ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2019 Управление, вычислительная техника и информатика № 48

УДК 519.218.72
DOI: 10.17223/19988605/48/6

Г.Ш. Цициашвили, М.А. Осипова

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА СБОРКИ ПУАССОНОВСКИХ ПОТОКОВ

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ № 17-07-00177.

С помощью обобщения теоремы Бурке, основанном на Хинчиновской модели пуассоновского потока, установлено, что сборка независимых пуассоновских потоков является нестационарным пуассоновским потоком. Доказано, что интенсивность сборки при устремлении времени к бесконечности стремится к меньшей из интенсивностей исходных пуассоновских потоков, и оценивается скорость этой сходимости.
Ключевые слова: сборка пуассоновских потоков; интенсивность сборки; скорость сходимости; моделирование сборки марковским процессом.

В работе строится модель сборки независимых пуассоновских потоков, под которой понимается соединение заявок с одинаковыми номерами в потоках. Процесс сборки встречается в компьютерных сетях [1, 2], системах изготовления изделий [3] и т.д. Однако исследование потока заявок, выходящих после сборки, затрудняется сложными аналитическими вычислениями, поскольку не определена удобная математическая модель этого потока.

В настоящей работе строится математическая модель процесса сборки. Эта модель основана на дискретном марковском процессе, описывающем число заявок в исходных потоках на полуинтервалах времени $[0,t)$. Скачки определенного типа у этого марковского процесса можно рассматривать как точки потока сборки. Такая модель возникает при изучении выходных потоков в моделях массового обслуживания с показательными распределениями времени обслуживания и пуассоновским входным потоком. В теореме Бурке доказано, что стационарный выходной поток в подобной системе обслуживания совпадает по распределению с входным потоком. В работе [5] дается обобщение теоремы Бурке на основе модели пуассоновского потока, предложенной А.Я. Хинчиным [6].

В настоящей работе доказывается, что сборка независимых пуассоновских потоков является нестационарным пуассоновским потоком, что существенно затрудняет исследование потока, получающегося в результате сборки. Однако с помощью вероятностных неравенств удается доказать, что интенсивность этого потока при устремлении времени t к бесконечности стремится к меньшей из интенсивностей исходных пуассоновских потоков.

Получена оценка скорости этой сходимости. В случае двух потоков с одинаковой интенсивностью степенная скорость сходимости оценивается с помощью известной асимптотики функции Инфельда. В случае $r > 2$ потоков с одинаковой интенсивностью строятся верхние степенные оценки скорости сходимости, поскольку асимптотики получающихся в результате гипергеометрических рядов использовать не удалось. Однако если у исходных потоков интенсивности разные, то интенсивность потока сборки стремится к предельной гораздо быстрее.

1. Сборка пуассоновских потоков

Пусть имеется r независимых пуассоновских потоков с интенсивностью λ. Представим эти потоки в виде $T_i = \{0 \le t_{i,1} \le t_{i,2} \le \ldots\}, i = 1,\ldots,r.$ Назовем поток

$$\otimes_{i=1}^{r} T_i = \{0 \le \max(t_{1,1},\ldots,t_{r,1}) \le \max(t_{1,2},\ldots,t_{r,2}) \le \ldots\}$$

сборкой потоков $T_1,\ldots,T_r$.

Определим следующие множества индексов: $J_i = \{1,..,r\}/\{i\}, i = 1,\dots,r$. Обозначим r-мерный вектор, состоящий из $r-1$ нулей и единицы на i-м месте, 1_i. Рассмотрим марковский процесс $(n_1(t),\dots,n_r(t)),\ t \ge 0,$ где $n_k(t)$ – число точек потока T_k на полуинтервале $[0,t),\ k = 1,\dots,r$. Скачок этого процесса из состояния $(n_1,\dots,n_m), n_i < \min_{k\in J_i} n_k$, в состояние $(n_1,\dots,n_r)+1_i$ приводит к появлению в момент времени t новой точки у потока $\otimes_{i=1}^r T_i$. Поэтому поток $\otimes_{i=1}^r T_i$ также является пуассоновским [6] с интенсивностью

$$\bar{\lambda}(t) = \lambda \sum_{i=1}^{r} P\left(n_i(t) < \min_{k\in J_i} n_k(t) \right). \tag{1}$$

