

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 519.2

DOI: 10.17223/19988605/48/1

В.В. Домбровский, Т.Ю. Пашинская

ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ ПРОГНОЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ МНОГОМЕРНОЙ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛЬЮ С МАРКОВСКИМ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ РЕЖИМОВ

Рассматривается класс дискретных стохастических систем с параметрами, эволюция которых описывается уравнением многомерной регрессии с марковскими скачками. Динамика экзогенных факторов описывается векторной авторегрессионной моделью с марковским переключением режимов порядка p (MS-VAR(p) модель). Синтезированы оптимальные стратегии прогнозирующего управления с учетом явных ограничений на управляющие переменные по обобщенному критерию, представляющему собой линейную комбинацию; а) ожидаемых значений квадратичных форм по состоянию и управлению; б) квадратичной формы ожидаемых значений состояний системы; с) линейной части – ожидаемого значения состояния системы.

Ключевые слова: стохастические системы; марковские скачки; многомерная модель регрессии; прогнозирующее управление; ограничения.

Моделями со случайными параметрами описывается широкий класс реальных динамических систем [1]. Одной из важных областей применения является финансовая инженерия, где такие модели используются для описания эволюции инвестиционного портфеля (см.: [2] и данный там обзор). Эффективным подходом к синтезу стратегий управления такими системами при ограничениях на состояния и / или управления является метод управления с прогнозированием, (прогнозирующее управление, управление с прогнозирующей моделью) [3, 4].

Прогнозирующему управлению дискретными системами, параметры которых изменяются в соответствии с эволюцией марковской цепи, посвящены работы [5–13].

В настоящей работе рассматривается класс дискретных стохастических систем с параметрами, эволюция которых описывается уравнением многомерной регрессии с марковскими скачками. Динамика экзогенных факторов описывается векторной авторегрессионной моделью с марковским переключением режимов порядка p (MS-VAR(p) модель [14]). Данный класс систем ранее в литературе не рассматривался. Синтезированы оптимальные стратегии прогнозирующего управления с учетом явных ограничений на управляющие переменные по обобщенному критерию, представляющему собой линейную комбинацию: а) ожидаемых значений квадратичных форм по состоянию и управлению; б) квадратичной формы ожидаемых значений состояний системы; с) линейной части – ожидаемого значения состояния системы. Изменяя весовые матрицы в обобщенном критерии, можно получать различные критерии управления: квадратичный критерий; критерий «mean-variance».

1. Постановка задачи

Пусть объект управления описывается уравнениями:

$$x(k+1) = Ax(k) + B[\eta(k+1)]u(k), \quad (1)$$

$$\eta(k+1) = \beta[\theta(k+1)]Y(k) + \lambda[\theta(k+1)]\omega(k+1), \quad (2)$$

$$Y(k+1) = \alpha[\theta(k+1)]Y(k) + \sigma[\theta(k+1)]W(k+1), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \alpha[\theta(k)] &= \sum_{i=1}^v \theta_i(k)\alpha^{(i)}, \quad \lambda[\theta(k)] = \sum_{i=1}^v \theta_i(k)\lambda^{(i)}, \\ \beta[\theta(k)] &= \sum_{i=1}^v \theta_i(k)\beta^{(i)}, \quad \sigma[\theta(k)] = \sum_{i=1}^v \theta_i(k)\sigma^{(i)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ – вектор состояния, $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ – вектор управления, $\eta(k) \in \mathbb{R}^{n_\eta}$ – вектор случайных параметров, $Y(k) = [y^T(k), y^T(k-1), \dots, y^T(k-p+1)]^T_{n_y p \times 1}$, $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$, $W(k) = [w^T(k), 0, 0, \dots, 0]^T_{n_y p \times 1}$, $w(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$, $\omega(k) \in \mathbb{R}^{n_\eta}$ – векторы белых шумов с нулевым средним и матрицами ковариаций $M\{w(k)w^T(k)\} = I_{n_y}$, $M\{\omega(k)\omega^T(k)\} = I_{n_\eta}$; I_{n_y}, I_{n_η} – единичные матрицы размерностей n_y, n_η соответственно; $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $\beta^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_\eta \times n_y}$, $\lambda^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_\eta \times n_\eta}$,

$$\alpha^{(i)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(i)} & \alpha_2^{(i)} & \dots & \alpha_{p-1}^{(i)} & \alpha_p^{(i)} \\ I_{n_y} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_y} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I_{n_y} & 0 \end{bmatrix}_{n_y p \times n_y p}, \quad \alpha_j^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y},$$

