

**ВЕСТНИК  
ТОМСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА  
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY  
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

---

*Научный журнал*

---

**2019**

**№ 49**

**Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере  
массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия  
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-29497 от 27 сентября 2007 г.)**

**Подписной индекс в объединённом каталоге «Пресса России» 44031**

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий,  
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций  
на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук»,  
Высшей аттестационной комиссии

## Founder – Tomsk State University

### EDITORIAL BOARD

**Alexander Gortsev** – Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. Tel: +73822529599

**Valery Smagin** – Deputy Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof. of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. Tel: +73822529599

**Lyudmila Nezhelskaya** – Executive Editor, Doctor of Sc., Prof. of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. E-mail: vestnik\_uvti@mail.tsu.ru

**Sergey Vorobeychikov** – Doctor of Sc., Prof. of the System Analysis and Mathematical Modeling Department Tomsk State University

**Vladimir Vishnevsky** – Doctor of Sc., Prof. Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).

**Gennady Koshkin** – Doctor of Sc., Prof. of the System Analysis and Mathematical Modeling Department Tomsk State University

**Yury Kostyuk** – Doctor of Sc., Prof. of the Theoretical Informatics Department Tomsk State University

**Anjela Matrosova** – Doctor of Sc., Prof. of the Programming Department Tomsk State University

**Anatoly Nazarov** – Doctor of Sc., Prof., Head of the Probability Theory and Mathematical Statistics Department Tomsk State University

**Konstantin Samouylov** – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied Probability and Informatics Department RUDN University (Moscow, Russia)

**Eugene Semenkina** – Doctor of Sc., Prof. System Analysis and Operations Research Department Reshetnev Siberian State University of Science and Technology (Krasnoyarsk, Russia)

**Sergey Sushchenko** – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied of Information Department Tomsk State University

**Mais Farkhadov** – Doctor of Sc., Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).

**Gurami Tsitsiasvili** – Doctor of Sc., Prof., Chief researcher Institute for Applied Mathematics Far Eastern Branch of RAS, Prof. Far Eastern Federal University (Vladivostok, Russia)

#### Editorial address:

Institute of Applied Mathematics and Computer Science, unit of Applied Mathematics

National Research Tomsk State University

36 Lenina Avenue, Tomsk, 634050

Telephone / fax: +73822529599

E-mail: vestnik\_uvti@mail.tsu.ru

### EDITORIAL COUNCIL

**Ana Rosa Cavalli**

PhD, Prof.  
University VII  
Paris, France

**Vladimir Dombrovskii**

Doctor of Sc., Prof.  
Tomsk State University  
Russia

**Alexander Dudin**

Doctor of Sc., Prof.  
Belarusian State University  
Minsk, Republic Belorussia

**Enco Orsingher**

PhD, Prof.  
University of Rome  
Italy

**Paolo Prinetto**

Prof.  
Politechnic Institute  
Torino, Italy

**Gilbert Saporta**

PhD, Prof.  
Pierre and Marie Curie  
University, Paris, France

**Raimund Ubar**

Doctor of Sc., Prof.  
University of Technology  
Tallinn, Estonia

**Reindert Nobel**

Doctor of Sc., Associate Prof.  
Vrije University of Amsterdam  
Netherlands

**Nina Yevtushenko**

Doctor of Sc., Prof.  
Ivannikov V.P. ISP RAS  
Moscow, Russia  
**Yervant Zorian**  
PhD, Fellow & Chief Architect, Synopsys, Mountain View, CA, USA

### JORNAL INFO

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is an independent peer-reviewed research journal that welcomes submissions from across the world.

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is issued four times per year, and can be subscribed to in the Russian Press Joint Catalogue (Subscription Index 44031)

The publication in the journal is free of charge and may be in Russian or in English.

The topics of the journal are the following:

- control of dynamical systems,
- mathematical modeling,
- data processing,
- informatics and programming,
- discrete function and automation,
- designing and diagnostics of computer systems.

Rules of registration articles are given in a site:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

## Учредитель – Томский государственный университет

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Горцев Александр Михайлович** – гл. редактор, проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной математики ТГУ. Тел. +73822529599

**Смагин Валерий Иванович** – зам. гл. редактора, проф., д-р техн. наук, проф. кафедры прикладной математики ТГУ. Тел. +73822529599

**Нежелская Людмила Алексеевна** – ответственный секретарь, доц., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры прикладной математики ТГУ  
E-mail: vestnik\_uvti@mail.tsu.ru

**Воробейчиков Сергей Эрикович** – д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры системного анализа и математического моделирования ТГУ

**Вишневский Владимир Миронович** – проф., д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)

**Коскин Геннадий Михайлович** – проф., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры системного анализа и математического моделирования ТГУ

**Костюк Юрий Леонидович** – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры теоретической информатики ТГУ

**Матросова Анжела Юрьевна** – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры программирования ТГУ

**Назаров Анатолий Андреевич** – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой теории вероятностей и математической статистики ТГУ

**Самуйлов Константин Евгеньевич** – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (г. Москва)

**Семенин Евгений Станиславович** – проф., д-р техн. наук, проф. каф. системного анализа и исследования операций, СибГУ им. акад. М.Ф. Решетнева (г. Красноярск)

**Сущенко Сергей Петрович** – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики ТГУ

**Фархадов Маис Паша Оглы** – д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)

**Цициашвили Гурами Шалвович** – проф., д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. Института прикладной математики ДВО РАН, проф. ДВФУ (г. Владивосток)

Адрес редакции и издателя: 634050, Томск, пр. Ленина, 36

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Институт прикладной математики и компьютерных наук,

отделение прикладной математики

Телефон / факс: +73822529599

E-mail: vestnik\_uvti@mail.tsu.ru

### РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**Ана Роза Кавалли**

д-р философии, проф.  
Университет VII,  
Париж, Франция  
**Владимир Домбровский**  
д-р техн. наук, проф.  
ТГУ, Томск, Россия

**Александр Дудин**

д-р физ.-мат. наук, проф.  
БГУ, Минск,  
Республика Беларусь

**Енцо Орзингер**

д-р философии, проф.  
Римский университет,  
Италия

**Паоло Принетто**

проф.  
Политехнический институт,  
Турин, Италия

**Жильберт Сапорта**

д-р философии, проф.  
Университет им. Пьера и Марии,  
Кюри, Париж, Франция

**Раймонд Убар**

д-р проф.  
Технологический университет,  
Таллин, Эстония

**Рейндерт Нобель**

д-р, доцент  
Свободный университет,  
Амстердам, Нидерланды

**Нина Евтушенко**

д-р техн. наук, проф.  
ИСП РАН им. Иваницова В.П.,  
Москва, Россия

**Ервант Зорян**

д-р философии, гл. науч. сотр.  
фирмы «Синописис», США

### О ЖУРНАЛЕ

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» выходит ежеквартально и распространяется по подписке

Статьи публикуются на русском и английском языках.

Тематика публикаций журнала:

- управление динамическими системами,
- математическое моделирование,
- обработка информации,
- информатика и программирование,
- дискретные функции и автоматы,
- проектирование и диагностика вычислительных систем.

Журнал входит в систему Российского Индекса Научного Цитирования (РИНЦ).

Правила оформления статей приведены на сайте:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

**СОДЕРЖАНИЕ**

**УПРАВЛЕНИЕ  
ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ**

**Кадырова С.Ш., Мансимов К.Б.**  
Об оптимальности квазисобых управлений  
в одной граничной задаче управления  
дискретными системами типа Россера ..... 4

**Паршуков А.Н.**  
Метод синтеза модального регулятора  
для объекта управления с интервальной  
неопределенностью коэффициентов ..... 14

**Перепелкин Е.А.**  
Робастное управление системой  
массового обслуживания ..... 23

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

**Назаров А.А., Измайлова Я.Е.**  
Асимптотический анализ системы  
с повторными вызовами, вытеснением заявок  
и фазовым дообслуживанием ..... 29

**ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ**

**Горцев А.М., Нежелская Л.А.**  
Оптимальная оценка состояний обобщенного  
асинхронного потока событий  
с произвольным числом состояний  
при непродлевающемся мертвом времени ..... 35

**Григорьев Ю.Д.**  
Оценка близости двух графовых структур  
на примере сравнения поэтических переводов ..... 44

**Игнатъев Н.А., Мирзаев А.И.**  
Отбор признаков в собственное пространство  
объекта на основе меры его компактности ..... 55

**Новосельцева М.А., Гутова С.Г.,  
Каган Е.С., Бородулин Д.М.**  
Структурно-параметрическая идентификация  
модели технологического процесса при  
использовании роторно-пульсационного аппарата ..... 63

**Пчелинцев Е.А., Перелевский С.С.**  
Адаптивное эффективное оценивание функции  
в гетероскедастичной регрессии ..... 73

**Фейзиев Ф.Г., Мехтиева М.Р.**  
Аналитическое представление полной реакции  
одного класса двоичных 3D-многомерных  
нелинейных модулярных динамических систем ..... 82

**Chetvertakova E.S., Chimitova E.V.**  
Testing significance of random effects  
for the gamma degradation model ..... 92

**Yankovskaya A.E., Levin I.S., Fuks I.L.**  
Mixed diagnostic tests structure  
for learning and testing systems ..... 101

**ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ**

**Грибова В.В., Федорищев Л.А.**  
Адаптивный генератор-WIMP-интерфейса  
редакторов базы знаний на основе онтологии ..... 110

**Сведения об авторах** ..... 120

**CONTENTS**

**CONTROL  
OF DYNAMICAL SYSTEMS**

**Gadirova S.Sh., Mansimov K.B.**  
About optimality quasi-singular controls  
in one boundary control problem  
of Rosser type discrete system ..... 4

**Parshukov A.N.**  
Synthesis method of modal regulator  
for control object with interval uncertainty  
of coefficients ..... 14

**Perepelkin E.A.**  
Robust control  
of queueing system ..... 23

**MATHEMATICAL MODELING**

**Nazarov A.A., Izmailova Y.E.**  
Asymptotic analysis retrieval  
queueing system with exclusion  
customers and phase follow-up ..... 29

**DATA PROCESSING**

**Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A.**  
Optimal estimate of the states of a generalized  
asynchronous event flow with  
an arbitrary number of states under conditions  
of unextendable dead time ..... 35

**Grigoriev Yu.D.**  
Estimation of proximity of graph structures  
on an example of comparison of poetic translations ..... 44

**Ignatyev A.N., Mirzaev A.I.**  
Selection of features into the object's own space  
based on the measure of its compactness ..... 55

**Novoseltseva M.A., Gutova S.G.,  
Kagan E.S., Borodulin D.M.**  
Structural and parametric identification  
of the process model using  
a rotary pulsation machine ..... 63

**Pchelintsev E.A., Perelevskiy S.S.**  
Adaptive efficient estimation for a function  
in heteroscedastic regression ..... 73

**Feyziyev F.G., Mekhtiyeva M.R.**  
Analytical description of full reaction  
of one classes binary 3D-multidimensional  
nonlinear modular dynamic systems ..... 82

**Chetvertakova E.S., Chimitova E.V.**  
Testing significance of random effects  
for the gamma degradation model ..... 92

**Yankovskaya A.E., Levin I.S., Fuks I.L.**  
Mixed diagnostic tests structure  
for learning and testing systems ..... 101

**INFORMATICS AND PROGRAMMING**

**Gribova V.V., Fedorischev L.A.**  
Adaptive generator WIMP-interface  
for knowledge base editor based on an ontollogy ..... 110

**Brief information about the authors** ..... 120

## УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 517.917.56  
DOI: 10.17223/19988605/49/1

С.Ш. Кадырова, К.Б. Мансимов

### ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ КВАЗИОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ ТИПА РОССЕРА

Рассматривается одна граничная задача оптимального управления двухпараметрическими дискретными системами типа Россера. При предположении выпуклости области управления установлены линейаризованное условие оптимальности и необходимые условия оптимальности в форме неравенства для квадратичной формы.

