

УДК 519.21

DOI: 10.17223/19988605/48/3

Л.А. Нежелская, Е.Ф. Сидорова

**ОЦЕНКА ДЛИТЕЛЬНОСТИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕГОСЯ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ
В КОРРЕЛИРОВАННОМ ОБОБЩЕННОМ СИНХРОННОМ ПОТОКЕ
ВТОРОГО ПОРЯДКА**

Рассматривается задача оценивания длительности непродлевающегося мертвого времени в обобщенном синхронном потоке событий второго порядка с использованием метода моментов. Оценивание выполнено с учетом того, что мертвое время является параметром плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке. С помощью модели потока, имитирующей его функционирование при искажающем факторе, исследуется качество оценок в рамках выбранных критериев.

Ключевые слова: обобщенный синхронный дважды стохастический поток второго порядка; непродлевающееся мертвое время; плотность вероятности; оценка параметра; метод моментов.

В настоящей статье проводится дальнейшее исследование относящегося к классу дважды стохастических потоков [1–8] и являющегося математической моделью поступающих в системы и сети массового обслуживания (СМО и СеМО) информационных потоков заявок [9] обобщенного синхронного потока событий второго порядка (далее потока), начатое в работах [10–12].

Режим функционирования как СМО, так и СеМО непосредственно зависит от параметров потока и состояния сопровождающего его процесса. Зачастую в реальных ситуациях эти характеристики либо лишь частично известны, либо неизвестны, либо изменяются со временем случайным образом, вследствие чего возникают задачи оценивания в произвольный момент времени состояний входящего потока (фильтрации его интенсивности) [10, 11, 13] и его параметров [12, 14, 15] по наблюдениям за ним. Математическая модель может также содержать искажающие факторы, к числу которых, в частности, относится мертвое время регистрирующих приборов [16, 17], порождаемое каждым зарегистрированным событием так, что последующие события исходного потока, наступившие в течение обозначенного периода времени, не вызывают его продления (непродлевающееся мертвое время) [11, 14] и теряются для наблюдения.

На предмет установления количества потерянных событий потока, возникающих ввиду эффекта мертвого времени, необходимо оценить его длительность; с этой целью в данной работе применяется метод моментов, обеспечивающий построение оценок, обладающих достаточно хорошими свойствами при больших объемах выборок наблюдаемых моментов наступления событий.

1. Математическая модель потока

Рассматривается обобщенный синхронный поток событий второго порядка, сопровождающий случайный процесс которого $\lambda(t)$ является кусочно-постоянным с двумя состояниями S_1 и S_2 ; здесь и далее S_i понимается как i -е состояние $\lambda(t)$ и имеет место при $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = 1, 2$, $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$.

Длительность интервала между событиями потока в i -м состоянии определяется случайной величиной $\eta_i = \min(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)})$, где случайные величины $\xi_i^{(1)}$ и $\xi_i^{(2)}$ независимы и распределены по

законам $F_i^{(1)}(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$ и $F_i^{(2)}(t) = 1 - e^{-\alpha_i t}$ соответственно. В момент наступления события потока процесс $\lambda(t)$ либо переходит из i -го состояния в j -е, $i \neq j$, либо остается в i -м состоянии, $i = j$, с вероятностью $P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_i)$ или $P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_i)$, $i, j = 1, 2$, в зависимости от значения η_i , $i = 1, 2$. При этом $P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_i) + P_1^{(1)}(\lambda_i | \lambda_i) = 1$, $P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_i) + P_1^{(2)}(\lambda_i | \lambda_i) = 1$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$. Процесс $\lambda(t)$ является скрытым марковским [10] с матрицами инфинитезимальных характеристик

$$\mathbf{D}_0 = \begin{vmatrix} -(\lambda_1 + \alpha_1) & 0 \\ 0 & -(\lambda_2 + \alpha_2) \end{vmatrix}, \mathbf{D}_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) \\ \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2) & \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_2) \end{vmatrix}.$$

Элементами матрицы \mathbf{D}_1 выступают интенсивности сопряженных с наступлением события потока переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние. Недиagonальные элементы \mathbf{D}_0 имеют смысл интенсивностей переходов из состояния в состояние без наступления события; диагональные – интенсивностей выхода $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком [5].

Имеет место ситуация недоступности наблюдению всех событий потока – каждое зарегистрированное в момент времени t_k событие порождает непродлевающееся мертвое время фиксированной длительности T , в течение которого другие события исходного потока теряются, а по его окончании первое наступившее событие вновь вызывает период ненаблюдаемости длительности T и т.д. Вариант возникающей ситуации приведен на рис. 1, где S_1, S_2 – состояния случайного процесса $\lambda(t)$, $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке, штриховкой показаны периоды мертвого времени; черными кружками обозначены потерянные события обобщенного синхронного потока второго порядка, белыми – наблюдаемые события.