$\sigma^{(i)} = \text{diag}\{\varphi^{(i)}, 0, \dots, 0\}$, $\varphi^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$, $\theta_i(k+1)$ ($i = \overline{1, v}$) – компоненты вектора $\theta(k+1)$, $\theta(k) = [\delta(\tau(k), 1), \dots, \delta(\tau(k), v)]^T$, $\delta(\tau(k), j)$ – функция Кронекера; $\{\tau(k); k = 0, 1, 2, \dots\}$ – однородная дискретная марковская цепь с конечным множеством состояний $\{1, 2, \dots, v\}$, известной матрицей переходных вероятностей $P = [P_{ij}]$ и известным начальным распределением. Последовательности $w(k)$, $\omega(k)$ и $\theta(k)$ независимы. Матрица $B[\eta(k)]$ ($i = \overline{1, v}$) зависит от $\eta(k)$ линейно. Предполагается, что состояние марковской цепи в момент времени k доступно наблюдению. Уравнение (2) представляет собой уравнение множественной регрессии с экзогенными факторами $Y(k)$ и параметрами, зависящими от состояния цепи Маркова. Динамика экзогенных факторов $Y(k)$ описывается векторной авторегрессионной моделью с переключающимися режимами порядка p MS-VAR(p), представленной в виде процесса первого порядка вида (3) [14].

Вектор $\theta(k)$ допускает следующее представление в пространстве состояний [15]:

$$\theta(k+1) = P\theta(k) + v(k+1), \quad (5)$$

где $\{v(k)\}$ – последовательность мартингалов приращений.

На управляющие воздействия наложены ограничения:

$$u_{\min}(k) \leq S(k)u(k) \leq u_{\max}(k), \quad (6)$$

где $S(k) \in \mathbb{R}^{q \times n_u}$, $u_{\min}(k), u_{\max}(k) \in \mathbb{R}^q$.

Для управления системой (1)–(4) используем методологию управления с прогнозирующей моделью. На каждом шаге k будем определять закон управления системой (1)–(4) при ограничениях (6) из условия минимума критерия со скользящим горизонтом управления:

$$\begin{aligned} J(k+m/k) &= \sum_{i=1}^m M\{x^T(k+i)R_1(k+i)x(k+i) / x(k), \eta(k), Y(k), \theta(k)\} - \\ &- \sum_{i=1}^m M\{x^T(k+i) / x(k), \eta(k), Y(k), \theta(k)\} R_2(k+i) M\{x(k+i) / x(k), \eta(k), Y(k), \theta(k)\} - \end{aligned} \quad (7)$$

$$-\sum_{i=1}^m R_3(k+i)M\{x(k+i)/x(k), \eta(k), Y(k), \theta(k)\} + \\ + \sum_{i=0}^{m-1} M\{u^T(k+i/k)R(k+i)u(k+i/k)/x(k), \eta(k), Y(k), \theta(k)\},$$

по последовательности прогнозирующих управлений $U(k) = [u^T(k/k), \dots, u^T(k+m-1/k)]^T$, зависящих от состояния системы в момент времени k , m – горизонт прогноза, $R_1(k+i) \geq 0$, $R_2(k+i) \geq 0$, $R(k+i-1) > 0$ – весовые матрицы соответствующих размерностей, $R_3(k+i)$ – весовой вектор соответствующей размерности.

В качестве управления в момент времени k берем $u(k) = u(k/k)$. Тем самым получаем управление $u(k)$ как функцию состояний $\theta(k)$, $x(k)$, $\eta(k)$ и $Y(k)$, т.е. управление с обратной связью. Чтобы получить управление $u(k+1)$ на следующем шаге, процедура повторяется для следующего момента $k+1$ и т.д.

Изменяя весовые матрицы $R_1(k+i)$, $R_2(k+i)$, $R_3(k+i)$ в выражении (7), можно получать различные критерии управления системой (1)–(4).

Задача 2.1. Полагая $R_2(k+i) = 0$, имеем задачу прогнозирующего управления по квадратичному критерию:

$$J(k+m/k) = \sum_{i=1}^m M\{x^T(k+i)R_1(k+i)x(k+i) - \\ - R_3(k+i)x(k+i) + u^T(k+i-1/k)R(k+i-1)u(k+i-1/k)/x(k), \eta(k), Y(k), \theta(k)\}.$$

Данный критерий представляет собой линейную комбинацию квадратичной и линейной частей. При $R_3(k+i) = 0$ имеем классический квадратичный критерий.

Задача 2.2. Пусть скалярный выход системы (1)–(4)

$$z(k) = c(k)x(k),$$

где $c(k)$ – вектор соответствующей размерности. Полагая

$$R_1(k+i) = R_2(k+i) = \rho_1(k+i)c^T(k+i)c(k+i), \quad R_3(k+i) = \rho_2(k+i)c(k+i), \quad i = \overline{1, m},$$

где $\rho_1(k+i) \geq 0$, $\rho_2(k+i) \geq 0$ – скалярные величины, имеем задачу управления по критерию «mean-variance»:

$$J(k+m/k) = \sum_{i=1}^m \rho_1(k+i)M\left\{\left(z(k+i) - M\{z(k+i)/x(k), \eta(k), Y(k), \theta(k)\}\right)^2 / x(k), \eta(k), Y(k), \theta(k)\right\} - \\ - \sum_{i=1}^m \rho_2(k+i)M\{z(k+i)/x(k), \eta(k), Y(k), \theta(k)\} + \\ + \sum_{i=0}^{m-1} M\{u^T(k+i/k)R(k+i)u(k+i/k)/x(k), \eta(k), Y(k), \theta(k)\}.$$

Весовые коэффициенты $\rho_1(k+i)$, $\rho_2(k+i)$ характеризуют склонность к риску (risk-aversion) и задают соотношение между ожидаемым значением и вариацией выхода системы в момент времени $k+i$.