**Ключевые слова:** дискретная двухпараметрическая система типа Россера; линейаризованное необходимое условие оптимальности; выпуклая область управления; оптимальное управление; квазиособое управление.

Многие технические процессы описываются различными дискретными многопараметрическими системами, в частности дискретными двухпараметрическими системами типа Россера [1–7].

В работе [8] рассмотрена задача оптимального управления гибридной системой типа Россера (дискретно-непрерывная задача оптимального управления) и доказаны необходимые условия оптимальности первого порядка. Доказательству необходимых условий оптимальности особых в смысле принципа максимума Понтрягина управлений, а также квазиособых управлений в гибридных системах типа Россера посвящены работы [9, 10].

В [11] найдено представление решения краевой задачи для линейной неоднородной гибридной системы уравнений типа Россера.

Достаточное условие оптимальности типа условий В.Ф. Кротова в задаче оптимального управления системами типа Россера доказано в работе [12]. Необходимое и достаточное условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина в линейном случае установлено в [13]. Исследованию особых в смысле принципа максимума Понтрягина управлений на оптимальность в дискретных системах Россера посвящена работа [14].

В настоящей работе рассматривается задача оптимального управления дискретными двухпараметрическими системами типа Россера, управляемыми посредством выбора граничного условия, при предположении, что граничное условие является решением аналога задачи Коши для нелинейного обыкновенного разностного уравнения с запаздыванием. Таким образом, рассматриваемая в работе задача отличается от задач, которым посвящены работы [8–11], и является более общей, чем задачи из [12–14]. При предположении выпуклости области управления доказано необходимое условие оптимальности в форме линейаризованного условия максимума [15–19]. Далее, применяя модифицированный вариант метода приращений, развитый в работах [18, 19], выведены необходимые условия оптимальности квазиособых управлений [16, 19, 20].

#### 1. Постановка задачи

Предположим, что управляемый дискретный процесс описывается системой двумерных нелинейных разностных уравнений

$$\begin{aligned} z(t+1, x) &= f(t, x, z(t, x), y(t, x)), \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1, \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1, \\ y(t, x+1) &= g(t, x, z(t, x), y(t, x)), \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1, \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1, \end{aligned} \quad (1)$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned} z(t_0, x) &= a(x), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1, \\ y(t, x_0) &= b(t), \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $f(t, x, z, y)$  ( $g(t, x, z, y)$ ) – заданная  $n(m)$ -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по  $(z, y)$  до второго порядка включительно,  $t_0, t_1, x_0, x_1$  заданы, причем разности  $t_1 - t_0, x_1 - x_0$  есть натуральные числа,  $b(t)$  – заданная  $m$ -мерная дискретная вектор-функция,  $a(x)$  –  $n$ -мерная вектор-функция, являющаяся решением обыкновенного нелинейного разностного уравнения с запаздыванием

$$a(x+1) = F(x, a(x), a(x-N), u(x)), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1, \quad (3)$$

с начальными условиями

$$a(x_0 - N) = a_{x_0 - N}, \dots, a(x_0) = a_{x_0}, \quad (4)$$

где  $F(x, a, c, u)$  – заданная  $n$ -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по  $(a, c, u)$  до второго порядка включительно,  $a_{x_0 - N}, \dots, a_{x_0}$  – заданные постоянные векторы,  $N$  – заданное натуральное число (запаздывание),  $u(x)$  –  $r$ -мерный дискретный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного и выпуклого множества  $U \subset R^r$ , т.е.

$$u(x) \in U \subset R^r, \quad x \in X = \{x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1\}. \quad (5)$$

Такие управления назовем допустимыми управлениями, а соответствующие процессы  $(u(x), a(x), z(t, x), y(t, x))$  – допустимыми процессами.

В дальнейшем предполагается, что при каждом заданном допустимом управлении  $u(x)$  система уравнений (1)–(4) имеет единственное решение  $(a(x), z(t, x), y(t, x))$ .

На решениях задачи (1)–(4), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим функционал

$$S(u) = \varphi_1(a(x_1)) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} G_1(x, z(t_1, x)) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} G_2(t, y(t, x_1)). \quad (6)$$

Здесь  $\varphi_1(a)$ ,  $G_1(x, z)$ ,  $G_2(t, y)$  – заданные скалярные функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными  $\frac{\partial \varphi_1(a)}{\partial a}$ ,  $\frac{\partial^2 \varphi_1(a)}{\partial a^2}$ ,  $\frac{\partial G_1(x, z)}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial^2 G_1(x, z)}{\partial z^2}$ ,  $\frac{\partial G_2(t, y)}{\partial y}$ ,

$$\frac{\partial^2 G_2(t, y)}{\partial y^2}.$$

Изучим задачу о минимуме функционала (6) при ограничениях (1)–(5).

Допустимое управление  $u(x)$ , доставляющее минимум функционалу (6), при ограничениях (1)–(5) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс  $(u(x), a(x), z(t, x), y(t, x))$  – оптимальным процессом.

## 2. Формула приращения второго порядка критерия качества

Пусть  $(u(x), a(x), z(t, x), y(t, x))$  – фиксированный допустимый процесс. Через  $u(x; \varepsilon) = \varepsilon v(x) + (1 - \varepsilon)u(x)$  обозначим произвольное допустимое управление, такое что соответствующее ему решение  $a(x; \varepsilon)$  удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} a(x+1; \varepsilon) &= F(x, a(x; \varepsilon), a(x-N; \varepsilon), u(x; \varepsilon)) = \\ &= F(x, a(x; \varepsilon), a(x-N; \varepsilon), \varepsilon v(x) + (1 - \varepsilon)u(x)) \end{aligned} \quad (7)$$

с краевыми условиями

$$a(x_0 - N; \varepsilon) = a_{x_0 - N}, \dots, a(x_0; \varepsilon) = a_{x_0}, \quad (8)$$

где  $\varepsilon \in [0, 1]$  – произвольное число, а  $v(x) \in U$  ( $x \in X$ ) – произвольное допустимое управление, соответствующее  $u(x; \varepsilon)$ .

Это возможно в силу выпуклости множества  $U$ .

Ясно, что при этом  $(z(t, x; \varepsilon), y(t, x; \varepsilon))$  будет решением задачи

$$z(t+1, x; \varepsilon) = f(t, x, z(t, x; \varepsilon), y(t, x; \varepsilon)), \quad (9)$$

$$y(t, x+1; \varepsilon) = g(t, x, z(t, x; \varepsilon), y(t, x; \varepsilon)),$$

$$z(t_0, x; \varepsilon) = a(x, \varepsilon), \quad y(t, x_0; \varepsilon) = b(t). \quad (10)$$

Положим

$$\ell(t, x) = \left. \frac{\partial z(t, x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}; \quad m(t, x) = \left. \frac{\partial y(t, x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}; \quad \alpha(x) = \left. \frac{\partial a(x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}; \quad (11)$$

$$Z(t, x) = \left. \frac{\partial^2 z(t, x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0}; \quad Y(t, x) = \left. \frac{\partial^2 y(t, x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0}; \quad A(x) = \left. \frac{\partial^2 a(x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0}; \quad (12)$$

$$\Delta_{v(x)} F(x) \equiv F(x, a(x), a(x-N), v(x)) - F(x, a(x), a(x-N), u(x)).$$

Используя свойство гладкости вектор-функций  $f(t, x, z, y)$ ,  $g(t, x, z, y)$ ,  $F(x, a, u)$ , при помощи (7), (9), (10) доказывается, что вектор-функции  $\ell(t, x)$ ,  $m(t, x)$ ,  $\alpha(x)$ ,  $Z(t, x)$ ,  $Y(t, x)$ ,  $A(x)$ , определяемые соотношениями (11), (12), являются решением следующих уравнений:

$$\ell(t+1, x) = f_z(t, x, z(t, x), y(t, x))\ell(t, x) + f_y(t, x, z(t, x), y(t, x))m(t, x), \quad (13)$$

$$m(t, x+1) = g_z(t, x, z(t, x), y(t, x))\ell(t, x) + g_y(t, x, z(t, x), y(t, x))m(t, x),$$

$$\ell(t_0, x) = \alpha(x), \quad m(t, x_0) = 0,$$

$$\begin{aligned} \alpha(x+1) &= F_a(x, a(x), u(x))\alpha(x) + F_a(x, a(x), a(x-N), u(x))\alpha(x-N) + \\ &+ F_a(x, a(x), a(x-N), u(x))(v(x) - u(x)), \quad \alpha(x_0 - N) = 0, \dots, \alpha(x_0) = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} Z(t+1, x) &= \frac{\partial f(t, x, z(t, x), y(t, x))}{\partial z} Z(t, x) + \frac{\partial f(t, x, z(t, x), y(t, x))}{\partial y} Y(t, x) + \\ &+ \ell'(t, x) f_{zz}(t, x, z(t, x), y(t, x))\ell(t, x) + \ell'(t, x) f_{zy}(t, x, z(t, x), y(t, x))m(t, x) + \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} &+ m'(t, x) f_{yz}(t, x, z(t, x), y(t, x))\ell(t, x) + m'(t, x) f_{yy}(t, x, z(t, x), y(t, x))m(t, x), \\ Y(t, x+1) &= g_z(t, x, z(t, x), y(t, x))Z(t, x) + g_y(t, x, z(t, x), y(t, x))Y(t, x) + \\ &+ \ell'(t, x) g_{zz}(t, x, z(t, x), y(t, x))\ell(t, x) + \ell'(t, x) g_{zy}(t, x, z(t, x), y(t, x))m(t, x) + \end{aligned} \quad (16)$$

$$+ m'(t, x) g_{yz}(t, x, z(t, x), y(t, x))\ell(t, x) + m'(t, x) g_{yy}(t, x, z(t, x), y(t, x))m(t, x),$$

$$\begin{aligned}
 Z(t_0, x) &= A(x), \quad Y(t, x_0) = 0, \\
 A(x+1) &= F_a(x, a(x), a(x-N), u(x))A(x) + F_a(x, a(x), a(x-N), u(x))A(x-N) + \\
 &+ F_u(x, a(x), a(x-N), u(x))(v(x) - u(x)) + \alpha'(x)F_{ac}(x, a(x), a(x-N), u(x))\alpha(x-N) + \\
 &\quad + \alpha'(x-N)F_{ca}(x, a(x), a(x-N), u(x))\alpha(x) + \\
 &\quad + \alpha'(x)F_{au}(x, a(x), a(x-N), u(x))(v(x) - u(x)) + \\
 &\quad + (v(x) - u(x))' F_{ua}(x, a(x), a(x-N), u(x))\alpha(x) + \\
 &\quad + \alpha'(x-N)F_{cu}(x, a(x), a(x-N), u(x))(v(x) - u(x)) + \\
 &\quad + (v(x) - u(x))' F_{uc}(x, a(x), a(x-N), u(x))\alpha(x-N) + \\
 &\quad + (v(x) - u(x))' F_{uu}(x, a(x), a(x-N), u(x))(v(x) - u(x)), \alpha(x_0) = 0.
 \end{aligned} \tag{17}$$