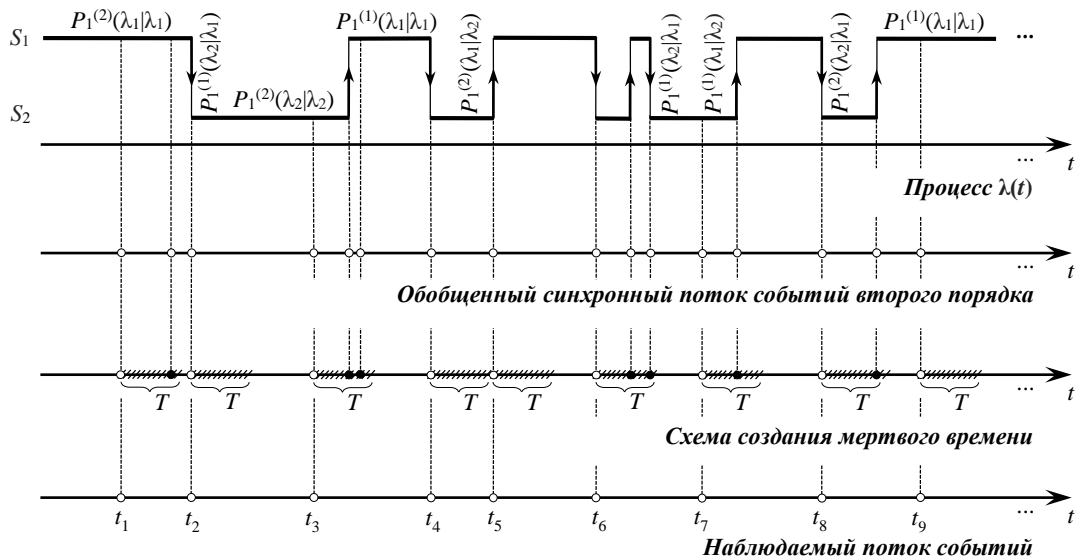


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий
 Fig. 1. Formation of the observed event flow

Поскольку рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования исследуемого дважды стохастического потока событий (наблюдение за ним начинается тогда, когда он функционирует бесконечно долго), в силу сформулированных предпосылок последовательность заключающих в себе всю доступную информацию о потоке наблюдаемых моментов $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ образует вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, т.е. наблюдаемый поток событий обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента t_k , $k = 1, 2, \dots$

2. Вывод плотности вероятности значений длительности интервала между событиями в потоке

Определим значение длительности k -го интервала между событиями t_k и t_{k+1} , $k=1,2,\dots$, как $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_k \geq 0$. Для плотности вероятности значения τ_k , ввиду рассмотрения стационарного режима, справедливо $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$, $\tau \geq 0$, $k \geq 1$, что позволяет без ограничения общности положить t_k равным нулю или, что то же самое, момент наступления события в наблюдаемом потоке есть $\tau = 0$; индекс T подчеркивает зависимость плотности от длительности мертвого времени.

Рассмотрим интервал $(0, \tau)$ длительности $\tau = T + t$ между соседними событиями наблюдаемого потока; t – значение длительности интервала между моментом окончания мертвого времени фиксированной длительности T и моментом наступления следующего события, $t > 0$. Введем $q_{ij}(T)$ – вероятность того, что за мертвое время длительности T процесс $\lambda(\tau)$ перейдет из i -го состояния S_i (имеет место в момент $\tau = 0$) в j -е S_j (имеет место в момент $\tau = T$), $i, j = 1, 2$; $\pi_i(0|T)$ – условную стационарную вероятность того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени $\tau = 0$ пребывает в состоянии S_i , $i = 1, 2$, при условии, что $\tau = 0$ есть момент наступления события наблюдаемого потока и порождения мертвого времени длительности T .

На интервале $(0, t)$, когда обобщенный синхронный поток событий второго порядка вновь наблюдаем, его поведение описывается условной вероятностью $p_{jk}(t)$ того, что на $(0, t)$ нет событий потока и $\lambda(t) = \lambda_k$ при условии, что $\lambda(0) = \lambda_j$, $j, k = 1, 2$; соответствующую $p_{jk}(t)$ плотность запишем как $\tilde{p}_{jk}(t)$, $j, k = 1, 2$. Тогда искомая плотность вероятности $p_T(\tau)$ запишется в виде:

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i(0|T) \sum_{j=1}^2 q_{ij}(T) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau - T), & \tau \geq T. \end{cases} \quad (1)$$

Для исследуемого потока справедливы следующие леммы.

Лемма 1. Переходные вероятности $q_{ij}(T)$, $i, j = 1, 2$, в коррелированном обобщенном синхронном потоке событий второго порядка с мертвым временем имеют вид:

$$q_{11}(T) = \pi_1 + \pi_2 e^{-\varphi T}, \quad q_{12}(T) = \pi_2 - \pi_2 e^{-\varphi T}, \quad q_{21}(T) = \pi_1 - \pi_1 e^{-\varphi T}, \quad q_{22}(T) = \pi_2 + \pi_1 e^{-\varphi T}, \quad (2)$$

где $\varphi_i = \lambda_i P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_i) + \alpha_i P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_i)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\pi_1 = \varphi_2 \varphi^{-1}$, $\pi_2 = \varphi_1 \varphi^{-1}$.

Доказательство. Для введенных вероятностей имеют место дифференциальные уравнения

$$q'_{i1}(\tau) = -\varphi_1 q_{i1}(\tau) + \varphi_2 q_{i2}(\tau), \quad q'_{i2}(\tau) = \varphi_1 q_{i1}(\tau) - \varphi_2 q_{i2}(\tau), \quad i = 1, 2,$$

с начальными условиями $q_{11}(0) = q_{22}(0) = 1$, $q_{12}(0) = q_{21}(0) = 0$. Интегрируя полученные системы [19] и заменяя в решении момент времени τ на T , приходим к (2). Лемма 1 доказана.