2. Синтез стратегий прогнозирующего управления

Рассмотрим следующие выражения:

$$J^{(1)}(k+m/k) = M\left\{\sum_{i=1}^m x^T(k+i)R_1(k+i)x(k+i) - R_3(k+i)x(k+i) + \right. \\ \left. + u^T(k+i-1/k)R(k+i-1)u(k+i-1/k)/x(k), \eta(k), Y(k), \theta(k)\right\}, \quad (8)$$

$$J^{(2)}(k+m/k) = \sum_{i=1}^m M\left\{x^T(k+i)/x(k), \eta(k), Y(k), \theta(k)\right\} R_2(k+i)M\{x(k+i)/x(k), \eta(k), Y(k), \theta(k)\}. \quad (9)$$

Очевидно, что

$$J(k+m/k) = J^{(1)}(k+m/k) - J^{(2)}(k+m/k). \quad (10)$$

Лемма 1. Выражение (8) для $J^{(1)}(k + m / k)$ может быть представлено в виде

$$J^{(1)}(k + m / k) = C^{(1)}[x(k), k] + [2x^T(k)G^{(1)}(k) - F(k)]U(k) + U^T(k)H^{(1)}(k)U(k), \quad (11)$$

где

$$C^{(1)}[x(k), k] = x^T(k)A^T Q_1(m-1)Ax(k) - Q_2(m-1)Ax(k), \quad (12)$$

блоки матриц $H^{(1)}(k)$, $G^{(1)}(k)$, $F(k)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} H_{tt}^{(1)}(k) &= R(k+t-1) + \\ &+ \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v B^T[\beta^{(i_1)}\alpha^{(i_{t-1})} \dots \alpha^{(i_1)}Y(k)]Q_1(m-t)\Theta^{(i_1, \dots, i_t)}(k)B[\beta^{(i_t)}\alpha^{(i_{t-1})} \dots \alpha^{(i_1)}Y(k)] + \\ &+ \sum_{i_t=1}^v M \left\{ B^T[\lambda^{(i_t)}\omega(k+t)]Q_1(m-t)\Theta^{(i_t)}(k)B[\lambda^{(i_t)}\omega(k+t)] \right\} + \\ &+ \sum_{j=1}^{t-1} \sum_{i_j=1}^v \dots \sum_{i_1=1}^v M \left\{ B^T[\beta^{(i_1)}\alpha^{(i_{t-1})} \dots \alpha^{(i_{j+1})}\sigma^{(i_j)}W(k+j)]Q_1(m-t)\Theta^{(i_1, \dots, i_t)}(k)B[\beta^{(i_t)}\alpha^{(i_{t-1})} \dots \alpha^{(i_{j+1})}\sigma^{(i_j)}W(k+j)] \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} H_{tf}^{(1)}(k) &= \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_f=1}^v B^T[\beta^{(i_1)}\alpha^{(i_{t-1})} \dots \alpha^{(i_1)}Y(k)](A^T)^{f-t} Q_1(m-f)\Theta^{(i_1, \dots, i_f)}(k)B[\beta^{(i_f)}\alpha^{(i_{f-1})} \dots \alpha^{(i_1)}Y(k)] + \\ &+ \sum_{j=1}^{t-1} \sum_{i_j=1}^v \dots \sum_{i_1=1}^v M \left\{ B^T[\beta^{(i_1)}\alpha^{(i_{t-1})} \dots \alpha^{(i_{j+1})}\sigma^{(i_j)}W(k+j)](A^T)^{f-t} \times \right. \\ &\times Q_1(m-f)\Theta^{(i_1, \dots, i_f)}(k)B[\beta^{(i_f)}\alpha^{(i_{f-1})} \dots \alpha^{(i_{j+1})}\sigma^{(i_j)}W(k+j)] \left. \right\}, f > t, \\ \sum_{j=1}^0 (\cdot) &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$H_{tf}^{(1)}(k) = (H_{ft}^{(1)}(k))^T, f < t, \quad (15)$$

$$G_t^{(1)}(k) = (A^t)^T Q_1(m-t) \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v B[\beta^{(i_1)}\alpha^{(i_{t-1})} \dots \alpha^{(i_1)}Y(k)]\Theta^{(i_1, \dots, i_t)}(k), \quad (16)$$

$$F_t(k) = Q_2(m-t) \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v B[\beta^{(i_1)}\alpha^{(i_{t-1})} \dots \alpha^{(i_1)}Y(k)]\Theta^{(i_1, \dots, i_t)}(k). \quad (17)$$