При этом специальное приращение функционала качества (6), отвечающее допустимым управлениям  $u(x; \varepsilon)$  и  $u(x)$ , с использованием формулы Тейлора представляется в виде:

$$\begin{aligned}
 \Delta S_\varepsilon(u) &= S(u(x; \varepsilon)) - S(u(x)) = \varepsilon \frac{\partial \varphi'(a(x_1))}{\partial a} \alpha(x_1) + \frac{\varepsilon^2}{2} \alpha'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi(a(x_1))}{\partial a^2} \alpha(x_1) + \\
 &+ \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial \varphi'(a(x_1))}{\partial a} A(x_1) + \varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial G_1(x, z(t_1, x))}{\partial z} \ell(t_1, x) + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \ell'(t_1, x) \frac{\partial^2 G_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \times \\
 &\quad \times \ell(t_1, x) + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial^2 G_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} Z(t_1, x) + \varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \frac{\partial G_2(t, y(t, x_1))}{\partial y} m(t, x_1) + \\
 &\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} m'(t, x_1) \frac{\partial^2 G_2(t, y(t, x_1))}{\partial y^2} m(t, x_1) + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \frac{\partial G_2'(t, y(t, x_1))}{\partial y} Y(t, x_1) + o(\varepsilon^2).
 \end{aligned} \tag{18}$$

Введем аналоги функции Гамильтона–Понтрягина в виде:

$$\begin{aligned}
 H(t, x, z, y, p, q) &= p' f(t, x, z, y) + q' g(t, x, z, y), \\
 M(x, a, u, \psi) &= \psi' F(x, a, c, u).
 \end{aligned}$$

Здесь  $(\psi(x), p(t, x), y(t, x))$  является решением сопряженной системы

$$\begin{aligned}
 p(t-1, x) &= H_x(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)), \\
 q(t, x-1) &= H_y(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)), \\
 \psi(x-1) &= M_a(x, a(x), u(x), \psi(x)) + \\
 &+ M_c(x+N, a(x+N), a(x), u(x+N), \psi(x+N)) + p(t_0-1, x), \\
 p(t_1-1, x) &= -\frac{\partial G_1(x, z(t_1, x))}{\partial z}, \quad q(t, x_1-1) = -\frac{\partial G_2(t, y(t, x_1))}{\partial y},
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\psi(x_1-1) = -\frac{\partial \varphi(a(x_1))}{\partial a}, \quad \psi(x) = 0, \quad x > x_1-1. \tag{20}$$

Учитывая введенные обозначения и уравнения (19)–(20), специальное приращение (18) критерия качества записывается с помощью следующей формулы:

$$\Delta S_\varepsilon(u) = -\varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} M_a(x, a(x), u(x), \psi(x))(v(x) - u(x)) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ \alpha'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi(a(x_1))}{\partial a^2} \alpha(x_1) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \ell'(t_1, x) \frac{\partial^2 G_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \ell(t_1, x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} m'(t, x_1) \frac{\partial^2 G_2(t, y(t, x_1))}{\partial y^2} m(t, x_1) - \\
 & \quad - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[ \alpha'(x) M_{aa}(x, a(x), u(x), \psi(x)) \alpha(x) + \right. \\
 & \quad + \alpha'(x) M_{ac}(x, a(x), a(x-N), u(x), \psi(x)) \alpha(x-N) + \\
 & \quad + \alpha'(x-N) M_{ca}(x, a(x), a(x-N), u(x), \psi(x)) \alpha(x) + \\
 & \quad + \alpha'(x-N) M_{cc}(x, a(x), a(x-N), u(x), \psi(x)) \alpha(x-N) + \\
 & \quad + 2\alpha'(x) M_{au}(x, a(x), a(x-N), u(x), \psi(x)) (v(x) - u(x)) + \\
 & \quad + 2\alpha'(x-N) M_{cu}(x, a(x), a(x-N), u(x), \psi(x)) (v(x) - u(x)) + \\
 & \quad \left. + (v(x) - u(x))' M_{uu}(x, a(x), a(x-N), u(x), \psi(x)) (v(x) - u(x)) \right] - \\
 & \quad - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[ \ell'(t, x) H_{zz}(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) \ell(t, x) + \right. \\
 & \quad + \ell'(t, x) H_{zy}(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) m(t, x) + \\
 & \quad + m'(t, x) H_{yz}(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) \ell(t, x) + \\
 & \quad \left. + m'(t, x) H_{yy}(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) m(t, x) \right] + o(\varepsilon^2). \tag{21}
 \end{aligned}$$

### 3. Необходимые условия оптимальности

Специальная формула приращения (21) критерия качества (6) позволяет получить необходимое условие оптимальности первого порядка в форме аналога линейризованного (дифференциального) условия максимума (см., напр.: [15–18]), а также неявное необходимое условие оптимальности квазиособых управлений.

Из разложения (21) следует

**Теорема 1.** Для оптимальности допустимого управления  $u(x)$  в задаче (1)–(6) необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} M'_u(x, a(x), u(x), \psi(x)) (v(x) - u(x)) \leq 0 \tag{22}$$

выполнялось для всех  $v(x) \in U$ ,  $x \in X$ .

Теперь исследуем случай вырождения линейризованного условия максимума (22). По аналогии с [16, 18] введем

**Определение 1.** Если для всех допустимых управлений  $v(x) \in U$ ,  $x \in X$ , выполняется соотношение

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} M'_u(x, a(x), u(x), \psi(x)) (v(x) - u(x)) = 0,$$

управление  $u(x)$  назовем квазиособым управлением в задаче (1)–(6).

Из разложения (21) следует, что если  $u(x)$  – квазиособое оптимальное управление, то неравенство

$$\alpha'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi(a(x_1))}{\partial a^2} \alpha(x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \ell'(t_1, x) \frac{\partial^2 G_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \ell(t_1, x) +$$



$$\begin{aligned}
 & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} m'(t, x_1) \frac{\partial^2 G_2(t, y(t, x_1))}{\partial y^2} m(t, x_1) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[ \alpha'(x) M_{aa}(x, a(x), u(x), \psi(x)) \alpha(x) + \right. \\
 & \quad + 2\Delta_{v(x)} M'_a(x, a(x), u(x), \psi(x)) \alpha(x) + \\
 & \quad + \alpha'(x) M_{ac}(x, a(x), a(x-N), u(x), \psi(x)) \alpha(x-N) + \\
 & \quad + \alpha'(x-N) M_{ca}(x, a(x), a(x-N), u(x), \psi(x)) \alpha(x) + \\
 & \quad + \alpha'(x-N) M_{cc}(x, a(x), a(x-N), u(x), \psi(x)) \alpha(x-N) + \\
 & \quad \left. + 2\Delta_{v(x)} M_c(x, a(x), u(x), \psi(x)) \alpha(x-N) \right] - \\
 & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[ \ell'(t, x) H_{zz}(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) \ell(t, x) + \right. \\
 & \quad + \ell'(t, x) H_{zy}(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) m(t, x) + \\
 & \quad + m'(t, x) H_{yz}(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) \ell(t, x) + \\
 & \quad \left. + m'(t, x) H_{yy}(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) m(t, x) \right] \geq 0
 \end{aligned} \tag{23}$$

выполняется для всех  $v(x) \in U$ ,  $x \in X$ .

Неравенство (23) является неявным необходимым условием оптимальности квазиособых управлений. Поэтому конструктивное использование этого условия оптимальности весьма затруднительно. Однако с его помощью удастся получить ряд необходимых условий оптимальности квазиособых управлений, выраженных непосредственно через параметры задачи (1)–(6).

Пусть матричные функции  $\Phi(x, s)$ ,  $V_{ij}(t, x; \tau, s)$ ,  $i, j = 1, 2$ , являются решениями следующих задач:

$$\begin{aligned}
 & \Phi(x, s-1) = \Phi(x, s) F_a(s, a(s), u(s)) + \\
 & + \Phi(x, s+N) F_c(s+N, a(s+N), a(s), u(s+N)) + \Phi(x, s) F_u(s, a(s), u(s)) (v(x) - u(x)),
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\Phi(x, x-1) = E, \quad \Phi(x, s) = 0, \quad s > x-1, \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 & V_{11}(t, x; \tau-1, s) = V_{11}(t, x; \tau, s) f_z(\tau, s, z(\tau, s), y(\tau, s)) + \\
 & \quad + V_{12}(t, x; \tau, s) g_z(\tau, s, z(\tau, s), y(\tau, s)), \\
 & V_{12}(t, x; \tau, s-1) = V_{11}(t, x; \tau, s) f_z(\tau, s, z(\tau, s), y(\tau, s)) + \\
 & \quad + V_{12}(t, x; \tau, s) g_z(\tau, s, z(\tau, s), y(\tau, s)),
 \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
 & V_{21}(t, x; \tau-1, s) = V_{21}(t, x; \tau, s) f_z(\tau, s, z(\tau, s), y(\tau, s)) + \\
 & \quad + V_{22}(t, x; \tau, s) g_z(\tau, s, z(\tau, s), y(\tau, s)), \\
 & V_{22}(t, x; \tau, s-1) = V_{21}(t, x; \tau, s) f_z(\tau, s, z(\tau, s), y(\tau, s)) + \\
 & \quad + V_{22}(t, x; \tau, s) g_z(\tau, s, z(\tau, s), y(\tau, s)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & V_{11}(t, x; t-1, x-1) = E_1, \quad V_{22}(t, x; t-1, x-1) = E_2, \\
 & V_{11}(t, x; t-1, s) = 0, \quad x_0 \leq s \leq x-2, \quad V_{12}(t, x; \tau, x-1) = 0, \quad t_0 \leq \tau \leq t-1, \\
 & V_{21}(t, x; t-1, s) = 0, \quad x_0 \leq s \leq x-1, \quad V_{22}(t, x; \tau, x-1) = 0, \quad t_0 \leq \tau \leq t-2,
 \end{aligned} \tag{27}$$

где  $E_i$ ,  $i = 1, 2$ , – единичные матрицы соответствующих размерностей.