Найдем p_{jk} – вероятность перехода процесса $\lambda(\tau)$ из состояния S_j в состояние S_k , $j, k = 1, 2$, за время, которое пройдет от момента $t = 0$ до момента наступления следующего события потока.

Лемма 2. В потоке с мертвым временем вероятности p_{jk} , $j, k = 1, 2$, определяются формулами

$$p_{11} = 1 - \varphi_1 z_1^{-1}, \quad p_{12} = \varphi_1 z_1^{-1}, \quad p_{21} = \varphi_2 z_2^{-1}, \quad p_{22} = 1 - \varphi_2 z_2^{-1}, \quad (3)$$

где $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$, $z_2 = \lambda_2 + \alpha_2$; φ_1 , φ_2 определены в (2).

Доказательство. Условные вероятности $p_{jk}(t)$, $j, k = 1, 2$, идентичны по своему смысловому значению вероятностям $p_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, для исследуемого потока в случае отсутствия мертвого времени, т.е. определяются теми же формулами [12] при $\tau = t$. Согласно определению потока установ-

лена величина $p_{jj}(t)(\lambda_j P_1^{(1)}(\lambda_k | \lambda_j) + \alpha_j P_1^{(2)}(\lambda_k | \lambda_j))\Delta t + o(\Delta t)$, которая является совместной вероятностью того, что без наступления события наблюдаемого потока на интервале $(0, t)$ процесс $\lambda(t)$ переходит на этом интервале из состояния S_j в состояние S_k , $j, k = 1, 2$, на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$ происходит окончание состояния S_k процесса $\lambda(t)$, и в результате розыгрыша пар в момент наступления события $\lambda(t)$ переходит из S_k в S_j , $j, k = 1, 2$. Эта величина представима в виде:

$$p_{jj}(t)(\lambda_j P_1^{(1)}(\lambda_k | \lambda_j) + \alpha_j P_1^{(2)}(\lambda_k | \lambda_j))\Delta t + o(\Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} \tilde{p}_{jk}(u) du = \tilde{p}_{jk}(t)\Delta t + o(\Delta t),$$

где $\tilde{p}_{jk}(t)$ – соответствующая вероятности $p_{jk}(t)$ плотность вероятности, $j, k = 1, 2$.

Тогда плотности $\tilde{p}_{jk}(t)$ того, что без наступления события на $(0, t)$ и наступления события в момент t процесс $\lambda(t)$ перейдет из состояния S_j в состояние S_k , $j, k = 1, 2$, запишутся в виде [12]:

$$\tilde{p}_{jk}(t) = (\lambda_j P_1^{(1)}(\lambda_k | \lambda_j) + \alpha_j P_1^{(2)}(\lambda_k | \lambda_j))e^{-z_j t}. \quad (4)$$

В силу произвольности момента t вероятности перехода p_{jk} , $j, k = 1, 2$, определяются как

$$p_{jk} = \int_0^{\infty} \tilde{p}_{jk}(t) dt. \quad (5)$$

Подставляя (4) в (5) и выполняя интегрирование, получим (3). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Условные стационарные вероятности $\pi_i(0|T)$, $i = 1, 2$, задаются выражениями

$$\pi_1(0|T) = \frac{z_1 \phi_2 + \pi_1(z_1 z_2 - z_1 \phi_2 - z_2 \phi_1)(1 - e^{-\phi T})}{z_1 \phi_2 + z_2 \phi_1 + (z_1 z_2 - z_1 \phi_2 - z_2 \phi_1)(1 - e^{-\phi T})}, \quad \pi_2(0|T) = 1 - \pi_1(0|T), \quad (6)$$

где $\phi_1, \phi_2, \phi, \pi_1, \pi_2$ определены в (2), z_1, z_2 – в (3).

Доказательство. Поскольку в моменты $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ последовательность $\{\lambda(t_k)\}$ представляет собой вложенную цепь Маркова, для вероятностей $\pi_i(0|T)$, $i = 1, 2$, справедливы уравнения

$$\pi_1(0|T) = \pi_1(0|T)\pi_{11}(T) + \pi_2(0|T)\pi_{21}(T), \quad \pi_2(0|T) = \pi_1(0|T)\pi_{12}(T) + \pi_2(0|T)\pi_{22}(T), \quad (7)$$

где $\pi_{ik}(T)$ – переходная вероятность того, что за время, которое пройдет от момента $\tau = 0$ до наступления следующего события потока, $\lambda(\tau)$ перейдет из состояния S_i в состояние S_k , $i, k = 1, 2$.

В силу марковости $\lambda(t)$ вероятности $q_{ij}(T)$ и p_{jk} , определенные в (2) и (3) соответственно, $i, j, k = 1, 2$, позволяют записать для $\pi_{ik}(T)$, $i, k = 1, 2$, следующие выражения:

$$\begin{aligned} \pi_{11}(T) &= q_{11}(T)p_{11} + q_{12}(T)p_{21}, \quad \pi_{12}(T) = q_{11}(T)p_{12} + q_{12}(T)p_{22}, \quad \pi_{11}(T) + \pi_{12}(T) = 1, \\ \pi_{21}(T) &= q_{21}(T)p_{11} + q_{22}(T)p_{21}, \quad \pi_{22}(T) = q_{21}(T)p_{12} + q_{22}(T)p_{22}, \quad \pi_{21}(T) + \pi_{22}(T) = 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя в (8) переходные вероятности $q_{ij}(T)$, $i, j = 1, 2$, найденные в виде (2), получим

$$\pi_{1k}(T) = p_{1k} - \pi_2(p_{1k} - p_{2k})(1 - e^{-\phi T}), \quad \pi_{2k}(T) = p_{2k} + \pi_1(p_{1k} - p_{2k})(1 - e^{-\phi T}). \quad (9)$$

Далее, подставляя (9) и (3) в уравнения (7), приходим к (6). Лемма 3 доказана.