Последовательности матриц $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ ($t = \overline{1, m}$), $\Theta^{(i_t)}(k)$, $\Theta^{(i_1, \dots, i_f)}(k)$ ($t, f = \overline{1, m}$, $f > t$) определяются уравнениями:

$$Q_1(t) = R_1(k+m-t) + A^T Q_1(t-1)A, t = \overline{1, m}, Q_1(0) = R_1(k+m), \quad (18)$$

$$Q_2(t) = R_3(k+m-t) + Q_2(t-1)A, t = \overline{1, m}, Q_2(0) = R_3(k+m), \quad (19)$$

$$\Theta^{(i_1, \dots, i_f)}(k) = P_{i_f, i_{f-1}} P_{i_{f-1}, i_{f-2}} \dots P_{i_{t+1}, i_t} \theta_{i_t}(k+t/k), t = \overline{1, m-1}, f > t, \quad (20)$$

$$\Theta^{(i_t)}(k) = \theta_{i_t}(k+t/k), t = \overline{1, m}, i_t = \overline{1, v}, \quad (21)$$

где $\theta_{i_t}(k+t/k)$ – компонента вектора $\theta(k+t/k) = P^t \theta(k)$.

Доказательство. Выражая последовательно все $x(k+i)$ через $x(k)$ из (1), $\eta(k+i)$ через $\eta(k)$ из (2), $Y(k+i)$ через $Y(k)$ из (3), $\theta(k+i)$ через $\theta(k)$ из (5) и подставляя результат в (8), получим

$$\begin{aligned} J_1(k+m/k) &= x^T(k)A^T Q(m-1)Ax(k) + \\ &+ 2x^T(k) \sum_{t=1}^m (A^t)^T Q_1(m-t) \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v B[\beta^{(i_1)}\alpha^{(i_{t-1})} \dots \alpha^{(i_1)}Y(k)]\Theta^{(i_1, \dots, i_t)}(k) + \\ &+ \sum_{t=1}^m u^T(k+t-1/k) \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v B^T[\beta^{(i_1)}\alpha^{(i_{t-1})} \dots \alpha^{(i_1)}Y(k)]Q_1(m-t)\Theta^{(i_1, \dots, i_t)}(k)B[\beta^{(i_t)}\alpha^{(i_{t-1})} \dots \alpha^{(i_1)}Y(k)]u(k+t-1/k) + \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{t=1}^m u^T(k+t-1/k) \sum_{i_t=1}^v M \left\{ B^T[\lambda^{(i_t)} \omega(k+t)] Q_1(m-t) \Theta^{(i_t)}(k) B[\lambda^{(i_t)} \omega(k+t)] \right\} u(k+t-1/k) + \\
& + \sum_{t=1}^m u^T(k+t-1/k) \sum_{j=1}^{t-1} \sum_{i_j=1}^v \dots \sum_{i_1=1}^v M \left\{ B^T[\beta^{(i_t)} \alpha^{(i_{t-1})} \dots \alpha^{(i_{j+1})} \sigma^{(i_j)} W(k+j)] \times \right. \\
& \times Q_1(m-t) \Theta^{(i_j, \dots, i_t)}(k) B[\beta^{(i_t)} \alpha^{(i_{t-1})} \dots \alpha^{(i_{j+1})} \sigma^{(i_j)} W(k+j)] \left. \right\} u(k+t-1/k) + \\
& + 2 \sum_{t=1}^{m-1} \sum_{f=t+1}^m u^T(k+t-1/k) \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_f=1}^v B^T[\beta^{(i_t)} \alpha^{(i_{t-1})} \dots \alpha^{(i_1)} Y(k)] (A^T)^{f-t} \times \\
& \times Q_1(m-f) \Theta^{(i_1, \dots, i_f)}(k) B[\beta^{(i_f)} \alpha^{(i_{f-1})} \dots \alpha^{(i_1)} Y(k)] u(k+f-1/k) + \\
& + 2 \sum_{t=1}^{m-1} \sum_{f=t+1}^m u^T(k+t-1/k) \sum_{j=1}^{t-1} \sum_{i_j=1}^v \dots \sum_{i_f=1}^v M \left\{ B^T[\beta^{(i_t)} \alpha^{(i_{t-1})} \dots \alpha^{(i_{j+1})} \sigma^{(i_j)} W(k+j)] (A^T)^{f-t} \times \right. \\
& \times Q_1(m-f) \Theta^{(i_j, \dots, i_f)}(k) B[\beta^{(i_f)} \alpha^{(i_{f-1})} \dots \alpha^{(i_{j+1})} \sigma^{(i_j)} W(k+j)] \left. \right\} u(k+f-1/k) - \\
& - Q_2(m-1) A x(k) - \sum_{t=1}^m Q_2(m-t) \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v B[\beta^{(i_t)} \alpha^{(i_{t-1})} \dots \alpha^{(i_1)} Y(k)] \Theta^{(i_1, \dots, i_t)}(k) u(k+t-1/k) + \\
& + \sum_{t=1}^m u^T(k+t-1/k) R(k+t-1) u(k+t-1/k),
\end{aligned}$$

где $\sum_{j=1}^0 (\cdot) = 0$, последовательности матриц $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ ($t = \overline{0, m-1}$) определяются уравнениями (18)–

(19), матрицы $\Theta^{(i_t)}(k)$, $\Theta^{(i_1, \dots, i_f)}(k)$ ($f, t = \overline{1, m}$, $f > t$) определяются уравнениями (20)–(21).