Лемма 1. Выполняются равенства

$$\bar{\lambda}(t) = \lambda(1 - P(n_1(t) = \ldots = n_r(t))). \tag{2}$$

Доказательство. Перепишем равенство (1) в виде

$$\bar{\lambda}(t) = \lambda P\left(\bigcup_{i=1}^{r} (n_i(t) < \min_{k\in J_i} n_k(t)) \right) = \lambda\left(1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{r} (n_i(t) \ge \min_{k\in J_i} n_k(t)) \right)\right) =$$

$$= \lambda\left(1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{r} (n_i(t) \ge \min_{k\in J} n_k(t)) \right)\right) = \lambda(1 - P(n_1(t) = \ldots = n_r(t))).$$

Лемма доказана.

2. Предельные соотношения для интенсивности сборки потоков $\otimes_{i=1}^r T_i$

Всюду далее полагаем $a = \lambda t$.

Теорема 1. При $\lambda > 0, r = 2$ справедливо предельное соотношение

$$P(n_1(t) = n_2(t))2\sqrt{\pi\lambda t} \to 1,\ t \to \infty. \tag{3}$$

Доказательство. Действительно, выполняются равенства

$$P(n_1(t) = n_2(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-2a)\frac{a^{2k}}{(k!)^2} = \exp(-2a)B,\ B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}}{(k!)^2}.$$

Здесь $B = B(a)$ – функция Инфельда [7. Гл. 4, п. 11, формула (2.60)], удовлетворяющая следующему асимптотическому соотношению:

$$B(a) = \frac{\exp(2a)}{2\sqrt{\pi a}}\left(1 + O\left(\frac{1}{a} \right)\right). \tag{4}$$

Заменяя a на λt в формуле (4), приходим к соотношению (3). Теорема доказана.

Теорема 2. При $\lambda > 0, r > 2$ для любого $\gamma = 1/2 + \varepsilon,\ 0 < \varepsilon << 1/2,$ справедливо соотношение

$$P(n_1(t) = \ldots = n_r(t)) = O(t^{\gamma-\gamma/2}) = O(t^{\varepsilon-(r-1)/2}) \to 0,\ t \to \infty. \tag{5}$$

Доказательство. Выберем произвольное число $\gamma,\ 1/2 < \gamma < 1,$ тогда из формулы (2) получаем равенство

$$P(n_1(t) = \ldots = n_r(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-a}a^k}{k!} \right)^r = A_1(a) + A_2(a) + A_3(a),$$

$$A_1(a) = \sum_{a-a^{\gamma} \le k < a+a^{\gamma}} \left(\frac{e^{-a}a^k}{k!} \right)^r,\ A_2(a) = \sum_{0 \le k < a-a^{\gamma}} \left(\frac{e^{-a}a^k}{k!} \right)^r,\ A_3(a) = \sum_{a+a^{\gamma} \le k} \left(\frac{e^{-a}a^k}{k!} \right)^r.$$

Так как последовательность $\frac{a^k}{k!}$ монотонно не убывает при $0 \le k \le a$ и монотонно не возрастает при $a < k,$ то при $a \to \infty$ из формулы Стирлинга (b – целая часть числа a) имеем

$$A_1(a) \le 2a^{\gamma}\left(\frac{e^{-a}a^{b}}{b!}\right)^{r} : 2a^{\gamma}\left(\frac{e^{-a}a^{b}}{b^{b}e^{-b}\sqrt{2\pi b}}\right)^{r} \le \frac{2a^{\gamma}}{(2\pi a)^{r/2}}\left(1+\frac{1}{b}\right)^{br} : 2\left(\frac{e}{\sqrt{2\pi}}\right)^{r} a^{\gamma-r/2},\ A_1(a) = O(t^{\gamma-r/2}). \quad (6)$$