На основании лемм 1–3 сформулируем теорему.

Теорема. В коррелированном потоке, функционирующем в условиях непродлевающегося мертвого времени, плотность вероятности длительности интервала между событиями имеет вид:

$$P_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \gamma(T)z_1 e^{-z_1(\tau-T)} + (1 - \gamma(T))z_2 e^{-z_2(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \quad (10)$$

где $\gamma(T) = \pi_1 - \pi_1 \phi_1 (z_1 - z_2)(z_1 z_2 - z_1 \phi_2 - z_2 \phi_1 - z_1 z_2 e^{\phi T})^{-1}$; $\phi_1, \phi_2, \phi, \pi_1$ определены в (2), z_1, z_2 – в (3).

Доказательство. Подставляя в (1) сначала (4), затем (2) и, наконец, (6), проделывая достаточно трудоемкие преобразования с учетом $t = \tau - T$, приходим к (10). Теорема доказана.

Замечание 1. Равенство $z_1 = z_2 = z$, которое вполне может выполняться в силу того, что λ_1, λ_2 удовлетворяют условию $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$, а α_1, α_2 , вообще говоря, произвольные неотрицательные числа, приводит к $p_T(\tau) = ze^{-z(\tau-T)}$; поток вырождается в простейший. В дальнейшем принимается $z_1 \neq z_2$.

Отметим, что приведенная в [12] формула для плотности – частный случай (10) при $T = 0$. Нетрудно по $p(\tau)$ [12] и $p_T(\tau)$ вида (10) получить выражения для среднего числа событий в единицу времени в обобщенном синхронном потоке второго порядка в условиях полной наблюдаемости Λ и при непродлевающемся мертвом времени Λ_T соответственно. На их основе при $\varphi_1, \varphi_2, \varphi, \pi_1, \pi_2$ и z_1, z_2 , определенных в (2) и (3), запишем среднее число потерянных событий в единицу времени:

$$\Delta = \Lambda - \Lambda_T = \frac{\pi_1 \pi_2 (z_1 - z_2)^2 (1 - e^{\varphi T}) + T(z_1 \pi_1 + z_2 \pi_2)(z_1 z_2 - z_1 \varphi_2 - z_2 \varphi_1 - z_1 z_2 e^{\varphi T})}{(z_1 \pi_2 + z_2 \pi_1)(1 - e^{\varphi T}) + T(z_1 z_2 - z_1 \varphi_2 - z_2 \varphi_1 - z_1 z_2 e^{\varphi T}) - \varphi}, \quad (11)$$

где $\Lambda = z_1 \pi_1 + z_2 \pi_2$, $\Lambda_T = \frac{z_1 z_2 - z_1 \varphi_2 - z_2 \varphi_1 - z_1 z_2 e^{\varphi T}}{(z_1 \pi_2 + z_2 \pi_1)(1 - e^{\varphi T}) + T(z_1 z_2 - z_1 \varphi_2 - z_2 \varphi_1 - z_1 z_2 e^{\varphi T}) - \varphi}$.

3. Оценка длительности мертвого времени в наблюдаемом потоке

Для оценки периода ненаблюдаемости обратимся к методу моментов [18]: рассмотрим выборку $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ из распределения $p_T(\tau) = \gamma(T)z_1 e^{-z_1(\tau-T)} + (1 - \gamma(T))z_2 e^{-z_2(\tau-T)}$, $\tau \geq T$, зависящего от параметра T . В силу близости теоретической и эмпирической функций распределения (неограниченного сближения их значений при достаточно большом n) следует ожидать близости теоретического начального момента первого порядка $M\tau = \int_T^\infty \tau p_T(\tau) d\tau$ и статистики $C_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k$, т.е. чтобы найти \hat{T} , необходимо решить уравнение моментов $M\tau = C_1$, принимающее вид:

$$T + (z_2 - z_1)\gamma(T)z_1^{-1}z_2^{-1} + z_2^{-1} = C_1. \quad (12)$$

Решение (12) возможно только с применением численных методов.

Замечание 2. Для $f(T) = M\tau$: $f'(T) = 1 + \varphi_1 \varphi_2 (z_1 - z_2)^2 e^{\varphi T} (z_1 z_2 - z_1 \varphi_2 - z_2 \varphi_1 - z_1 z_2 e^{\varphi T})^{-2} > 0$, $f(0) = (z_1 \pi_1 + z_2 \pi_2)^{-1} > 0$. Тогда $f(T)$ – возрастающая функция переменной T , $T \geq 0$.

Согласно замечанию 2 оценка длительности мертвого времени $\hat{T}_{\text{ЧМ}}$ (численное решение (12)) на полуинтервале $(0, \tau_{\min}]$, где $\tau_{\min} = \min \tau_k$, $k=1, 2, \dots, n$, определяется единственным образом: $\hat{T}_{\text{ЧМ}} = \hat{T}$, если $f(0) < C_1 < f(\tau_{\min})$; $\hat{T}_{\text{ЧМ}} = \tau_{\min}$, если $f(0) < f(\tau_{\min}) \leq C_1$; $\hat{T}_{\text{ЧМ}} = 0$, если $f(0) \geq C_1$.