Как видно, уравнения (13), (14) являются линейными неоднородными разностными уравнениями. Решение задач (13), (14) допускают (см.: [18, 21]) представления

$$\alpha(x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} \Phi(x,s) F_u(s, a(s), u(s))(v(s) - u(s)), \quad (28)$$

$$\ell(t, x) = V_{11}(t, x+1; t_0-1, x)\alpha(x) + \sum_{s=x_0}^{x-1} V_{11}(t, x+1; t_0-1, s)\alpha(s), \quad (29)$$

$$m(t, x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} V_{21}(t+1, x; t_0-1, s)\alpha(s). \quad (30)$$

Положим

$$Q_1(t, x, s) = \sum_{\tau=s+1}^{x-1} V_{11}(t, x+1; t_0-1, \tau)\Phi(\tau, s) + V_{11}(t, x+1; t_0-1, x)\Phi(x, s),$$

$$Q_2(t, x, s) = \sum_{\tau=s+1}^{x-1} V_{21}(t+1, x; t_0-1, \tau)\Phi(x, s),$$

$$\Phi_1(x, s) = \Phi(x, s)F_u(s, a(s), u(s)), \quad Q_3(t, x; s) = Q_1(t, x, s)F_u(s, a(s), u(s)),$$

$$Q_4(t, x; s) = Q_2(t, x, s)F_u(s, a(s), u(s)),$$

тогда представления (28), (30) можно переписать в виде:

$$\alpha(x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} \Phi_1(x, s)(v(s) - u(s)), \quad (31)$$

$$\ell(t, x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} Q_3(t, x, s)(v(s) - u(s)), \quad (32)$$

$$m(t, x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} Q_4(t, x, s)(v(s) - u(s)). \quad (33)$$

Введем в рассмотрение матричную функцию

$$\begin{aligned} K(\tau, s) = & -\Phi'(x_1, s) \frac{\partial^2 \varphi(a(x_1))}{\partial a^2} \Phi(x_1, \tau) - \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} Q_3'(t_1, x, s) \frac{\partial^2 G_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} Q_3(t_1, x, \tau) - \\ & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} Q_4'(t, x_1, s) \frac{\partial^2 G_2(t, y(t, x_1))}{\partial y^2} Q_4(t, x_1, \tau) + \\ & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} \left[ Q_3'(t, x, s) H_{zz}(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) Q_3(t, x, \tau) + \right. \\ & + Q_3'(t, x, \tau) H_{zy}(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) Q_3(t, x, s) + \\ & + Q_4'(t, x, \tau) H_{yz}(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) Q_3(t, x, s) + \\ & \left. + Q_4'(t, x, \tau) H_{yy}(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) Q_4(t, x, s) \right] + \\ & + \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^x \left[ \Phi_1'(x, \tau) M_{aa}(x, a(x), a(x-N), u(x), \psi(x)) \Phi_1(x, s) + \right. \\ & + \Phi_1'(x, \tau-N) M_{ca}(x, a(x), a(x-N), u(x), \psi(x)) \Phi_1(x, \tau) + \\ & + \Phi_1'(x, s) M_{ac}(x, a(x), a(x-N), u(x), \psi(x)) \Phi_1(x, \tau-N) + \\ & \left. + \Phi_1'(x, \tau-N) M_{cc}(x, a(x), a(x-N), u(x), \psi(x)) \Phi_1(x, s-N) \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Используя представления (31)–(33), и учитывая (34), неравенство (23) по схеме из [18, 19] преобразуется к виду

$$\sum_{s=x_0}^{x_1-1} \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} (v(\tau) - u(\tau))' K(\tau, s)(v(s) - u(s)) +$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[ \sum_{s=x+1}^{x_1-1} (v(s) - u(s))' M_{au}(s, a(s), u(s), \psi(s)) \Phi_1(s, x) + \right. \\
 & \left. + (v(s) - u(s))' M_{cu}(s, a(s), a(s-N), u(s), \psi(s)) \Phi_1(s-N, x) \right] (v(x) - u(x)) + \\
 & + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} (v(x) - u(x))' M_{uu}(x, a(x), a(x-N), u(x), \psi(x)) (v(x) - u(x)) \leq 0.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Таким образом, доказана следующая

**Теорема 2.** Если  $u(x)$  ( $x \in X$ ) квазиособое управление в задаче (1)–(6), то для его оптимальности необходимо, чтобы неравенство (35) выполнялось для всех  $v(x) \in U$ ,  $x \in X$ .

Неравенство (35) является общим необходимым условием оптимальности квазиособых управлений. Из него можно получить ряд легко проверяемых, но более слабых условий оптимальности. Приведем одно из них.

**Теорема 3.** Если  $u(x)$  ( $x \in X$ ) квазиособое управление в задаче (1)–(6), то для его оптимальности необходимо, чтобы неравенство

$$(v - u(\theta))' [K(\theta, \theta) + M_{uu}[\theta]] (v - u(\theta)) \leq 0 \tag{36}$$

выполнялось для всех  $\theta \in X$ ,  $v \in U$ .

### Заключение

В работе рассмотрена задача оптимального управления дискретными двухпараметрическими 2D-системами типа Россера. Установлен аналог дискретного линейаризованного условия максимума и отдельно изучен квазиособый случай. Выведено общее необходимое условие оптимальности квазиособых управлений, из которого в частности, следует аналог условия оптимальности Габасова–Кирилловой.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Барышев В.Г., Блюмин С.Л. К управлению системами с многомерными параметрами // Автоматика и телемеханика. 1977. № 4. С. 34–42.
2. Блюмин С.П., Фараджев Р.Г. Линейные клеточные машины: подход пространства состояний // Автоматика и телемеханика. 1982. № 2. С. 125–163.
3. Васильев О.В., Кириллова Ф.М. Об оптимальных процессах в двухпараметрических дискретных системах // Доклады АН СССР. 1967. Т. 175, № 1. С. 17–19.
4. Гайшун И.В. Многопараметрические системы управления. Минск : Наука и техника, 1996. 199 с.
5. Roesser R.P. A discrete state-space model for linear image processing. // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. V. AC-20, No. 2. P. 1–10.
6. Kaczorek T. Two-dimensional linear systems. Berlin : Springer-Verlag, 1985. 398 p.
7. Дымков М.П. Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления. Минск : Изд-во БГУ, 2005. 363 с.
8. Мансимов К.Б., Джаббарова А.Я. Необходимые условия оптимальности в одной гибридной системе типа Россера // Известия НАН Азербайджана. Сер. Физ.-мат. наук. 2014. № 3. С. 98–104.
9. Джаббарова А.Я., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности особых управлений в одной задаче управления гибридными системами типа Россера // Прикладная математика и вопросы управления. 2018. №3. С. 31–49.
10. Джаббарова А.Я., Мансимов К.Б. Исследование квазиособых управлений в дискретно-непрерывной задаче оптимального управления типа Россера // Вестник Белорусского государственного университета. Сер. физ.-мат. наук. 2004. № 4. С. 13–23.
11. Джаббарова А.Я., Мансимов К.Б. О представлении решений одной дискретно-непрерывной линейной системы типа Россера // Доклады НАН Азербайджана. 2013. № 8. С. 15–18.
12. Кадырова С.Ш. Достаточное условие оптимальности типа Кротова в одной двухпараметрической задаче управления // Вестник Белорусского государственного университета. Сер. физ.-мат. наук. 2016. № 1. С. 77–83.
13. Кадырова С.Ш. Об одной дискретной линейной задаче оптимального управления системами типа Россера // Вестник Белорусского государственного университета. Сер. физ.-мат. наук. 2015. № 4. С. 58–64.

14. Мансимов К.Б., Кадырова С.Ш. Об оптимальности особых смысле принципа максимума Понтрягина управлений в одной задаче оптимального управления системами типа Россера // Математическое и компьютерное моделирование. Сер. физ.-мат. наук. 2017. Вып. 16. С. 80–92.
15. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. М., 2011. 272 с.
16. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М. : Либроком, 2013. 256 с.
17. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами. Новосибирск : Наука, 1987. 226 с.
18. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. Баку : ЭЛМ, 1999. 176 с.
19. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса–Дарбу. Баку : ЭЛМ, 2010. 363 с.
20. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности высокого порядка. Минск, 1982. 48 с. (Препринт ИМ АН БССР. № 30 (155)).
21. Кадырова С.Ш., Мансимов К.Б., Масталиев Р.О. Об одном представлении решения линейных разностных уравнений типа Россера // Известия НАН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 2013. № 3. С. 12–17.

Поступила в редакцию 24 апреля 2019 г.

Gadirova S.Sh., Mansimov K.B. (2019) ABOUT OPTIMALITY QUASI-SINGULAR CONTROLS IN ONE BOUNDARY CONTROL PROBLEM OF ROSSER TYPE DISCRETE SYSTEM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 49. pp. 4–13

DOI: 10.17223/19988605/49/1

Suppose that controlled discrete process by system of two-dimensional nonlinear difference equations is described

$$\begin{aligned} z(t+1, x) &= f(t, x, z(t, x), y(t, x)), \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1, \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1, \\ y(t, x + 1) &= g(t, x, z(t, x), y(t, x)), \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1; \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1, \end{aligned} \quad (1)$$

and boundary conditions

$$\begin{aligned} z(t_0, x) &= a(x), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1, \\ y(t, x_0) &= b(t), \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Here  $f(t, x, z, y)$  ( $g(t, x, z, y)$ ) – given  $n(m)$ -dimensional vector function continuous set of variables together with partial derivatives with respect to  $(z, y)$  to second order inclusive,  $t_0, t_1, x_0, x_1$  – given, and the difference  $t_1 - t_0, x_1 - x_0$  – to second order inclusive,  $b(t)$  given –  $m$ -dimensional discrete vector function,  $a(x)$  –  $n$ -dimensional vector function that is a solution of an ordinary nonlinear difference equation with delay

$$a(x+1) = F(x, a(x), a(x-N), u(x)), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1, \quad (3)$$

with initial conditions

$$a(x_0 - N) = a_{x_0 - N}, \dots, a(x_0) = a_{x_0}, \quad (4)$$

where  $F(x, a, c, u)$  – given  $n$ -dimensional vector function continuous over a set of variables together with partial derivatives with respect to  $(a, c, u)$  to second order inclusive,  $a_{x_0 - N}, \dots, a_{x_0}$  – given constant vectors,  $N$  – given natural number,  $u(x)$  –  $r$ -dimensional discrete vector of control actions with values from given non-empty, bounded and convex set  $U \subset R^r$ , i.e.

$$u(x) \in U \subset R^r, \quad x \in X = \{x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1\}. \quad (5)$$

On the solutions of problem (1)–(5) generated by all possible admissible controls we define the functional

$$S(u) = \varphi_1(a(x_1)) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} G_1(x, z(t_1, x)) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} G_2(t, y(t, x_1)). \quad (6)$$

We study the problem of the minimum of the functional (6) with constraints (1)–(5).

A necessary condition for the optimality of quasi-singular controls is established.

**Keywords:** discrete two-parameter system of Rosser type; linearized necessary optimality condition; convex control domain; optimal control; quasi-singular control.

*MANSIMOV Kamil' Bayramali oghly* (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Baku State University, Institute of Control problems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan).

E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

*GADIROVA Sevinj Shamistan gyzy* (Institute of Control problems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan).