Построим при $a \to \infty$ оценку $A_2(a),$ полагая $c = [a - a^{\gamma}] : a:$

$$A_2(a) \le c\left(\frac{e^{-a}a^{c}}{c!}\right)^{r} : a\left(\frac{e^{-a}a^{c}}{c^{\,c}e^{-c}\sqrt{2\pi a}}\right)^{r} \le \frac{a}{(2\pi a)^{r/2}}\left(\frac{e^{-a}a^{a-a^{\gamma}}}{(a-a^{\gamma}-1)^{a-a^{\gamma}-1}e^{-a+a^{\gamma}}}\right)^{r} =$$

$$= \frac{a}{(2\pi a)^{r/2}}e^{rF(a)},\ F(a) = -a^{\gamma} + (a-a^{\gamma})\ln a - (a-a^{\gamma}-1)\ln(a-a^{\gamma}-1) = -\frac{a^{2\gamma-1}}{2}(1+o(1)).$$

Таким образом, из условия $1/2 < \gamma < 1$ следует предельное соотношение

$$A_2(a) = o(t^{\gamma-r/2}),\ a \to \infty. \quad (7)$$

Перейдем теперь при $a \to \infty$ к оценке $A_3(a),$ полагая $d = [a + a^{\gamma}] : a:$

$$A_3(a) \le \sum_{d \le k}\left(\frac{e^{-a}a^{k}}{k!}\right)^{r} \le \left(\frac{e^{-a}a^{d}}{d!}\right)^{r}\sum_{k \ge 0}\left(\frac{a}{d}\right)^{kr} \left(\frac{e^{-a}a^{d}}{d!}\right)^{r}\frac{a^{1-\gamma}}{r}. \quad (8)$$

В свою очередь, при $a \to \infty$

$$\left(\frac{e^{-a}a^{d}}{d!}\right)^{r} \sim \left(\frac{e^{-a}a^{d}}{d^{d}e^{-d}\sqrt{2\pi a}}\right)^{r} \le \left(\frac{e^{-a}a^{a+a^{\gamma}}}{(a+a^{\gamma}-1)^{a+a^{\gamma}-1}e^{-a-a^{\gamma}}\sqrt{2\pi a}}\right)^{r} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi a)^{r/2}}e^{rG(a)},\ G(a) = a^{\gamma} + (a+a^{\gamma})\ln a - (a+a^{\gamma}-1)\ln(a+a^{\gamma}-1) = -\frac{a^{2\gamma-1}}{2}(1+o(1)). \quad (9)$$

Из формул (8), (9) и условия $1/2 < \gamma < 1,$ приходим к предельному соотношению

$$A_3(a) = o(t^{\gamma-r/2}), a \to \infty. \quad (10)$$

Объединяя формулы (6), (7), (10), приходим к соотношению (5). Теорема доказана.

Следствие 1. Из леммы 1 и теорем 1, 2 следует, что при $r = 2$ справедливо соотношение

$$\delta_2(t) = |\bar{\lambda}(t) - \lambda| = O(t^{-1/2}) \to 0,\ t \to \infty,$$

а при $r > 2$ справедливо соотношение

$$\delta_r(t) = |\bar{\lambda}(t) - \lambda| = O(t^{\varepsilon-(r-1)/2}),\ t \to \infty,\ \ \varepsilon \ll 1/2.$$

Иными словами, с ростом числа собираемых потоков r величина $\delta_r(t)$ убывает по r достаточно быстро.

Замечание 1. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty}(a^{k}/k!)^{r}$, исследуемый в теореме 2, является обобщенным гипергеометрическим рядом. Однако воспользоваться известными асимптотическими формулами для этого ряда не удается [8. Ch. 16. Formula (16.11.5)]. Поэтому для него в теореме 3 приходится строить верхние оценки.