Рассмотрим подход, обеспечивающий аналитическое решение \hat{T} : воспользуемся замечанием, сформулированным в [18] и позволяющим использовать одноименные центральные моменты – дисперсию $D\tau = \int_T^\infty \tau^2 p_T(\tau) d\tau - (M\tau)^2$ и выборочную дисперсию $C_2 - C_1^2$, где $C_2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k^2$. В данном случае преобразованное уравнение моментов $D\tau = C_2 - C_1^2$ для оценивания T запишется в виде:

$$(z_2 - z_1)^2 \gamma^2(T) - 2z_2(z_2 - z_1)\gamma(T) - z_1^2(1 + C_1^2 z_2^2 - C_2 z_2^2) = 0. \quad (13)$$

При решении (13), с учетом замечания 1, возможны следующие варианты.

1. $z_2^2 + z_1^2(1 + C_1^2 z_2^2 - C_2 z_2^2) > 0$:

1.1) $z_1 > z_2$, $1 + C_1^2 z_2^2 - C_2 z_2^2 > 0$, тогда $\hat{\gamma}(T) = \left(z_2 - \sqrt{z_2^2 + z_1^2(1 + C_1^2 z_2^2 - C_2 z_2^2)} \right) (z_2 - z_1)^{-1}$;

1.2) $z_2 > z_1$, тогда $\hat{\gamma}(T) = \left(z_2 + \sqrt{z_2^2 + z_1^2(1 + C_1^2 z_2^2 - C_2 z_2^2)} \right) (z_2 - z_1)^{-1}$;

1.3) $z_2 > z_1$, $1 + C_1^2 z_2^2 - C_2 z_2^2 < 0$, тогда $\hat{\gamma}_{1,2}(T) = (z_2 \mp \sqrt{z_2^2 + z_1^2(1 + C_1^2 z_2^2 - C_2 z_2^2)}) (z_2 - z_1)^{-1}$.

2. $z_2^2 + z_1^2(1 + C_1^2 z_2^2 - C_2 z_2^2) = 0$:

2.1) $z_1 > z_2$, тогда $\hat{\gamma}(T) = z_2(z_2 - z_1)^{-1} < 0$ и корень исключается из рассмотрения;

2.2) $z_2 > z_1$, тогда $\hat{\gamma}(T) = z_2(z_2 - z_1)^{-1}$.

3. $z_2^2 + z_1^2(1 + C_1^2 z_2^2 - C_2 z_2^2) < 0$: действительных корней нет, увеличивается выборка.

Так, $\hat{T} = \varphi^{-1} \ln |1 - \varphi_1 z_1^{-1} - \varphi_2 z_2^{-1} - \pi_1 \varphi_1 (z_1 - z_2) z_1^{-1} z_2^{-1} (\pi_1 - \hat{\gamma}(T))^{-1}|$ при единственном корне (13), и полученная аналитически оценка мертвого времени \hat{T}_A есть: $\hat{T}_A = \hat{T}$, если $0 < \hat{T} < \tau_{\min}$; $\hat{T}_A = \tau_{\min}$, если $\hat{T} > \tau_{\min}$; $\hat{T}_A = 0$, если $\hat{T} < 0$. При двух действительных корнях уравнения моментов $\hat{T}_{1,2} = \varphi^{-1} \ln |1 - \varphi_1 z_1^{-1} - \varphi_2 z_2^{-1} - \pi_1 \varphi_1 (z_1 - z_2) z_1^{-1} z_2^{-1} (\pi_1 - \hat{\gamma}_{1,2}(T))^{-1}|$, и оценка \hat{T}_A устанавливается как $\hat{T}_A = 0,5(\hat{T}_1 + \hat{T}_2)$, если $0 < \hat{T}_2 < \hat{T}_1 < \tau_{\min}$; $\hat{T}_A = \hat{T}_1$, если $\hat{T}_2 < 0 < \hat{T}_1 < \tau_{\min}$; $\hat{T}_A = \hat{T}_2$, если $0 < \hat{T}_2 < \tau_{\min} < \hat{T}_1$; $\hat{T}_A = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_2 < 0 < \tau_{\min} < \hat{T}_1$ или $\tau_{\min} < \hat{T}_2 < \hat{T}_1$; $\hat{T}_A = 0$, если $\hat{T}_2 < \hat{T}_1 < 0$.

Замечание 3. Применение τ_{\min} при оценивании T дает улучшенную оценку метода моментов.

4. Результаты численных расчетов

В разделе исследуются численные значения оценок $\hat{T}_{\text{чм}}$ и \hat{T}_A , полученные с использованием имитационной модели. Для проверки их качества по $N = 100$ независимым реализациям при $\lambda_1 = 5,3$, $\lambda_2 = 3,8$, $\alpha_1 = 3,7$, $\alpha_2 = 1,2$, $P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) = 0,3$, $P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) = P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) = 0,7$, $P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_2) = P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2) = 0,8$, $P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_2) = P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) = 0,2$ вычислялись выборочные средние значения $\hat{M}\{\hat{T}\} = N^{-1} \sum \hat{T}^{(k)}$ и оценки смещения $|\hat{M}\{\hat{T}\} - T|$, $\hat{T} \in \{\hat{T}_{\text{чм}}, \hat{T}_A\}$, $k = \overline{1, N}$, для $T_m = 100, \dots, 1000$ и $T = 0,3, 0,5, 0,7, 0,9$. Результаты соответствующих расчетов приведены в табл. 1–4.