E-mail: nacafova.melahet@mail.com

REFERENCES

1. Baryshev, V.G. & Blyumin, S.L. (1977) To control systems with multidimensional parameters. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 4. pp. 34–42.
2. Blyumin, S.P. & Faradzhev, R.G. (1982) Linear cellular machines: state space approach. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 2. pp. 125–163.
3. Vasilyev, O.V. & Kirillova, F.M. (1967) Ob optimal'nykh protsessakh v dvukhparametricheskikh diskretnykh sistemakh [On optimal processes in two-parameter discrete systems]. *Doklady AN SSSR*. 175(1). p. 17–19.
4. Gayshun, I.V. (1996) *Mnogoparametricheskie sistemy upravleniya* [Multi-parameter control systems]. Minsk: Nauka i tekhnika.
5. Roesser, R.P. (1975) A discrete state-space model for linear image processing. *IEEE Transactions on Automatic Control*. AC-20(2). pp. 1–10.
6. Kaczorek, T. (1985) *Two-dimensional linear systems*. Berlin: Springer-Verlag.
7. Dymkov, M.P. (2005) *Ekstremal'nye zadachi v mnogoparametricheskikh sistemakh upravleniya* [Extreme problems in multiparameter control systems]. Minsk: BSEU.
8. Mansimov, K.B. & Dzhabbarova, A.Ya. (2014) Neobkhodimye usloviya optimal'nosti v odnoy gibridnoy sisteme tipa Rossera [Necessary conditions for optimality in a single Rosser hybrid system type]. *Izvestiya NAN Azerbaydzhana. Ser. Fiz.-mat. nauk*. 3. pp. 98–104.
9. Dzhabbarova, A.Ya. & Mansimov, K.B. (2018) Necessary conditions for the optimality of special controls in one control problem for hybrid systems of the Rosser type. *Applied Mathematics and Control*. 3. pp. 31–49.
10. Dzhabbarova, A.Ya. & Mansimov, K.B. (2004) issledovanie kvaziosobykh upravleniy v diskretno-nepreryvnoy zadache optimal'nogo upravleniya tipa Rossera [Investigation of quasi-singular controls in a discrete-continuous optimal control problem of Rosser type]. *Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. fiz.-mat. nauk*. 4. pp. 13–23.
11. Dzhabbarova, A.Ya. & Mansimov, K.B. (2013) O predstavlenii resheniy odnoy diskretno-nepreryvnoy lineynoy sistemy tipa Rossera [Presentation of solutions of one discrete-continuous linear system of Rosser type]. *Doklady NAN Azerbaydzhana*. 8. pp. 15–18.
12. Kadyrova, S.Sh. (2016) Dostatochnoe uslovie optimal'nosti tipa Krotova v odnoy dvukhparametricheskoy zadache upravleniya [Sufficient condition of optimality of the Krotov type in a single two-parameter control problem]. *Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. fiz.-mat. nauk*. 1. pp. 77–83.
13. Kadyrova, S.Sh. (2015) Ob odnoy diskretnoy lineynoy zadache optimal'nogo upravleniya sistemami tipa Rossera [On a discrete linear optimal control problem for Rosser-type systems]. *Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. fiz.-mat. nauk*. 4. pp. 58–64.
14. Mansimov, K.B. & Kadyrova, S.Sh. (2017) Ob optimal'nosti osobykh smysle printsipa maksimuma Pontryagina upravleniy v odnoy zadache optimal'nogo upravleniya sistemami tipa Rossera [On the optimality of the singular sense of the Pontryagin principle of controls in one optimal control problem for Rosser-type systems]. *Matematicheskoe i kompyuternoe modelirovanie. Ser. fiz.-mat. nauk*. 16. pp. 80–92.
15. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (2011) *Printsip maksimuma v teorii optimal'nogo upravleniya* [The maximum principle in the theory of optimal control]. Moscow: Nauka.
16. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (2013) *Osoby optimal'nye upravleniya* [Singular optimal controls]. Moscow: Librokom.
17. Ashchepkov, L.T. (1987) *Optimal'noe upravlenie razryvnymi sistemami* [Optimal control of discontinuous systems]. Novosibirsk: Nauka.
18. Mansimov, K.B. (1999) *Osoby upravleniya v sistemakh s zapazdyvaniem* [Singular controls in systems with delay]. Baku: ELM. 179 p.
19. Mansimov, K.B. & Mardanov, M.J. (2010) *Qualitative theory of optimal control of Goursat-Darboux systems*. Baku: ELM.
20. Gabasov, R., Kirillova, F.M. & Mansimov, K.B. (1982) *Neobkhodimye usloviya optimal'nosti vysokogo poryadka* [High order necessary conditions for optimality]. Minsk: AS BSSR.
21. Gadirova, S.Sh., Mansimov, K.B. & Mastaliev, R.O. (2013) Ob odnom predstavlenii resheniya lineynykh raznostnykh uravneniy tipa Rossera [On one representation of the solution of linear difference equations of Rosser type]. *Izvestiya NAN Azerbaydzhana. Ser. fiz.-tekh. i mat. nauk*. 3. pp. 12–17.

УДК 517.935.2+517.977.1  
DOI: 10.17223/19988605/49/2

А.Н. Паршуков

### МЕТОД СИНТЕЗА МОДАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Предложен метод синтеза робастного модального регулятора, получен критерий робастного качества управления в условиях интервальной неопределенности коэффициентов в модели объекта управления. Данный метод синтеза доведен до вычислительных процедур и может быть реализован на ЭВМ. Метод синтеза проиллюстрирован примером.

**Ключевые слова:** интервальная неопределенность; модальный регулятор; робастное качество управления.

В результате идентификации технологических процессов модель объекта управления чаще всего восстанавливается в виде линейного дифференциального уравнения (заданного порядка), коэффициенты которого определены с точностью до принадлежности некоторым интервалам. Фактически такая интервальная неопределенность коэффициентов означает, что объект управления описывается целым семейством моделей.

В большинстве классических схем синтеза регулятор рассчитывается для модели с точно заданными коэффициентами. В случае объекта управления с интервальной неопределенностью коэффициентов регулятор может быть рассчитан по классическим схемам для модели со средними значениями из заданных интервалов. При этом после замыкания объекта управления (описываемого семейством моделей) синтезированным регулятором в передаточной функции (ПФ) замкнутой системы появляется неопределенность. Поскольку свойства устойчивости и качества управления системы определяются расположением полюсов ее ПФ, возникает вопрос: при каких размерах интервальной неопределенности в объекте управления замкнутая система еще сохранит свойства устойчивости (робастная устойчивость) и качества управления (робастное качество управления)?

В схеме модального управления [1. С. 8–21; 2. С. 9–12] качество управления задается в виде области  $S$  на комплексной плоскости, определяющей желаемое расположение полюсов ПФ. Следовательно, вопросы исследования (проверки) робастной устойчивости и робастного качества управления могут быть рассмотрены с единых позиций: требуется проверить, принадлежат ли корни заданного семейства полиномов области  $S$ .

Проблема исследования робастной устойчивости и робастного качества управления широко представлена в литературе. Можно выделить три главных направления, в рамках которых решается данная задача: 1) принцип исключения нуля; 2) теория  $H^\infty$ ; 3) метод LMI.

Принцип исключения нуля впервые был сформулирован в работах [3–4]. Обобщениям принципа исключения нуля на различные случаи, а также разработке на их основе вычислительных методик проверки робастной устойчивости посвящено большое количество статей (см., напр.: [5–6]). В указанных работах основное внимание уделяется проверке робастной устойчивости (задача исследования робастного качества управления не рассматривается).

Следует отметить, что в [7, 8] и некоторых других статьях были получены достаточные критерии робастного качества управления для случаев, когда область  $S$  имеет специальную форму – форму трапеции в [7] или сектора в [8]. Общая формулировка критерия робастного качества управления, не зависящая от формы области  $S$ , не получена [6. С. 227].

Методы теории  $H^\infty$  (см., напр.: [9–11]) позволяют формулировать достаточное условие робастной устойчивости при наличии как параметрической (неопределенность коэффициентов в операторах), так и структурно-параметрической (неточность задания порядков операторов) неопределенностей в описании объекта. Однако существенным недостатком таких критериев является использование  $H^\infty$ -метрики операторов, что сильно ограничивает классы ПФ, для которых выполняются условия этих критериев. Кроме того, требования к качеству управления сложно выразить в терминах  $H^\infty$ -норм операторов.

Метод линейных матричных неравенств (LMI) можно рассматривать как дальнейшее развитие  $H^\infty$ -теории. Основу LMI подхода составляет «частотная теорема» [12]. Данный метод позволяет решать ряд задач теории управления (например, задачи оптимально-квадратичного управления, робастного  $H^\infty$ -управления, оптимального гашения внешних возмущений в рамках теории  $H^\infty$ -управления и др.) путем сведения к линейным матричным неравенствам [13–16]. При этом все замечания, сделанные к теории  $H^\infty$ , остаются справедливыми и для данного метода.

Таким образом, сформулированная выше задача исследования робастного качества управления остается нерешенной.

В настоящей статье в развитие результатов, изложенных в [6], разрабатывается вычислительная технология исследования робастного качества управления.

Далее приняты следующие обозначения:  $\doteq$  – равно по определению;  $*$  – операция комплексного сопряжения;  $j$  – мнимая единица;  $R^n$ ,  $C^n$  – пространства  $n$ -мерных векторов  $\mathbf{x} \doteq (x_1, \dots, x_n)$ , коэффициенты которых соответственно вещественные или мнимые числа;  $z$ ,  $s$  – комплексные переменные;  $S$  – область на  $C^1$ ;  $\partial S$  – граница области  $S$ ;  $\text{int } S$  – внутренняя часть области  $S$ ;  $t$  – непрерывное время;  $p^i$  – оператор  $i$ -й степени дифференцирования по времени:

$$p^i \doteq d^i / dt^i; \quad i \in \overline{0, n}, \quad p^0 \doteq 1.$$

«Полиномиальным оператором» степени  $l$  будем называть дифференциальный оператор вида:

$$f(l, p) = \sum_{i=0}^l f_i p^i, \quad (1)$$

где  $f_i$  – постоянные коэффициенты ( $i \in \overline{0, l}$ ). В изображениях по Лапласу оператору (1) соответствует алгебраический полином

$$f(l, s) = \sum_{i=0}^l f_i s^i,$$

определенный на  $C^1$ ; здесь за  $s$  обозначена переменная преобразования Лапласа ( $s \in C^1$ ).

«Множество корней (нулей)» полинома  $f(l, s)$  будем обозначать  $\Lambda(f)$ :

$$\Lambda(f) \doteq \{ \lambda_i : f(l, \lambda_i) = 0, \quad i \in \overline{1, l} \}.$$

«Интервальным дифференциальным оператором» степени  $l$  будем называть семейство дифференциальных операторов вида:

$$f(l, F, p) \doteq \left\{ f(l, \mathbf{f}, p) \doteq \sum_{i=0}^l f_i p^i : \forall \mathbf{f} \doteq (f_0, \dots, f_l) \in F \right\}, \quad (2)$$

где

$$F \doteq \left\{ \mathbf{f} \in R^{l+1} : \forall f_i \in [f_i^0 - \Delta f_i, f_i^0 + \Delta f_i], f_l^0 \neq 0, \Delta f_i \geq 0, i \in \overline{0, l} \right\} -$$

область (многомерный параллелепипед) заданная в пространстве коэффициентов.

Выполняя в (2) формальную замену  $p$  на  $s$ , получаем «интервальный полином»

$$f(l, F, s) \doteq \left\{ f(l, \mathbf{f}, s) \doteq \sum_{i=0}^l f_i s^i : \forall \mathbf{f} \in F \right\}. \quad (3)$$

Интервальный полином (3) можно представить в виде:

$$f(l, F, s) = f^0(l, s) + \Delta f(l, \Delta F, s), \quad (4)$$

где

$$f^0(l, s) \doteq \sum_{i=0}^l f_i^0 s^i -$$

«точечный» полином, а

$$\Delta f(l, \Delta F, s) \doteq \left\{ \delta f(l, \delta \mathbf{f}, s) \doteq \sum_{i=0}^l \delta f_i s^i : \forall \delta \mathbf{f} \doteq (\delta f_0, \dots, \delta f_l) \in \Delta F \right\},$$

$$\Delta F \doteq \left\{ \delta \mathbf{f} : \forall \delta f_i \in [-\Delta f_i, \Delta f_i], i = \overline{0, l} \right\} -$$

интервальный полином с симметричными интервалами неопределенности коэффициентов.