3. Сборка потоков с разными интенсивностями

Рассмотрим теперь случай, когда имеется два пуассоновских потока $T_1,\ T_2$ с интенсивностями $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_1 < \lambda_2$. Полагая $d = \lambda_2 t, cd = \lambda_1 t, 0 < c = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} < 1,$ исследуем функцию

$$P(n_1(t) \ge n_2(t)) = \sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda_2 t}\frac{(\lambda_2 t)^{k}}{k!}\sum_{i=k}^{\infty}e^{-\lambda_1 t}\frac{(\lambda_1 t)^{i}}{i!} = \sum_{k=0}^{\infty}e^{-d}\frac{d^{k}}{k!}\sum_{i=k}^{\infty}e^{-cd}\frac{(cd)^{i}}{i!} = G(d).$$

Лемма 2. При любом $\gamma = 1-\varepsilon,\ 0<\varepsilon<<1/2,$ справедливо предельное соотношение

$$G(d) = O\left(d^{1/2}\exp\left(-\frac{d^{2\gamma-1}}{2}(1+o(1))\right)\right),\ d\to\infty. \qquad (11)$$

Доказательство. Представим $G(d)$ в виде суммы $G(d)=G_1(d)+G_2(d)$,

$$G_1(d) = \sum_{k>d} e^{-d}\frac{d^k}{k!}\sum_{i=k}^{\infty} e^{-cd}\frac{(cd)^i}{i!},\ G_2(d) = \sum_{k\le d} e^{-d}\frac{d^k}{k!}\sum_{i=k}^{\infty} e^{-cd}\frac{(cd)^i}{i!},$$

тогда при $cd>1,\ 0<c<1,\ d\to\infty$ имеем

$$G_1(d) \le \sum_{k>d} e^{-d}\frac{d^k}{k!}\sum_{i=[d]}^{\infty} e^{-cd}\frac{(cd)^i}{i!} \le \sum_{i=[d]}^{\infty}\frac{e^{-cd}(cd)^i}{i!} \le \frac{e^{-cd}(cd)^d}{[d]!}\sum_{i=[d]}^{\infty}\left(\frac{cd}{[d]}\right)^{i-[d]} =$$

$$= \frac{e^{-cd}(cd)^d}{[d]!}\left(1-\frac{cd}{[d]}\right)^{-1} \sim \frac{e^{-cd}(cd)^d}{[d]!(1-c)}.$$

В свою очередь, вследствие формулы Стирлинга и неравенства $c-1-\ln c>0,\ 0<c<1$,

$$\frac{e^{-cd}(cd)^d}{[d]!} : \frac{e^{-cd}(cd)^d}{[d]^d e^{-d}\sqrt{2\pi[d]}} : \frac{e^{-cd}(cd)^d}{[d]^d e^{-d}\sqrt{2\pi d}} \le \frac{e^{-cd}(cd)^d}{(d-1)^d e^{-d}\sqrt{2\pi d}} : \frac{\exp(-d(c-1-\ln c)+1)}{\sqrt{2\pi d}} \to 0,\ d\to\infty.$$

Таким образом, имеем

$$G_1(d) = O(d^{-1/2}e^{-d(c-1-\ln c)}),\ d\to\infty. \qquad (12)$$

Оценим теперь $G_2(d) \le \sum_{k\le d}\frac{e^{-d}d^k}{k!}$, полагая $1/2<\gamma<1$:

$$G_2(d) < G_2'(d)+G_2''(d),\ G_2'(d) = \sum_{k<d-d^\gamma}\frac{e^{-d}d^k}{k!},\quad G_2''(d) \le \sum_{d\ge k>d-d^\gamma}\frac{e^{-d}d^k}{k!}\sum_{i\ge d-d^\gamma}\frac{e^{-cd}(cd)^i}{i!}.$$