Таблица 1

Результаты статистического эксперимента ($T = 0,3$)

T_m	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$\hat{M}\{\hat{T}_{\text{чм}}\}$	0,2977	0,2976	0,2990	0,2991	0,2993	0,2990	0,2994	0,2994	0,2993	0,2994
$ \hat{M}\{\hat{T}_{\text{чм}}\} - T $	0,0023	0,0024	0,0010	0,0009	0,0007	0,0010	0,0006	0,0006	0,0007	0,0006
$\hat{M}\{\hat{T}_A\}$	0,1229	0,2080	0,2027	0,1921	0,2385	0,2018	0,2321	0,2355	0,2263	0,2332
$ \hat{M}\{\hat{T}_A\} - T $	0,1771	0,0920	0,0973	0,1079	0,0615	0,0982	0,0679	0,0645	0,0737	0,0668

Таблица 2

Результаты статистического эксперимента ($T = 0,5$)

T_m	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$\hat{M}\{\hat{T}_{\text{чм}}\}$	0,4964	0,4988	0,4985	0,4987	0,4982	0,4992	0,4993	0,4991	0,4995	0,4996
$ \hat{M}\{\hat{T}_{\text{чм}}\} - T $	0,0036	0,0012	0,0015	0,0013	0,0018	0,0008	0,0007	0,0009	0,0005	0,0004
$\hat{M}\{\hat{T}_A\}$	0,3662	0,4581	0,3140	0,3270	0,3471	0,4417	0,3652	0,3415	0,3715	0,3647
$ \hat{M}\{\hat{T}_A\} - T $	0,1338	0,0419	0,1860	0,1730	0,1529	0,0583	0,1348	0,1585	0,1285	0,1353

Таблица 3

Результаты статистического эксперимента ($T = 0,7$)

T_m	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$\hat{M}\{\hat{T}_{\text{чм}}\}$	0,6963	0,6971	0,6988	0,6984	0,6985	0,6983	0,6990	0,6989	0,6989	0,6992
$ \hat{M}\{\hat{T}_{\text{чм}}\} - T $	0,0037	0,0029	0,0012	0,0016	0,0015	0,0017	0,0010	0,0011	0,0011	0,0008
$\hat{M}\{\hat{T}_A\}$	0,4012	0,3641	0,5263	0,3880	0,5203	0,5014	0,5832	0,3992	0,3472	0,5448
$ \hat{M}\{\hat{T}_A\} - T $	0,2988	0,3359	0,1737	0,3120	0,1797	0,1986	0,1168	0,3008	0,3528	0,1552

Таблица 4

Результаты статистического эксперимента ($T = 0,9$)

T_m	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$\hat{M}\{\hat{T}_{\text{чм}}\}$	0,8967	0,8970	0,8978	0,8986	0,8982	0,8984	0,8987	0,8993	0,8990	0,8990
$ \hat{M}\{\hat{T}_{\text{чм}}\} - T $	0,0033	0,0030	0,0022	0,0014	0,0018	0,0016	0,0013	0,0007	0,0010	0,0010
$\hat{M}\{\hat{T}_A\}$	0,5369	0,5410	0,5122	0,4141	0,5748	0,5450	0,4706	0,5443	0,5872	0,6882
$ \hat{M}\{\hat{T}_A\} - T $	0,3631	0,3590	0,3878	0,4859	0,3252	0,3550	0,4294	0,3557	0,3128	0,2118

При анализе результатов эксперимента, приведенных в табл. 1–4, выявлена сильная зависимость оценок длительности мертвого времени от времени моделирования: с увеличением T_m выборочные средние $\hat{M}\{\hat{T}_{\text{чм}}\}$ стабилизируются, а качество $\hat{T}_{\text{чм}}$ улучшается в смысле уменьшения оценки смещения $|\hat{M}\{\hat{T}_{\text{чм}}\} - T|$, что обусловлено концепцией метода моментов, основывающегося на значениях статистики C_1 , заключающей в себе всю доступную информацию об интервалах между наблюдаемыми моментами; в то же время для $\hat{M}\{\hat{T}_A\}$ отмечается колебательный характер с тенденцией к уменьшению, что объясняется использованием центрального момента для составления (13) и, следовательно, накоплением меньшего объема информации в $C_2 - C_1^2$.

Таблица 5

Результаты статистического эксперимента

T	Λ	$\hat{\Lambda}$	$ \Lambda - \hat{\Lambda} /\Lambda$	Λ_T	$\hat{\Lambda}_T$	$ \Lambda_T - \hat{\Lambda}_T /\Lambda_T$	Δ	$\hat{\Delta}$	$ \Delta - \hat{\Delta} /\Delta$
0,3	6,0520	6,0505	0,000248	2,1044	2,1081	0,001758	3,9476	3,9424	0,001317
0,5		6,0561	0,000677	1,4788	1,4767	0,001420	4,5732	4,5795	0,001378
0,7		6,0447	0,001206	1,1409	1,1459	0,004383	4,9111	4,8999	0,002281
0,9		6,0604	0,001388	0,9286	0,9293	0,000754	5,1231	5,1311	0,001562

Увеличение периода T приводит в среднем к снижению качества оценивания $\hat{T}_{\text{чм}}$ и \hat{T}_A , причиной этого является недоступность наблюдений всех событий: вычисленные для отдельной реализации по формуле (11) при $T_m = 1000$ на основе Λ и Λ_T средние значения потеранных в единицу времени событий Δ отражены в табл. 5, в которой также содержатся статистические оценки $\hat{\Lambda}$, $\hat{\Lambda}_T$, $\hat{\Delta}$ для демонстрации обоснованности использования аппарата имитационного моделирования для проведения расчетов.

Заключение

В данной работе для коррелированного обобщенного синхронного дважды стохастического потока второго порядка при неполной наблюдаемости найден вид плотности вероятности $p_T(\tau)$ длитель-

ности интервала между событиями в наблюдаемом потоке, на основании которой методом моментов получены численная $\hat{T}_{\text{чМ}}$ и аналитическая \hat{T}_A оценки длительности непродлевающегося мертвого времени, выступающего неизвестным параметром плотности вероятности $p_T(\tau)$.

С использованием имитационной модели для конкретного статистического эксперимента исследовано качество построенных оценок: результаты сравнения $\hat{T}_{\text{чМ}}$ и \hat{T}_A определяют предпочтение в использовании $\hat{T}_{\text{чМ}}$ при произвольном задании времени наблюдения за потоком T_m .

ЛИТЕРАТУРА

1. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // Proc. of the Cambridge Philosophical Society. 1955. V. 51, No. 3. P. 433–441.
2. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proc. of the Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, is. 4. P. 923–930.
3. Cox D.R., Miller H.D. The theory of stochastic processes. New York : Wiley, 1965. 398 p.
4. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
5. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
6. Neuts M.F. A versatile Markovian point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
7. Snyder D.L., Miller M.I. Random point processes in time and space. Heidelberg : Springer-Verlag, 1991. 481 p.
8. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
9. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск : Изд-во Белорус. гос. ун-та, 2000. 175 с.
10. Nezhelskaya L., Sidorova E. Optimal estimation of the states of synchronous generalized flow of events of the second order under its complete observability // Communications in Computer and Information Science. 2018. V. 912. P. 157–171.
11. Нежелская Л.А., Сидорова Е.Ф. Оптимальная оценка состояний обобщенного синхронного потока событий второго порядка в условиях неполной наблюдаемости // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2018. № 45. С. 30–41.
12. Нежелская Л.А., Сидорова Е.Ф. Оценивание параметров плотности вероятности значений длительности интервала между событиями в коррелированном обобщенном синхронном потоке второго порядка // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019) : материалы XVIII Междунар. конф. им. А.Ф. Терпугова. Томск : Изд-во НТЛ, 2019. Ч. 2. С. 358–363.
13. Nezhelskaya L. Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Science. 2014. V. 487. P. 342–350.
14. Nezhel'skaya L. Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Science. 2015. V. 564. P. 141–151.
15. Okamura H., Dohi T., Trivedi K.S. Markovian arrival process parameter estimation with group data // IEEE/ACM Transactions on Networking (TON). 2009. V. 17, No. 4. P. 1326–1339.
16. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.
17. Normey-Rico J.E. Control of dead-time process. London : Springer-Verlag, 2007. 462 p.
18. Малинковский Ю.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Гомель : УО «ГТУ им. Ф. Скорины», 2004. Ч. 2: Математическая статистика. 146 с.
19. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Наука, 1976. 576 с.

Поступила в редакцию 11 февраля 2019 г.

Nezhel'skaya L.A., Sidorova E.F. (2019) ESTIMATION OF THE UNEXTENDABLE DEAD TIME DURATION IN CORRELATED SYNCHRONOUS GENERALIZED FLOW OF THE SECOND ORDER. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 48. pp. 21–30

DOI: 10.17223/19988605/48/3

The paper deals with the estimation of the unobservability period duration in a synchronous generalized doubly stochastic flow of the second order, whose accompanying process $\lambda(t)$ represented by a piecewise constant random process with two states S_1, S_2 ; the state S_i of the process $\lambda(t)$ takes place when $\lambda(t) = \lambda_i, i = 1, 2, \lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$.

The flow inter-event interval duration at the i -th state is determined by the random variable $\eta_i = \min(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)})$, where random variables $\xi_i^{(1)}$ and $\xi_i^{(2)}$ are both independent and distributed according to the laws $F_i^{(1)}(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}$ and $F_i^{(2)}(t) = 1 - e^{-\lambda_2 t}$, respec-

tively, $i = 1, 2$. At the moment when a flow event occurs, the process $\lambda(t)$ either transits from the i -th state to the j -th state, $i \neq j$, or remains at the i -th state, $i = j$, with probability $P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_i)$ or $P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_i)$, $i, j = 1, 2$, depending on the value taken by the random variable η_i , $i = 1, 2$. Here $P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_i) + P_1^{(1)}(\lambda_i | \lambda_i) = 1$, $P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_i) + P_1^{(2)}(\lambda_i | \lambda_i) = 1$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$.