### 1. Схема синтеза робастного модального регулятора и задача исследования робастного качества управления

Пусть линейный объект управления задан дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка с интервальной неопределенностью коэффициентов

$$a(n, \mathbf{a}, p)y(t) = b(m, \mathbf{b}, p)u(t), \quad n > m, \quad a_n^0 = 1, \quad \Delta a_n = 0, \quad (5)$$

здесь  $u$  – входной (управляющий) сигнал,  $y$  – выходной (управляемый) сигнал, а  $a(n, \mathbf{a}, p)$  и  $b(m, \mathbf{b}, p)$  – дифференциальные операторы вида (4). Модель

$$a^0(n, p)y(t) = b^0(m, p)u(t), \quad (6)$$

принадлежащую семейству моделей (5), назовем «номинальной».

Качество управления будем назначать в виде области  $S$ , определяющей допустимое расположение полюсов ПФ на  $C^1$ . Предполагаем, что область  $S$  удовлетворяет следующим условиям: расположена в ограниченной части  $C^1$  слева от мнимой оси; односвязна; для любой точки  $s \in S$  также выполняется  $s^* \in S$ .

В технологии синтеза модального регулятора (см., напр.: [1. С. 8–21]) регулятор ищется в виде дифференциального уравнения  $(n - 1)$ -го порядка:

$$\beta(n-1, p)u(t) = \alpha(n-1, p)y(t) + \chi(q, p)g(t), \quad q \leq n-1, \quad \beta_{n-1} = 1, \quad (7)$$

здесь  $g$  – заданный программный сигнал. Коэффициенты операторов  $\beta(n-1, p)$  и  $\alpha(n-1, p)$  регулятора (7) рассчитываются из условия обращения в тождество уравнения

$$a^{\text{et}}(2n-1, s) = a^0(n, s)\beta(n-1, s) - b^0(m, s)\alpha(n-1, s), \quad a_{2n-1}^{\text{et}} = 1, \quad (8)$$

где  $a^{\text{et}}(2n-1, s)$  – заданный характеристический полином эталонной системы управления (далее – «эталон»); выбор эталона ограничен условием

$$\Lambda(a^{\text{et}}) \subset \text{int } S. \quad (9)$$

Очевидно, что выбор полинома  $\chi(q, s)$  не влияет на свойства робастной устойчивости и робастного качества управления, поэтому вопрос расчета полинома  $\chi(q, s)$  в данной работе не рассматривается.

В уравнении (8), приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях переменной  $s$ , получаем систему из  $2n - 1$  линейных алгебраических уравнений относительно  $2n - 1$  неизвестных коэффициентов полиномов  $\beta(n-1, s)$  и  $\alpha(n-1, s)$  [Там же. С. 12–13]. Данная система однозначно разрешима, если корни полинома  $a^0(n, s)$  не совпадают с корнями полинома  $b^0(m, s)$  [2. С. 11].

После замыкания исходного объекта (5) регулятором, синтезированным по схеме (7)–(9), получим ПФ замкнутой системы (поскольку операция деления на множество полиномов не определена, запись носит условный характер):

$$w^c(s) = b^c(m+q, B, s) / a^c(2n-1, A, B, s),$$

здесь

$$b^c(m+q, B, s) = b(m, B, s)\chi(q, s),$$

$$a^c(2n-1, A, B, s) = a(n, A, s)\beta(n-1, s) - b(m, B, s)\alpha(n-1, s).$$



Множество полиномов  $a^c(2n-1, A, B, s)$  назовем «семейством характеристических полиномов» замкнутой системы; это семейство может быть записано через свои элементы  $a^c(2n-1, \mathbf{a}, \mathbf{b}, s)$ :

$$a^c(2n-1, A, B, s) = \{a^c(2n-1, \mathbf{a}, \mathbf{b}, s) : \forall \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\}, \quad (10)$$

здесь (с учетом условия (8))

$$\begin{aligned} a^c(2n-1, \mathbf{a}, \mathbf{b}, s) &\doteq a(n, \mathbf{a}, s)\beta(n-1, s) - b(m, \mathbf{b}, s)\alpha(n-1, s) = \\ &= a^{\text{et}}(2n-1, s) + \delta a(n-1, \delta \mathbf{a}, s)\beta(n-1, s) - \delta b(m, \delta \mathbf{b}, s)\alpha(n-1, s). \end{aligned}$$

Множество

$$\Lambda(a^c) = \{\lambda_i : \exists \mathbf{a} \in A, \exists \mathbf{b} \in B, a^c(2n-1, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda_i) = 0, i = \overline{1, 2n-1}\}$$

назовем «множеством корней» семейства характеристических полиномов (или «множеством полюсов» ПФ  $w^c(s)$ ).

Будем считать, что замкнутая система с характеристическим полиномом (10) обладает робастным качеством управления, если множество  $\Lambda(a^c)$  лежит внутри области  $S$ , т.е. выполнено условие (далее – **условие робастного качества управления**)

$$\Lambda(a^c) \subset \text{int } S. \quad (11)$$

При наличии интервальной неопределенности коэффициентов в объекте управления нельзя заранее гарантировать, что модальный регулятор, рассчитанный по формулам (7)–(9), будет обеспечивать выполнение условия (11). Таким образом, задача синтеза модального регулятора в условиях неопределенности в объекте управления состоит из следующих этапов:

1) синтез модального регулятора для номинального объекта (6) (по формулам (7)–(9));

2) последующая проверка выполнения условия (11) для заданного семейства характеристических полиномов (10) (**задача исследования робастного качества управления**).

В следующем разделе разрабатывается вычислительная технология исследования робастного качества управления для семейства характеристических полиномов вида (10).

## 2. Вычислительная технология исследования робастного качества управления

### 2.1. Критерий робастного качества управления

Выражение (10) представляет аффинное семейство полиномов (здесь и далее несущественные для рассуждений аргументы полиномов будем опускать)

$$a^c(s) = \left\{ z(\xi, s) \doteq z_0(s) + \sum_{i=1}^l \xi_i z_i(s) : \xi = (\xi_1, \dots, \xi_l) \in \Xi(\gamma) \right\}, \quad (12)$$

где

$$z_0(s) = a^{\text{et}}(2n-1, s), \quad z_i(s) = \begin{cases} \Delta a_{i-1} s^{i-1} \beta(n-1, s), & i \in \overline{1, n-1}, \\ \Delta b_{i-n} s^{i-n} \alpha(n-1, s), & i \in \overline{n, n+m}, \end{cases}$$

$$l = n + m,$$

а  $\Xi(\gamma)$  –  $l$ -мерный куб в пространстве коэффициентов семейства (12):

$$\Xi(\gamma) \doteq \{\xi \in R^l : |\xi_i| \leq \gamma, \forall i \in \overline{1, l}\}$$

(здесь  $\gamma = 1$ ). Обозначим за  $Z(\gamma, s)$  множество значений («геометрический образ») семейства полиномов (12) для точки  $s \in \partial S$ :

$$Z(\gamma, s) = \left\{ z_0(s) + \sum_{i=1}^l \xi_i z_i(s) : |\xi_i| \leq \gamma \right\} \subset C^1. \quad (13)$$

Доказано (см., напр.: [6. С. 174]), что геометрический образ аффинного семейства полиномов (12) представляет выпуклую линейную оболочку (многоугольник) на  $C^1$ , вершины которой определяются

вершинными полиномами  $z_0(s) \pm \gamma z_i(s)$ ,  $i \in \overline{1, l}$ ; общее число вершин многоугольника не превышает  $2l$ . Точки комплексной плоскости, соответствующие вершинным полиномам, называются «точками-кандидатами». Выпуклая линейная оболочка  $Z(\gamma, s)$  записывается через свои точки-кандидаты:

$$Z(\gamma, s) = \text{Conv}\{z_0(s) \pm \gamma z_i(s), i \in \overline{1, l}\}.$$

Существует множество алгоритмов построения выпуклой линейной оболочки на плоскости по известным точкам-кандидатам (например, алгоритмы Грэхема, Джарвиса и др. [17. С. 106–112]).

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть полином  $a^{\text{et}}(2n - 1, s)$ , принадлежащий семейству (10), удовлетворяет условию (9). Тогда для семейства полиномов (10) выполняется условие робастного качества управления (11) если и только если

$$0 \notin Z(1, s), \quad \forall s \in \partial S. \quad (14)$$

*Доказательство.* Рассмотрим произвольный полином, принадлежащий семейству (10). Изменение количества корней этого полинома, лежащих внутри области  $S$ , может происходить только в том случае, когда хотя бы один из них (при вариациях векторов параметров  $\mathbf{a} \in A$  и  $\mathbf{b} \in B$ ) пересечет границу области  $S$  и условие (14) будет нарушено. Что и требовалось доказать.

Точка  $z_0(s)$  является центром построения выпуклой линейной оболочки (13), таким образом, множество (13) может быть записано:

$$Z(\gamma, s) = z_0(s) + \Delta Z(\gamma, s),$$

где  $\Delta Z(\gamma, s) = \text{Conv}\{\pm \gamma z_i(s), i \in \overline{1, l}\}$  – симметричная выпуклая линейная оболочка (симметрия  $\Delta Z(\gamma, s)$  на  $C^1$  следует из симметрии куба  $\Xi(\gamma)$ ). В результате условие (14) принимает вид:

$$z_0(s) \notin \Delta Z(1, s), \quad \forall s \in \partial S. \quad (15)$$

Основная сложность проверки условия (15), как и в случае задачи робастной устойчивости, состоит в необходимости:

- 1) эффективно строить многоугольник  $\Delta Z(\gamma, s)$  на комплексной плоскости для точки  $s \in \partial S$ ;
- 2) эффективно проверять выполнение условия (15) для точки  $s \in \partial S$ .

Технология проверки условия (15) изложена ниже.

## 2.2. Методика проверки робастного качества управления

Алгоритм Грэхема [Там же. С. 106–110] формирует множество точек-вершин оболочки  $\Delta Z(1, s)$  в порядке их обхода против часовой стрелки (поскольку при построении оболочки  $\Delta Z(1, s)$  точка  $s$  предполагается фиксированной, далее аргумент  $s$  будем опускать):

$$\theta_k, \quad k \in \overline{1, 2r} \quad (r \leq l).$$

Вершины  $\theta_k(\gamma)$  оболочки  $\Delta Z(\gamma)$  (с произвольным значением  $\gamma$ ) получают по формулам

$$\theta_k(\gamma) = \gamma \theta_k, \quad k \in \overline{1, 2r}.$$

При проверке условия (15) будем выделять два случая:  $r = 1$  и  $r > 1$ . В случае  $r = 1$  многоугольник  $\Delta Z(\gamma)$  вырождается в отрезок

$$Z(\gamma, s) = \gamma[-\theta_1, \theta_1]. \quad (16)$$

В случае  $r > 1$  при  $\gamma = 0$  многоугольник  $\Delta Z(\gamma)$  сжимается в точку  $(0, j0)$ , при  $\gamma \rightarrow \infty$  многоугольник стремится ко всей комплексной плоскости.

Поставим следующую **вспомогательную задачу**: для точки  $s \in \partial S$  требуется найти значение

$$\gamma(s) \doteq \min\{\gamma: z_0(s) \in \partial \Delta Z(\gamma, s), \gamma \geq 0\}, \quad (17)$$

если оно существует.