Так как при $0\le k\le d$ последовательность $\frac{d^k}{k!}$ возрастает, то при $d\to\infty$ и, значит, при $l=[d-d^\gamma]\to\infty$

$$G_2'(d) \le l e^{-l-d^\gamma}\frac{d^l}{l!} : \frac{de^{-d^\gamma}}{\sqrt{2\pi d}}\left(\frac{d}{l}\right)^l \le \frac{de^{-d^\gamma}}{\sqrt{2\pi d}}\left(\frac{d}{d-d^\gamma-1}\right)^{d-d^\gamma} =$$

$$= \left(\frac{d}{2\pi}\right)^{1/2}\exp(Q(d)),\ Q(d) = -d^\gamma-(d-d^\gamma)\ln(1-d^{\gamma-1}-d^{-1}) = -\frac{d^{2\gamma-1}}{2}(1+o(1)),\ d\to\infty.$$

Таким образом, получаем

$$G_2'(d) = O\left(d^{1/2}\exp\left(-\frac{d^{2\gamma-1}}{2}(1+o(1))\right)\right),\ d\to\infty. \qquad (13)$$

Оценим теперь $G_2''(d)$ при $d\to\infty$:

$$\sum_{d\ge k>d-d^\gamma}\frac{e^{-d}d^k}{k!} \le d^\gamma e^{-[d]}\frac{d^{[d]}}{[d]!} : d^\gamma\frac{e^{-[d]}d^{[d]}}{[d]^{[d]}e^{-[d]}\sqrt{2\pi[d]}} : \frac{d^{\gamma-1/2}e}{\sqrt{2\pi}},\ d\to\infty.$$

В то же время при $d\to\infty$

$$\sum_{i\ge d-d^\gamma} e^{-cd}\frac{(cd)^i}{i!} \le e^{-cd}\frac{(cd)^l}{l!}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{cd}{l}\right)^i \sim \frac{e^{-cd}(cd)^l}{l^l e^{-l}\sqrt{2\pi d}(1-c)} =$$

$$= \frac{1}{(1-c)\sqrt{2\pi d}}\exp(R(d)),\ R(d) = -cd+l(\ln c+\ln d)+l-l\ln l = -d(c-1-\ln c)(1+o(1)).$$

Так как $c-1-\ln c>0,\ 0<c<1$, то справедливо следующее соотношение:

$$G_2''(d)=O(d^{\gamma}e^{-d(c-1-\ln c)(1+o(1))}),\ d\to\infty, \tag{14}$$

поэтому из формул (12)–(14) следует соотношение (11). Лемма доказана.

Предположим теперь, что имеется $m>r$ независимых пуассоновских потоков с интенсивностями $\lambda_1=\ldots=\lambda_r<\lambda_{r+1}\le\ldots\le\lambda_m$. По аналогии с формулой (2) при $Q_i(t)=P(n_i(t)<\min_{k\in J_i}n_k(t))$, $J_i=\{1,..,m\}/\{i\},\ i=1,\ldots,m,$ имеем

$$\bar{\lambda}(t)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i Q_i(t)=\lambda_1(1-P(n_1(t)=\ldots=n_m(t)))+\sum_{i=r+1}^{m}(\lambda_i-\lambda_1)Q_i(t), \tag{15}$$

$$P(n_1(t)=\ldots=n_m(t))\le P(n_1(t)\ge n_{r+1}(t)),\ \ Q_i(t)\le P(n_1(t)\ge n_i(t)), i=r+1,\ldots,m. \tag{16}$$

Теорема 3. При любых $1\le r<m, \lambda_1=\ldots=\lambda_r<\lambda_{r+1}\ldots\le\lambda_m$ и при любом $\gamma=1-\varepsilon,\ 0<\varepsilon<<1/2$, справедлива сходимость

$$|\bar{\lambda}(t)-\lambda_1|=O\left(t^{1/2}\exp\left(-\frac{(\lambda_{r+1}t)^{2\gamma-1}}{2}(1+o(1))\right)\right),\ t\to\infty.$$

Утверждение данной теоремы вытекает из формул (11), (15), (16).

Заключение

Таким образом, работе построена марковская модель сборки независимых пуассоновских потоков и доказано, что этот поток является нестационарным пуассоновским. При устремлении времени к бесконечности интенсивность нестационарного пуассоновского потока сходится к наименьшей из интенсивностей потоков, подвергающихся сборке. Построены оценки скорости этой сходимости при различном числе исходных пуассоновских потоков и при различных интенсивностях этих потоков. Для получения оценок скорости сходимости используются верхние оценки рядов, представляющих разности между нестационарными и стационарными интенсивностями пуассоновского потока сборки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбунова А.В., Зарядов И.С., Самуйлов К.Е., Сопин Э.С. Обзор систем параллельной обработки заявок. Часть I // Вестник Российского университета дружбы народов. Сер. Математика. Информатика. Физика. 2017. Т. 25, № 4. С. 350–362.
2. Горбунова А.В., Зарядов И.С., Самуйлов К.Е. Обзор систем параллельной обработки заявок. Часть II // Вестник Российского университета дружбы народов. Сер. Математика. Информатика. Физика. 2018. Т. 26, № 1. С. 13–27.
3. Колесникова О.В., Лелюхин В.Е. Алгоритм определения последовательности изготовления элементов изделия «Опадающие листья» // Глобальный научный потенциал. 2015. № 2 (47). С. 54–58.
4. Burke P.J. The output of a queuing system // Operations Research. 1956. V. 4. P. 699–704.
5. Tsitsiashvili G.Sh., Osipova M.A. Modelling of output flows in queuing systems and networks // Information Technologies and Mathematical Modelling // Communications in Computer and Information Science. V. 912. P.106–116.
6. Khinchin A.Ya. Mathematical methods in the theory of queueing. London : Griffin, 1960.
7. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике : учеб. пособие. М. : Изд-во МГУ, 1993.
8. Frank W.J., Olver D.W., Lozier R.F. Boisvert and Charles W. Clark. NIST Handbook of Mathematical Functions. Cambridge : Cambridge University Press. 2010.

Поступила в редакцию 27 января 2019 г.

Tsitsiashvili G.Sh., Osipova M.A. (2019) THE STUDY OF THE ASSEMBLY OF POISSON FLOWS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 48. pp. 51–56

DOI: 10.17223/19988605/48/6

In this paper the Markov model of assembly of independent Poisson flows is constructed and it is proved that this assembly is a non-stationary Poisson flow. When time tends to infinity, the intensity of the unsteady Poisson flow converges to the lowest of the intensities of the flows subjected to the assembly. Estimates of the rate of this convergence are constructed for different numbers of initial Poisson flows and for different intensities of these flows. To obtain estimates of the rate of convergence, upper estimates of series, representing the differences between the nonstationary and stationary intensities of the Poisson flows assembly are used.

Let there be independent Poisson flows with intensity λ. Imagine these flows in the following form: $T_i = \{0 \le t_{i,1} \le t_{i,2} \le \ldots\}$, $i = 1,\ldots,r$. Call the flow $\otimes_{i=1}^{r} T_i = \{0 \le \max(t_{1,1},\ldots,t_{r,1}) \le \max(t_{1,2},\ldots,t_{r,2}) \le \ldots\}$ by the assembly of the flows $T_1,\ldots,T_r$.

Define the following sets of indexes: $J_i = \{1,..,r\}/\{i\},\ i = 1,\ldots,r.$ Denote the r-dimensional vector, consisting the $r-1$ zeros and the unit on i-th place by 1_i. Consider the Markov process $(n_1(t),\ldots,n_r(t)),\ t \ge 0,$ where $n_k(t)$ is the number of flow points T_k on the half-interval $[0,t),\ k = 1,\ldots,r.$ This process jump from state $(n_1,\ldots,n_m),\ \ n_i < \min_{k\in J_i} n_k,$ to state $(n_1,\ldots,n_r)+1_i$ leads to the appearance at a moment t the new point of the flow $\otimes_{i=1}^{r} T_i.$ So, $\otimes_{i=1}^{r} T_i$ is also the Poisson flow with the intensity $\bar{\lambda}(t) = \lambda \sum_{i=1}^{r} P\left(n_i(t) < \min_{k\in J_i} n_k(t)\right).$

Lemma 1. The following equalities are performed: $\bar{\lambda}(t) = \lambda(1 - P(n_1(t) = \ldots = n_r(t))).$

Theorem 1. For $\lambda > 0,\ r = 2$, the following limit relation $P(n_1(t) = n_2(t))2\sqrt{\pi\lambda t} \to 1,\ t \to \infty,$ holds.