Выражение (22) можно записать в матричной форме (11), где матрицы $G^{(1)}(k)$, $H^{(1)}(k)$, $F(k)$ имеют вид (13)–(17), $C^{(1)}[x(k), k]$ имеет вид (12). Лемма доказана.

Лемма 2. Выражение (9) для $J^{(2)}(k+m/k)$ может быть представлено в виде:

$$J^{(2)}(k+m/k) = C^{(2)}[x(k), k] + 2x^T(k)G^{(2)}(k)U(k) + U^T(k)H^{(2)}(k)U(k), \quad (23)$$

где

$$C^{(2)}[x(k), k] = x^T(k) \Psi^T \Delta(k+1) \Psi x(k), \quad (24)$$

$$G^{(2)}(k) = \Psi^T \Delta(k+1) \Phi(k), \quad (25)$$

$$H^{(2)}(k) = \Phi^T(k) \Delta(k+1) \Phi(k), \quad (26)$$

$$\Delta(k+1) = \text{diag}\{R_2(k+1), \dots, R_2(k+m)\},$$

блоки матриц $\Phi(k)$, Ψ имеют вид:

$$\Phi_{ft}(k) = A^{f-t} \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v B[\beta^{(i_t)} \alpha^{(i_{t-1})} \dots \alpha^{(i_1)} Y(k)] \Theta^{(i_1, \dots, i_t)}(k), \quad t, f = \overline{1, m}, \quad f \geq t, \quad (27)$$

$$\Phi_{ft}(k) = 0, \quad f < t, \quad (28)$$

$$\Psi_t = A^t, \quad t = \overline{1, m}, \quad (29)$$

где $\Theta^{(i_1, \dots, i_t)}(k)$ определяется выражениями (20)–(21).

Доказательство. Используя уравнения (1)–(4), получим

$$\begin{aligned}
& M\{x(k+t)/x(k), \eta(k), Y(k), \theta(k)\} = A^t x(k) + \\
& + \sum_{j=1}^t A^{t-j} \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_j=1}^v B[\beta^{(i_j)} \alpha^{(i_{j-1})} \dots \alpha^{(i_1)} Y(k)] \Theta^{(i_1, \dots, i_j)}(k) u(k+j-1/k), \quad t = \overline{1, m},
\end{aligned} \quad (30)$$

где матрицы $\Theta^{(i_1, \dots, i_j)}(k)$ ($j = \overline{1, m}$) определяются уравнениями (20)–(21).

Введем вектор

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} M\{x(k+1)/x(k), \eta(k), Y(k), \theta(k)\} \\ \dots \\ M\{x(k+m)/x(k), \eta(k), Y(k), \theta(k)\} \end{bmatrix}.$$

С учетом (30) динамика вектора $X(k+1)$ может быть записана в матричном виде:

$$X(k+1) = \Psi x(k) + \Phi(k)U(k), \quad (31)$$

где матрицы $\Phi(k)$, Ψ имеют вид (27)–(29).

Выражение (9) для $J^{(2)}(k+m/k)$ может быть записано в виде:

$$J^{(2)}(k+m/k) = X^T(k+1)\Delta(k+1)X(k+1), \quad (32)$$

где $\Delta(k+1) = \text{diag}\{R_2(k+1), \dots, R_2(k+m)\}$.

Подставляя (31) в (32), получим

$$J^{(2)}(k+m/k) = x^T(k)\Psi^T\Delta(k+1)\Psi x(k) + \\ + 2x^T(k)\Psi^T\Delta(k+1)\Phi(k)U(k) + U^T(k)\Phi^T(k)\Delta(k+1)\Phi(k)U(k). \quad (33)$$

Выражение (33) можно записать в виде (23), где матрицы $C^{(2)}[x(k), k]$, $G^{(2)}(k)$, $H^{(2)}(k)$ имеют вид (24)–(26) соответственно. Лемма доказана.

На основе лемм 1 и 2 можно показать, что задача прогнозирующего управления системой (1)–(4) по критерию (7) при ограничениях (6) сводится к задаче квадратичного программирования.