Рассмотрим случай  $r = 1$ . Точка  $z_0$  может принадлежать отрезку (16) только в том случае, если она принадлежит линии

$$a \operatorname{Re}(z) + b \operatorname{Im}(z) = 0, \quad a = -\operatorname{Im}(\theta_1), \quad b = \operatorname{Re}(\theta_1), \quad (18)$$

на которой находится отрезок (16). Доопределяя  $\gamma(s) = \infty$  в тех случаях, когда точка  $z_0$  не лежит на линии (18) получаем следующее выражение для  $\gamma(s)$ :

$$\gamma(s) = \begin{cases} |z_0|/|\theta_1|, & a \operatorname{Re}(z_0) + b \operatorname{Im}(z_0) = 0, \\ \infty, & a \operatorname{Re}(z_0) + b \operatorname{Im}(z_0) \neq 0. \end{cases} \quad (19)$$

Рассмотрим случай  $r > 1$ . Многоугольник  $\Delta Z(\gamma)$  может быть задан системой линейных алгебраических неравенств

$$a_k \operatorname{Re}(z) + b_k \operatorname{Im}(z) + c_k \geq 0, \quad k \in \overline{1, 2 \cdot r}, \quad (20)$$

коэффициенты  $a_k, b_k, c_k$  определяются по формулам (для простоты записи формул (21) принимается  $\theta_{2r+1} \equiv \theta_1$ ):

$$\begin{aligned} \psi_k &= \operatorname{Re}(\theta_{k+1} - \theta_k) \operatorname{Im}(\theta_k) - \operatorname{Im}(\theta_{k+1} - \theta_k) \operatorname{Re}(\theta_k), \quad c_k = \gamma |\psi_k|, \\ a_k &= \begin{cases} \operatorname{Im}(\theta_{k+1} - \theta_k), & \psi_k \geq 0, \\ -\operatorname{Im}(\theta_{k+1} - \theta_k), & \psi_k < 0, \end{cases} \quad b_k = \begin{cases} -\operatorname{Re}(\theta_{k+1} - \theta_k), & \psi_k \geq 0, \\ \operatorname{Re}(\theta_{k+1} - \theta_k), & \psi_k < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

Точка  $z_0$  принадлежит границе  $\Delta Z(\gamma)$  в следующих случаях:

1) точка  $z_0$  находится на  $k$ -й стороне многоугольника  $\Delta Z(\gamma)$ , при этом в данной точке  $k$ -е неравенство системы (20)–(21) обратится в равенство, откуда находим значение параметра  $\gamma$  (обозначим его за  $\gamma_k$ ):

$$\gamma_k = -\left(a_k \operatorname{Re}(z_0) + b_k \operatorname{Im}(z_0)\right) / |\psi_k|;$$

2) точка  $z_0$  находится в  $k$ -й вершине многоугольника  $\Delta Z(\gamma)$ , при этом  $k$ -е и  $(k + 1)$ -е неравенства системы (20)–(21) обратятся в равенства.

Сформируем множество

$$\Gamma_+(s) \doteq \left\{ \gamma_k = -\left(a_k \operatorname{Re}(z_0) + b_k \operatorname{Im}(z_0)\right) / |\psi_k| : \gamma_k \geq 0, \quad k \in \overline{1, 2r} \right\}.$$

Отметим, что по смыслу задачи сразу все значения  $\gamma_k, (k \in \overline{1, 2 \cdot r})$  не могут быть отрицательны, следовательно, множество  $\Gamma_+(s)$  не пусто. Очевидно, что искомое значение  $\gamma(s)$  находится по формуле

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \max \{ \gamma_k \in \Gamma_+(s) : \\ & a_i \operatorname{Re}(z_0) + b_i \operatorname{Im}(z_0) + \gamma_k |\psi_i| \geq 0, \quad \forall i \in \overline{1, 2r} \}. \end{aligned} \quad (22)$$

Приведенные рассуждения можно рассматривать в качестве нестроого доказательства следующей леммы.

**Лемма 1.** Решение задачи (17) для точки  $s \in \partial S$  определяется формулами (19) в случае  $r = 1$  и (22) в случае  $r > 1$ .

Основываясь на данной лемме, теорему 1 можем переформулировать следующим образом.

**Теорема 2.** Пусть полином  $a^{\text{et}}(2n - 1, s)$ , принадлежащий семейству (10), удовлетворяет условию (9). Тогда для семейства полиномов (10) выполняется условие робастного качества управления (11) если и только если

$$\gamma_- \doteq \min_{s \in \partial S} \gamma(s) > 1,$$

где  $\gamma(s)$  – решение задачи (17).

Величина  $\gamma_-$  определяет, во сколько раз следует увеличить (при  $\gamma_- > 1$ ) или уменьшить (при  $\gamma_- < 1$ ) одновременно все интервалы в модели (5), чтобы для характеристического полинома (10) впервые было нарушено условие робастного качества управления (11). Теорема 2 является основой для изложенного ниже алгоритма проверки робастного качества управления.

Пусть на  $\partial S$  задано множество точек

$$\Omega(n') = \{ s_i, i \in \overline{1, n'} \}, \quad (n' < \infty). \quad (23)$$

**Алгоритм исследования робастного качества управления**

1. В каждой точке  $s_i \in \Omega(n')$  по формулам (19) и (22) вычислить  $\gamma(s_i)$ .
2. По формуле  $\gamma_- = \min_{i \in 1, N} \gamma(s_i)$  рассчитать  $\gamma_-$ .
3. Проверить выполнение условия

$$\gamma_- > 1. \tag{24}$$

Если условие (24) выполнено, то для семейства полиномов (10) выполняется робастное качество управления, если нет – робастное качество не выполняется.

Проверка робастного качества управления закончена.

**Замечание.** Очевидно, что для того, чтобы по условию (24) можно было судить о робастном качестве управления, необходимо, чтобы множество точек (23) было как можно больше и располагалось достаточно равномерно на  $\partial S$ .

**3. Пример исследования робастного качества управления**

Пусть задан объект управления с интервальной неопределенностью коэффициентов

$$(a^0(2, p) + \Delta a(1, p))y(t) = (b^0(1, p) + \Delta b(1, p))u(t),$$

где

$$a^0(2, p) = p^2 + 4p + 13, \quad b^0(1, p) = 10,67p + 138,67, \\ \Delta a(1, p) = [-1, 1]p + [-4, 4], \quad \Delta b(1, p) = [-1, 1]p + [-1, 1].$$

Требования к качеству управления задаются областью

$$S = \{s : \eta_2 \leq -\text{Re}(s) \leq \eta_1, \quad |\text{Im}(s)|/|\text{Re}(s)| \leq \mu_1\},$$

где  $\eta_1 = 25, \eta_2 = 2, \mu = 1$ .

Характеристический полином эталона выберем

$$a^{\text{et}}(3, s) = s^3 + 15s^2 + 75s + 125.$$

Для номинальной модели

$$a^0(2, p)y(t) = b^0(1, p)u(t)$$

и эталона  $a^{\text{et}}(3, s)$  рассчитан модальный регулятор:

$$(p + 9,062)u(t) = (-0,182p - 0,052)y(t) + \chi_0 g(t).$$

Семейство характеристических полиномов замкнутой системы

$$a^c(3, s) = a^{\text{et}}(3, s) + \Delta a(1, s)\beta(1, s) - \Delta b(1, s)\alpha(1, s). \tag{25}$$

Требуется найти  $\gamma_-$ .

*Решение.* В результате расчётов функции  $\gamma(s)$  вдоль  $\partial S$  получено значение  $\gamma_- = 1,19$ . Это означает, что семейство (25) сохраняет робастное качество управления.

**Заключение**

В данной работе обоснована схема синтеза робастного модального регулятора. Важной частью процедуры расчета регулятора является задача исследования робастного качества управления. В статье получено обобщение принципа исключения нуля (теорема 1), на основе которого разработана вычислительная технология проверки робастного качества управления. Предложенная схема синтеза проиллюстрирована примером.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Паршуков А.Н. Методы синтеза модальных регуляторов. Тюмень : ТюмГНГУ, 2009. 84 с.
2. Соловьев И.Г. Методы мажоризации в анализе и синтезе адаптивных систем. Новосибирск : Наука, 1992. 191 с.

3. Ackermann J.A., Bartlett D., Kaesbauer W.S., Steinhauser R. Robust control. Systems with uncertain physical parameters. London : Springer-Verlag, 1993. 413 p.
4. Barmish B.R. New tools for robustness of linear systems. New York : MacMillan, 1994. 394 p.
5. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем // Автоматика и телемеханика. 1990. № 9. С. 45–54.
6. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М. : Наука, 2002. 303 с.
7. Хлебалин Н.А. Построение интервальных полиномов с заданной областью расположения корней // Аналитические методы синтеза регуляторов : межвуз. науч. сб. Саратов : СПИ, 1982. С. 92–98.
8. Липатов А.В., Соколов Н.И. О некоторых достаточных условиях устойчивости линейных непрерывных стационарных систем // Автоматика и телемеханика. 1978. № 9. С. 30–37.
9. Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A. State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1989. V. 34, No. 8. P. 831–847.
10. Khargonekar P.P., Rotea M.A. Mixed  $H_2/H_\infty$  control: a convex optimization approach // IEEE Transactions on Automatic Control. 1991. V. 36, No. 7. P. 824–831.
11. Kogan M.M. Optimal discrete-time  $H_\infty/\gamma_0$  filtering and control under unknown covariances // Int. J. Control. 2016. V. 89, No. 4. P. 691–700.
12. Якубович В.А. Частотная теорема в теории управления // Сибирский математический журнал. 1973. Т. 14, № 2. С. 384–420.
13. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М. : Физматлит, 2007. 280 с.
14. Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. An LMI approach to structured sparse feedback design in linear control systems // Proc. 12th European Control Conf. Zurich, 2013. P. 833–838.
15. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: техника линейных матричных неравенств. М. : Ленанд, 2014. 560 с.
16. Баландин Д.В., Коган М.М., Кривдина Л.Н., Федюков А.А. Синтез обобщенного  $H_\infty$ -оптимального управления в дискретном времени на конечном и бесконечном интервалах // Автоматика и телемеханика. 2014. № 1. С. 3–22.
17. Preparata F., Shamos M. Computational geometry. An introduction. New York : Springer-Verlag, 1985. 411 p.

Поступила в редакцию 26 марта 2019 г.

Parshukov A.N. (2019) SYNTHESIS METHOD OF MODAL REGULATOR FOR CONTROL OBJECT WITH INTERVAL UNCERTAINTY OF COEFFICIENTS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 49. pp. 14–22

DOI: 10.17223/19988605/49/2

As a result of the identification of technological processes, the model of the control object is most often restored in the form of a linear differential equation (of a given order), the coefficients of which are determined with accuracy to belong to certain intervals. In fact, such interval uncertainty of coefficients means that the control object is described by the whole family of models.

In most of the classical schemes of synthesis, the regulator is calculated for the model with exactly the desired coefficients. In the case of a control object with interval uncertainty of coefficients, the regulator can be calculated according to classical schemes for a model with average values from the given intervals. In this case, after the closure of the control object (described by the family of models) by the synthesized controller, uncertainty appears in the transfer function of the closed system. Since the properties of stability and control quality of the system are determined by the location of the poles of its transfer function, the question arises: at what size of the interval uncertainty in the control object the closed system will still retain the properties of stability (robust stability) and control quality (robust control quality)?

In the modal control scheme, the control quality is set as an area  $S$  on the complex plane, which determines the desired location of the poles of the transfer function. Therefore, the questions of research (verification) of robust stability and robust control quality can be considered from a single point of view: is it necessary to check whether the roots of a given family of polynomials in the domain  $S$ ?

In the literature devoted to robust theory focuses on the problem of robust stability, and the problem of robust quality control fades into the background and is still not solved.