The probability density of the values of interval duration between events of the flow operating in a steady-state mode under conditions of incomplete observability has an explicit form

$$P_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \gamma(T)z_1 e^{-z_1(\tau-T)} + (1-\gamma(T))z_2 e^{-z_2(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases}$$

$$\gamma(T) = \pi_1 - \pi_1 \varphi_1 (z_1 - z_2) (z_1 z_2 - z_1 \varphi_2 - z_2 \varphi_1 - z_1 z_2 e^{\varphi T})^{-1},$$

$$\varphi_1 = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1), \quad \varphi_2 = \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2), \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \pi_1 = \varphi_2 \varphi^{-1}, \quad z_1 = \lambda_1 + \alpha_1, \quad z_2 = \lambda_2 + \alpha_2.$$

Then the average number of lost events in the flow (due to the dead time effect) per unit time is

$$\Delta = \Lambda - \Lambda_T = \frac{\pi_1 \pi_2 (z_1 - z_2)^2 (1 - e^{\varphi T}) + T(z_1 \pi_1 + z_2 \pi_2)(z_1 z_2 - z_1 \varphi_2 - z_2 \varphi_1 - z_1 z_2 e^{\varphi T})}{(z_1 \pi_2 + z_2 \pi_1)(1 - e^{\varphi T}) + T(z_1 z_2 - z_1 \varphi_2 - z_2 \varphi_1 - z_1 z_2 e^{\varphi T}) - \varphi},$$

$$\Lambda = z_1 \pi_1 + z_2 \pi_2, \quad \Lambda_T = \frac{z_1 z_2 - z_1 \varphi_2 - z_2 \varphi_1 - z_1 z_2 e^{\varphi T}}{(z_1 \pi_2 + z_2 \pi_1)(1 - e^{\varphi T}) + T(z_1 z_2 - z_1 \varphi_2 - z_2 \varphi_1 - z_1 z_2 e^{\varphi T}) - \varphi}.$$

The estimation \hat{T}_{QM} of the dead time duration T is determined numerically as a solution of the moment equation

$$T + (z_2 - z_1)\gamma(T)z_1^{-1}z_2^{-1} + z_2^{-1} = C_1,$$

however, as it was revealed during the simulation model testing, it is preferable in sense of smallness of the displacement estimate in comparison with the estimate \hat{T}_A , analytically obtained from the moment equation

$$(z_2 - z_1)^2 \gamma^2(T) - 2z_2(z_2 - z_1)\gamma(T) - z_1^2(1 + C_1^2 z_2^2 - C_2 z_2^2) = 0.$$

Keywords: synchronous generalized doubly stochastic flow of the second order; unextendable dead time; probability density; parameter estimation; method of moments.

NEZHEL'SKAYA Lyudmila Alekseevna (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: ludne@mail.ru

SIDOROVA Ekaterina Filippovna (National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: katusha_sidorova@mail.ru

REFERENCES

1. Cox, D.R. (1955) The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 51(3). pp. 433–441. DOI: 10.1017/S0305004100030437
2. Kingman, J.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923–930. DOI: 10.1017/S030500410003838X
3. Cox, D.R. & Miller, H.D. (1965) *The Theory of Stochastic Processes*. New York: Wiley.
4. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 1 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks. Part 1]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika – Proceedings of USSR Academy of Sciences. Technical cybernetics*. 6. pp. 92–99.
5. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 2 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks. Part 2]. *AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika – Proceedings of USSR Academy of Sciences. Technical cybernetics*. 1. pp. 55–61.
6. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markovian point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764–779. DOI: 10.2307/3213143
7. Snyder, D.L. & Miller, M.I. (1991) *Random Point Processes in Time and Space*. Heidelberg: Springer-Verlag.
8. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a batch markovian arrival process. *Communications in Statistics Stochastic Models*. 7. pp. 1–46. DOI: 10.1080/15326349108807174
9. Dudin, A.N. & Klimenok, V.I. (2000) *Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami* [Queueing systems with correlated flows]. Minsk: Belarusian State University.
10. Nezhelskaya, L. & Sidorova, E. (2018) Optimal estimation of the states of synchronous generalized flow of events of the second order under its complete observability. *Communications in Computer and Information Science*. 912. pp. 157–171. DOI: 10.1007/978-3-319-97595-5_13

11. Nezhelskaya, L.A. & Sidorova, E.F. (2018) Optimal estimate of the states of a generalized synchronous flow of second-order events under conditions of incomplete observability. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 45. pp. 30–41. (In Russian). DOI: 10.17223/19988605/45/4
12. Nezhelskaya, L.A. & Sidorova, E.F. (2019) [Estimation of the probability density parameters of the values of inter-event interval duration in correlated synchronous generalized flow of the second order]. *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie (ITMM-2019)* [Information Technologies and Mathematical Modelling (ITMM-2019)]. Proc. of the 18th International Conference named after A.F. Terpugov. Part 2. Tomsk: NTL. pp. 358–363. (In Russian).
13. Nezhelskaya, L. (2014) Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Science*. 487. pp. 342–350.
14. Nezhelskaya, L. (2015) Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 141–151.
15. Okamura, H., Dohi, T. & Trivedi, K.S. (2009) Markovian arrival process parameter estimation with group data. *IEEE/ACM Transactions on Networking (TON)*. 17(4). pp. 1326–1339.
16. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavskii, A.F. (1988) *Statisticheskii analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [The Statistical Analysis of Series of Random Events in Physical Experiment]. Minsk: Universitetskoe.
17. Normey-Rico, J.E. (2007) *Control of dead-time process*. London: Springer-Verlag.
18. Malinkovsky, Yu.V. (2004) *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Probability Theory and Mathematical Statistics]. Gomel: Francisk Skorina Gomel State University.
19. Kamke, E. (1976) *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam* [Handbook of Ordinary Differential Equations]. Moscow: Nauka.