Теорема. Вектор прогнозирующих управлений $U(k)$ системой (1)–(4), минимизирующий критерий (7) при ограничениях (6), на каждом шаге k определяется из решения задачи квадратичного программирования с критерием вида:

$$Z(k+m/k) = [2x^T(k)G(k) - F(k)]U(k) + U^T(k)H(k)U(k), \quad (34)$$

при ограничениях

$$U_{\min}(k) \leq \bar{S}(k)U(k) \leq U_{\max}(k), \quad (35)$$

где

$$\bar{S}(k) = \text{diag}\{S(k), \dots, S(k+m-1)\}, \quad U_{\min}(k) = [u_{\min}^T(k), \dots, u_{\min}^T(k)]^T, \quad U_{\max}(k) = [u_{\max}^T(k), \dots, u_{\max}^T(k)]^T, \\ G(k) = G^{(1)}(k) - G^{(2)}(k), \quad H(k) = H^{(1)}(k) - H^{(2)}(k).$$

Оптимальное управление со скользящим горизонтом m в каждый момент времени k равно

$$u(k) = \begin{bmatrix} I_{n_u} & 0_{n_u} & \dots & 0_{n_u} \end{bmatrix} U(k), \quad (36)$$

где I_{n_u} – единичная матрица размерности n_u , 0_{n_u} – квадратная нулевая матрица размерности n_u .

Доказательство. Из (10), (11) и (23) следует, что критерий (7) может быть представлен в виде:

$$J(k+m/k) = C^{(1)}[x(k), k] - C^{(2)}[x(k), k] + \\ + 2x^T(k)[G^{(1)}(k) - G^{(2)}(k)]U(k) - F(k)U(k) + U^T(k)[H^{(1)}(k) - H^{(2)}(k)]U(k).$$

Очевидно, что задача минимизации критерия (37) эквивалентна задаче минимизации критерия (34), где удалены слагаемые, не зависящие от управлений. Таким образом, получаем, что задача минимизации критерия (7) по последовательности прогнозирующих управлений $U(k)$ эквивалентна задаче квадратичного программирования с критерием (34). Теорема доказана.

Заключение

В данной работе предложен метод синтеза стратегий прогнозирующего управления по обобщенному критерию для дискретных стохастических систем, динамика которых зависит от случайного процесса, описываемого уравнением многомерной регрессии с экзогенными факторами и параметрами.

рами, зависящими от состояния цепи Маркова. Динамика экзогенных факторов описывается MS-VAR(p) моделью. Изменяя весовые матрицы в обобщенном критерии, можно получать различные критерии управления: квадратичный критерий, критерий «mean-variance». Синтезированы оптимальные стратегии управления с учетом явных ограничений на управляющие воздействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Costa O.L.V., Fragoso M.D., Marques R.P. Discrete-time Markov jump linear systems. New York : Springer, 2005. 286 p.
2. Dombrovskii V., Obedko T. Feedback predictive control strategies for investment in the financial market with serially correlated returns subject to constraints and trading costs // Optimal control applications and methods. 2017. V. 38, No. 6. P. 908–921.
3. Mayne D.Q. Model predictive control: Recent developments and future promise // Automatica. 2014. V. 50, No.12. P. 2967–2986.
4. Farina M., Giulioni L., Scattolini R. Stochastic model predictive control with chance constraints : a review // Journal of Process Control. 2016. V. 44, No. 8. P. 53–67.
5. Домбровский В.В., Обедко Т.Ю. Управление с прогнозированием системами с марковскими скачками при ограничениях и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // Автоматика и телемеханика. 2011. № 5. С. 96–112.
6. Henandez-Medjias M.A., Sala A., Querol A., Arino C. Multiple-Horizon predictive control for Markov/switched linear systems // IFAC-PapersOnLine. 2015. V. 48 (23). P. 230–235.
7. Tonne J., Jilg M., Stursberg O. Constrained Model Predictive Control of High Dimensional Jump Markov Linear Systems // American Control Conference. Palmer House Hilton. July 1–3, Chicago, IL. 2015. P. 2993–2998.
8. Chitraganti S., Aberkane S., Aubrun C., Valencia-Palomo G., Dragan V. On control of discrete-time state-dependent jump linear systems with probabilistic constraints: a receding horizon approach // Systems & Control Letters. 2014. V. 74. P. 81–89.
9. Lu J., Xi Y., Li D. Stochastic model predictive control for probabilistically constrained Markovian jump linear systems with additive disturbance // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2017. P. 1–15.
10. Sala A., Henandez-Medjias M.A., Arino C. Stable receding-horizon scenario predictive control for Markov-jump linear systems // Automatica. 2017. V. 86. P. 121–128.
11. Patrinos P., Soparasakis P., Sarimveis H., Bemporad A. Stochastic model predictive control for constrained discrete-time Markovian switching systems // Automatica. 2014. V. 50, No. 10. P. 2504–2514.
12. Dombrovskii V.V., Obyedko T.Yu., Samorodova M. Model predictive control of constrained Markovian jump nonlinear stochastic systems and portfolio optimization under market frictions // Automatica. 2018. V. 87, No. 1. P. 61–68.
13. Домбровский В.В., Пашинская Т.Ю. Прогнозирующее управление системами с марковскими скачками и авторегрессионным мультипликативным шумом с марковским переключением режимов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2018. № 44. С. 4–9.
14. Krolzig H.-M. Markov Switching Vector Autoregressions. Modelling, Statistical Inference and Application to Business Cycle Analysis. Berlin : Springer, 1997. 357 p.
15. Elliott R.J., Aggoun L., Moore J.B. Hidden Markov models: Estimation and control. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 1995. 382 p.