The aim of the study is to develop a scheme for the synthesis of a modal controller for the case of interval uncertainty of the coefficients in the object model and a method for the study of robust control quality for a closed control system.

This paper generalizes a theorem known as the "zero elimination principle" and the problem of checking the robust quality of control is reduced to the problems of constructing a "geometric image" of a family of polynomials with interval uncertainty of coefficients and subsequent verification of the belonging of a given point to a "geometric image". The geometric image of such a family represents a convex linear shell on the complex plane. The technology of construction of convex linear shells is described in many works.

In the article the method of synthesis of a robust modal regulator is offered, the criterion of robust quality of control is received. The synthesis method is brought to computational procedures and can be implemented on a computer. The synthesis technology is illustrated by an example.

Practical significance: this method of synthesis allows to calculate the regulator settings in the conditions of interval uncertainty of coefficients in the control object model.

Keywords: interval uncertainty; modal regulator; robust control quality.

PARSHUKOV Andrej Nikolaevich (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Tyumen Industrial University, Tyumen, Russian Federation).

E-mail: anparshukov@mail.ru

#### REFERENCES

1. Parshukov, A.N. (2009) *Metody sinteza modal'nykh regulyatorov* [Methods of synthesis of modal regulators]. Tyumen: Tyumen State Oil and Gas University.
2. Soloviev, I.G. (1992) *Metody mazhorizatsii v analize i sinteze adaptivnykh system* [Methods of majorization in the analysis and synthesis of adaptive systems]. Novosibirsk: Nauka.
3. Ackermann, J.A., Bartlett, D., Kaesbauer, W.S. & Steinhauser, R. (1993) *Robust control. Systems with uncertain physical parameters*. London: Springer-Verlag.
4. Barmish, B.R. (1994) *New tools for robustness of linear systems*. New York: MacMillan.
5. Polyak, B.T. & Tsytkin, Ya.Z. (1990) Frequency criteria of robust stability and aperiodicity of linear systems. *Automation and Remote Control*. 51(9). pp. 1192–1201.
6. Polyak, B.T. & Shcherbakov, P.S. (2002) *Robastnaya ustoychivost' i upravlenie* [Robust stability and control]. Moscow: Nauka.
7. Khlebalin, N.A. (1982) Postroenie interval'nykh polinomov s zadannoy oblast'yu raspolozheniya korney [Construction of interval polynomials with a given area of roots]. In: *Analiticheskie metody sinteza regulyatorov* [Analytical methods of controller synthesis]. Saratov: SPI. pp. 92–98.
8. Lipatov, A.V. & Sokolov, N.I. (1979) On some sufficient conditions for stability and instability of linear continuous stationary systems. *Automation and Remote Control*. 39(9). pp. 1285–1291.
9. Doyle, J.C., Glover, K., Khargonekar, P.P. & Francis, B.A. (1989) State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 34(8). pp. 831–847. DOI: 10.1109/9.29425
10. Khargonekar, P.P. & Rotea, M.A. (1991) Mixed  $H_2/H_\infty$  Control: a Convex Optimization Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 36(7). pp. 824–831. DOI: 10.1109/9.85062
11. Kogan, M.M. (2016) Optimal discrete-time  $H_\infty/\gamma_0$  filtering and control under unknown covariances. *International Journal of Control*. 89(4). pp. 691–700. DOI: 10.1080/00207179.2015.1091511
12. Yakubovich, V.A. (1973) Chastotnaya teorema v teorii upravleniya [A frequency theorem in control theory]. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal – Siberian Mathematical Journal*. 14(2). pp. 265–289.
13. Balandin, D.V. & Kogan, M.M. (2007) *Sintez zakonov upravleniya na osnove lineynykh matrichnykh neravenstv* [Synthesis of control laws based on linear matrix inequalities]. Moscow: Fizmatlit.
14. Polyak, B.T., Khlebnikov, M.V. & Shcherbakov, P.S. (2013) An LMI approach to structured sparse feedback design in linear control systems. *Proc. 12th European Control Conference*. Zurich. pp. 833–838.
15. Polyak, B.T., Khlebnikov, M.V. & Shcherbakov, P.S. (2014) *Upravlenie lineynymi sistemami pri vneshnikh vozmushcheniyakh: tekhnika lineynykh matrichnykh neravenstv* [Control of linear systems under external disturbances: Technique of linear matrix inequalities]. Moscow: Lenand.
16. Balandin, D.V., Kogan, M.M., Krivdina, L.N. & Fedyukov, A.A. (2014) Design of generalized discrete-time  $H_\infty$ -optimal control over finite and infinite intervals. *Automation and Remote Control*. 75(1). pp. 1–17.
17. Preparata, F. & Shamos, M. (1985) *Computational Geometry. An Introduction*. New York: Springer-Verlag.

УДК 517.93+519.87  
DOI: 10.17223/19988605/49/3

**Е.А. Перепелкин**

### **РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ**

Решена задача синтеза системы управления состоянием одноканальной марковской системы массового обслуживания с пуассоновским законом поступления заявок, экспоненциальным законом обработки заявок и ограниченным числом заявок в системе. Предполагается, что интенсивность поступления заявок и интенсивность обработки заявок неизвестны и могут меняться в процессе функционирования системы. Описан алгоритм синтеза управления в виде обратной связи. Дано обоснование асимптотической устойчивости и робастности системы с обратной связью. Приведены результаты моделирования.

**Ключевые слова:** система массового обслуживания; перегрузка; робастное управление.

Исследования по управляемым системам массового обслуживания проводятся в течение нескольких десятилетий. Как правило, под управлением в системе массового обслуживания понимается оптимизация структуры, параметров и режимов работы системы [1, 2] или построение оптимального стохастического управления системой обслуживания как марковским процессом с конечным множеством состояний [3].

С развитием компьютерных сетей возникли новые задачи управления, связанные с устранением перегрузок в компьютерных сетях [4]. При решении этих задач нашли применение методы теории автоматического управления. Например, в системах с активным управлением очередью ТСР-пакетов предлагается использовать классические законы управления в виде обратной связи [5–8]. Управление в таких системах осуществляется маркировкой (отклонением) поступающих в буфер узла компьютерной сети ТСР-пакетов. При этом отклонение пакетов выполняется с некоторой заданной вероятностью.

В данной работе рассматривается возможность применения пропорционально-интегральной обратной связи для решения задачи управления состоянием одной из наиболее простых систем массового обслуживания – одноканальной марковской системы с пуассоновским законом поступления заявок, экспоненциальным законом обработки заявок и ограниченным числом заявок в системе. Предполагается, что система функционирует в условиях перегрузки, когда интенсивность поступления заявок выше интенсивности обработки заявок. При этом интенсивность поступления заявок и интенсивность обработки заявок неизвестны и могут меняться в процессе функционирования системы.

Под состоянием системы  $x(t)$  будем понимать число заявок в системе в момент времени  $t$ . Управление осуществляется отклонением поступающих заявок с некоторой вероятностью. Система управления должна обеспечить желаемое среднее число заявок в системе и тем самым исключить возможность перегрузки системы.

Выбор управления в виде пропорционально-интегральной обратной связи обусловлен свойством робастности и простотой реализации системы управления. В отличие от адаптивных систем управления в данном случае не требуется оценивать интенсивности поступления и обработки заявок и настраивать систему управления в процессе ее функционирования.

В работе дано обоснование асимптотической устойчивости и робастности системы с обратной связью. Описан алгоритм синтеза обратной связи. Приведены результаты моделирования системы с управлением.

### 1. Объект управления

Введем обозначения:  $\lambda$  – интенсивность поступления заявок;  $\mu$  – интенсивность обработки заявок;  $u$  – вероятность отклонения поступившей заявки;  $n$  – допустимое число заявок в системе,  $p_i(t)$  – вероятность нахождения системы в состоянии  $i = 0, 1, \dots, n$  в момент времени  $t$ . Значения  $\lambda$  и  $\mu$  неизвестны и могут меняться в процессе функционирования системы.

Среднее число заявок в системе в момент времени  $t$  равно

$$y(t) = p_1(t) + 2p_2(t) + 3p_3(t) + \dots + np_n(t).$$

Задача управления заключается в обеспечении заданного среднего числа заявок в системе  $y(t) = \bar{y}$ ,  $0 < \bar{y} < n$ .

Рассмотрим объект управления как конечную цепь Маркова. Динамика цепи Маркова описывается системой уравнений Колмогорова [9]:

$$\dot{p} = Ap + (Bp)u, \quad y = cp, \quad ep = 1, \tag{1}$$

где

$$p = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -\lambda & \mu & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & -\lambda - \mu & \mu & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda - \mu & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda - \mu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -\lambda - \mu & \mu \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & -\mu \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & 0 \end{bmatrix}, \quad c = [0 \ 1 \ 2 \ \dots \ n], \quad e = [1 \ 1 \ \dots \ 1].$$

Система (1) относится к классу билинейных систем [10] с ограничениями на переменные состояния и управления. Синтез управления в виде обратной связи по выходу для такого рода систем является достаточно сложной математической задачей [11].

### 2. Робастное управление

Перейдем к более простому описанию объекта управления. Заметим, что

$$cA = [\lambda \ \lambda - \mu \ \dots \ \lambda - \mu \ -\mu], \quad cB = [-\lambda \ -\lambda \ \dots \ -\lambda \ 0].$$

Из системы уравнений (1) получим

$$\dot{y} = c\dot{p} = cAp + (cBp)u = -\lambda(1 - p_n)u + \lambda(1 - p_n) - \mu(1 - p_0).$$

Следовательно, динамика среднего числа заявок в системе подчиняется уравнению

$$\dot{y} = -ay + b, \tag{2}$$

где  $a = \lambda(1 - p_n)$ ,  $b = \lambda(1 - p_n) - \mu(1 - p_0)$ .

Уравнение (2) будем рассматривать как уравнение системы с неконтролируемым внешним возмущением  $b$  и неопределенным параметром  $a$ . Управление будем строить в виде пропорционально-интегральной обратной связи

$$u = k_p \tilde{y} + k_i z, \quad \dot{z} = \tilde{y},$$



где  $\tilde{y} = y - \bar{y}$  отклонение среднего числа заявок в системе от заданного значения  $\bar{y}$ ,  $k_p$ ,  $k_i$  – коэффициенты обратной связи.

Замкнутая система описывается уравнениями

$$\dot{\tilde{y}} = -ak_p\tilde{y} - ak_i z + b, \quad \dot{z} = \tilde{y}.$$

Характеристический многочлен замкнутой системы равен  $\Delta(s) = s^2 + ak_p s + ak_i$ . Замкнутая система будет асимптотически устойчивой при любом  $a > 0$  тогда и только тогда, когда  $k_p > 0$ ,  $k_i > 0$ . Из асимптотической устойчивости замкнутой системы следует  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \bar{y}$ .

Пусть известна оценка максимального значения интенсивности потока заявок  $\lambda_{\max}$ . Следовательно,  $0 \leq a \leq \lambda_{\max}$ . Коэффициенты обратной связи рассчитаем при  $a = \lambda_{\max}$ . Зададим желаемые полюсы замкнутой системы равными  $s_1 = s_2 = -r$ ,  $r > 0$ . Тогда

$$k_p = \frac{2r}{\lambda_{\max}}, \quad k_i = \frac{r^2}{\lambda_{\max}}.$$

При реализации системы управления следует учитывать ограничение, накладываемое на управление,  $0 \leq u \leq 1$ . