free abelian *n*-ary groups defined by cyclic groups]. *Chebyshevskiy sbornik* . 12(2). pp. 68–76.
12. Schuchkin N.A. (2011) Svobodnyye abelevy *n*-arnyye gruppy [The free abelian *n*-ary groups]. *Chebyshevskiy sbornik* . 12(2). pp. 163–170.
13. Kusov V.M., Schuchkin N.A. (2018) Endomorfizmy abelevykh polutsiklicheskikh *n*-arnykh grupp [Endomorphisms of abelian semicyclic *n*-ary groups]. *Informatics and Cybernetics*. 1(11). pp. 65–75.
14. Prikhodovskii M. A. (2009) O nekotorykh klassakh *n*-arnykh algebraicheskikh operatsiy [On some classes of *n*-ary algebraic operations]. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(6). pp. 48–54.
15. Prikhodovsky M.A. (2004) Primeneniye mnogomernykh matrits dlya issledovaniya giperkompleksnykh chisel i konechnomernykh algebr [Application of multidimensional matrixes for studying hypercomplex numbers and finite-dimension algebras] *Tomsk State University Journal*. 284. pp. 27–30.

Received: March 30, 2019