Поступила в редакцию 22 ноября 2018 г.

Dombrovskii V.V., Pashinskaya T.Yu. (2019) OPTIMAL PREDICTIVE CONTROL STRATEGIES FOR SYSTEMS WITH RANDOM PARAMETERS DESCRIBED BY MULTIDIMENSIONAL MARKOV SWITCHING REGRESSION MODEL. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 48. pp. 4–12

DOI: 10.17223/19988605/48/1

Let the control object is described by the equations:

$$x(k+1) = Ax(k) + B[\eta(k+1)]u(k), \quad (1)$$

$$\eta(k+1) = \beta[\theta(k+1)]Y(k) + \lambda[\theta(k+1)]\omega(k+1), \quad (2)$$

$$Y(k+1) = \alpha[\theta(k+1)]Y(k) + \sigma[\theta(k+1)]W(k+1), \quad (3)$$

$$\alpha[\theta(k)] = \sum_{i=1}^v \theta_i(k) \alpha^{(i)}, \quad \lambda[\theta(k)] = \sum_{i=1}^v \theta_i(k) \lambda^{(i)}, \quad \beta[\theta(k)] = \sum_{i=1}^v \theta_i(k) \beta^{(i)}, \quad \sigma[\theta(k)] = \sum_{i=1}^v \theta_i(k) \sigma^{(i)}, \quad (4)$$

where $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ is the vector of state, $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ is the vector of control, $\eta(k) \in \mathbb{R}^{n_\eta}$ is a sequence of stochastic vectors, $Y(k) = [y^T(k), y^T(k-1), \dots, y^T(k-p+1)]^T$, $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$, $W(k) = [w^T(k), 0, 0, \dots, 0]^T_{n_y \times p \times 1}$, $w(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$, $\omega(k) \in \mathbb{R}^{n_\eta}$ are white noise vectors with zero mean and unique covariance matrices; $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $\beta^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_\eta \times n_y}$, $\lambda^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_\eta \times n_\eta}$,

$$\alpha^{(i)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(i)} & \alpha_2^{(i)} & \dots & \alpha_{p-1}^{(i)} & \alpha_p^{(i)} \\ I_{n_y} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_y} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I_{n_y} & 0 \end{bmatrix}_{n_y p \times n_y p}, \quad \alpha_j^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y},$$

$\sigma^{(i)} = \text{diag}\{\varphi^{(i)}, 0, \dots, 0\}$, $\varphi^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$, $\theta_i(k+1)$ ($i = \overline{1, v}$) are the components of the vector $\theta(k+1)$, $\theta(k) = [\delta(\tau(k), 1), \dots, \delta(\tau(k), v)]^T$, $\delta(\tau(k), j)$ is the Kronecker function; $\{\tau(k); k = 0, 1, 2, \dots\}$ is a finite-state discrete-time homogeneous Markov chain taking values in $\{1, 2, \dots, v\}$ with transition probability matrix $P = [P_{ij}]$. Sequences $w(k)$, $\omega(k)$, and $\theta(k)$ are independent. It is assumed that the state of Markov chain is observable at time k . All of the elements $B[\eta(k)]$ ($i = \overline{1, v}$) are assumed to be linear functions of $\eta(k)$. Equation (2) is a multivariate regression model with exogenous factors $Y(k)$ and regime-switching parameters. The dynamics of factors $Y(k)$ follows vector autoregression model with regime switching (MS VAR (p)) of order p represented in the form of MS VAR (1) model (Equation (3)).

We impose the following inequality constraints on the control inputs (element-wise inequality):

$$u_{\min}(k) \leq S(k)u(k) \leq u_{\max}(k); \quad S(k) \in \mathbb{R}^{q \times n_u}; \quad u_{\min}(k), \quad u_{\max}(k) \in \mathbb{R}^q. \quad (5)$$

For control of system (1)–(4), we synthesize the strategies with a predictive control model. At each step k , we minimize the following criterion with a receding horizon

$$\begin{aligned} J(k+m/k) = & \sum_{i=1}^m E\{x^T(k+i)R_1(k+i)x(k+i) / x(k), \eta(k), Y(k), \theta(k)\} - \\ & - \sum_{i=1}^m E\{x^T(k+i) / x(k), \eta(k), Y(k), \theta(k)\} R_2(k+i) E\{x(k+i) / x(k), \eta(k), Y(k), \theta(k)\} - \\ & - \sum_{i=1}^m R_3(k+i) E\{x(k+i) / x(k), \eta(k), Y(k), \theta(k)\} + \sum_{i=0}^{m-1} E\{u^T(k+i/k)R(k+i)u(k+i/k) / x(k), \eta(k), Y(k), \theta(k)\}, \end{aligned} \quad (6)$$

on trajectories of system (1)–(4) over the sequence of predictive controls $u(k/k), \dots, u(k+m-1/k)$ dependent on the system state at the moment k , under constraints (5); where $R_1(k+i) \geq 0$, $R_2(k+i) \geq 0$, $R(k+i) > 0$ are given symmetric weight matrices of corresponding dimensions; $R_3(k+i)$ is a given vector of corresponding dimension; m is the prediction horizon. Different cost functions can be obtained from criterion (6) after setting the coefficients $R_1(k+i)$, $R_2(k+i)$, and $R_3(k+i)$ to some appropriate values.