Theorem 2. For $\lambda > 0,\ r > 2$, and for any $\gamma = 1/2 + \varepsilon,\ 0 < \varepsilon << 1/2,$ we have the limit relation

$$P(n_1(t) = \ldots = n_r(t)) = O(t^{\gamma - r/2}) = O(t^{\varepsilon-(r-1)/2}) \to 0,\ t \to \infty.$$

Theorem 3. For any $1 \le r < m,\ \lambda_1 = \ldots = \lambda_r < \lambda_{r+1} \ldots \le \lambda_m$ and for all $\gamma,\ 1/2 < \gamma < 1,$ the following limit relation holds:

$$|\bar{\lambda}(t) - \lambda_1| = O\left(t^{1/2} \exp\left(-\frac{(\lambda_{r+1} t)^{2\gamma-1}}{2}(1 + o(1))\right)\right),\ t \to \infty.$$

Keywords: an assembly of Poisson flows; an intensity of an assembly; a rate of convergence; simulation of assembly by Markov process.

TSITSIASHVILI Gurami Shalvovich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Main Researcher of Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch of Russian Academy Sciences, Vladivostok, Russian Federation).
E-mail: guram@iam.dvo.ru

OSIPOVA Marina Anatolievna (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Researcher of Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch of Russian Academy Sciences, Vladivostok, Russian Federation).
E-mail: mao1975@list.ru

REFERENCES

1. Gorbunova, A.V., Zaryadov, I.S., Samuylov, K.E. & Sopin, A.S. (2017) A Survey on Queuing Systems with Parallel Serving of Customers. Part I. *Vestnik Rossiyskogo universiteta druzhby narodov. Ser. Matematika. Informatika. Fizika – Bulletin of the Peoples ' Friendship University of Russia. Series: Mathematics. Information Sciences. Physics.* 25(4). pp. 350–362. (In Russian). DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-350-362
2. Gorbunova, A.V., Zaryadov, I.S. & Samuylov, K.E. (2018) A Survey on Queuing Systems with Parallel Serving of Customers. Part II. *Vestnik Rossiyskogo universiteta druzhby narodov. Ser. Matematika. Informatika. Fizika – Bulletin of the Peoples' Friendship University of Russia. Series: Mathematics. Information Sciences. Physics*. 26(1). pp. 13–27. (In Russian). DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-13-27
3. Kolesnikova, O.V. & Lelyukhin, V.E. (2015) Algorithm for determining the manufacturing steps sequence of the “Falling leaves” product. *Global'nyy nauchnyy potentsial – Global Scientific Potential*. 2(47). pp. 54–58. (In Russian).
4. Burke, P.J. (1956) The output of a queuing system. *Operations Research*. 4. pp. 699–704. DOI: 10.1287/opre.4.6.699
5. Tsitsiashvili, G.Sh. & Osipova, M.A. (2018) Modelling of output flows in queuing systems and networks. In: Dudin, A., Nazarov, A. & Moiseev, A. (eds) *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications*. Vol. 912. Springer, Cham. pp.106–116.
6. Khinchin, A.Ya. (1960) *Mathematical Methods in the Theory of Queueing*. London: Griffin.
7. Sveshnikov, A.G., Bogolyubov, A.N. & Kravtsov, V.V. (1993) *Lektsii po matematicheskoy fizike* [Lectures on Mathematical Physics: Studies Manual]. Moscow: Moscow State University.
8. Frank, W.J., Olver, D.W. & Lozier, R.F. (2010) *Boisvert and Charles W. Clark. NIST Handbook of Mathematical Functions*. England: Cambridge University Press.