Problem 1. Taking $R_2(k+i)$ ($i = \overline{1, m}$), we have the MPC problem with quadratic criterion.

Problem 2. Let system (1)–(4) have a scalar output $z(k) = c(k)x(k)$, where $c(k)$ is a vector of appropriate dimension. Taking $R_1(k+i) = R_2(k+i) = \rho_1(k+i)c^T(k+i)c(k+i)$, $R_3(k+i) = \rho_2(k+i)c(k+i)$ ($i = \overline{1, m}$), where $\rho_1(k+i) \geq 0$, $\rho_2(k+i) \geq 0$ are scalar values, we have a mean-variance optimization problem.

Keywords: stochastic systems; Markov jumps; multidimensional regression; model predictive control; constraints.

DOMBROVSKII Vladimir Valentinovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: dombrovs@ef.tsu.ru

PASHINSKAYA Tatiana Yurievna (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: tatyana.obedko@mail.ru

REFERENCES

- Costa, O.L.V., Fragoso, M.D. & Marques, R.P. (2005) *Discrete-time Markov jump linear systems*. Springer: New York.
- Dombrovskii, V.V. & Obedko, T. (2017) Feedback predictive control strategies for investment in the financial market with serially correlated returns subject to constraints and trading costs. *Optimal Control Applications and Methods*. 38(6). pp. 908–921. DOI: 10.1002/oca.2296
- Mayne, D.Q. (2014) Model predictive control: Recent developments and future promise. *Automatica*. 50(12). pp. 2967–2986. DOI: 10.1016/j.automatica.2014.10.128
- Farina, M., Giulioni, L. & Scatolini, R. (2016) Stochastic model predictive control with chance constraints. A review. *Journal of Process Control*. 44(8). pp. 53–67.
- Dombrovskii, V.V. & Obedko, T.Yu. (2011) Predictive control of systems with Markovian jumps under constraints and its application to the investment portfolio optimization. *Automation and Remote Control*. 72(5). pp. 989–1003. DOI: 10.1134/S0005117911050079
- Henandez-Medjias, M.A., Sala, A., Querol, A. & Arino, C. (2015) Multiple-Horizon predictive control for Markov/switched linear systems. *IFAC-PapersOnLine*. vol. 48. no 23. pp. 230–235. DOI: 10.1016/j.ifacol.2015.11.288

7. Tonne, J., Jilg, M. & Stursberg, O. (2015) *Constrained Model Predictive Control of High Dimensional Jump Markov Linear Systems*. Chicago, IL, USA, Palmer House Hilton. pp. 2993–2998. DOI: 10.1109/ACC.2015.7171190
8. Chitraganti, S., Aberkane, S., Aubrun, C., Valencia-Palomo, G. & Dragan, V. (2014) On control of discrete-time state-dependent jump linear systems with probabilistic constraints: A receding horizon approach. *Systems & Control Letters*. 74. pp. 81–89. DOI: 10.1016/j.sysconle.2014.10.008
9. Lu, J., Xi, Y. & Li, D. (2017) Stochastic model predictive control for probabilistically constrained Markovian jump linear systems with additive disturbance. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. pp. 1–15. DOI: 10.1002/rnc.3971
10. Sala, A., Henandez-Medjias, M.A. & Arino, C. (2017) Stable receding-horizon scenario predictive control for Markov-jump linear systems. *Automatica*. 86. pp. 121–128. DOI: 10.1016/j.automatica.2017.07.032
11. Patrinos, P., Soparasakis, P., Sarimveis, H. & Bemporad, A. (2014) Stochastic model predictive control for constrained discrete-time Markovian switching systems. *Automatica*. 50(10). pp. 2504–2514. DOI: 10.1016/j.automatica.2014.08.031
12. Dombrovskii, V.V., Obyedko, T.Yu. & Samorodova, M. (2018) Model predictive control of constrained Markovian jump nonlinear stochastic systems and portfolio optimization under market frictions. *Automatica*. 87(1). pp. 61–68. DOI: 10.1016/j.automatica.2017.09.018
13. Dombrovskii, V.V. & Pashinskaya, T.Y. (2018) Predictive Control for Markov Jump Systems with Markov switching autoregressive multiplicative noise. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 44. pp. 4–9. (In Russian). DOI: 10.17223/19988605/44/1
14. Krolzig, H.-M. (1997) *Markov Switching Vector Autoregressions. Modelling, Statistical Inference and Application to Business Cycle Analysis*. Berlin: Springer.
15. Elliott, R.J., Aggoun, L. & Moore, J.B. (1995) *Hidden Markov Models: Estimation and Control*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.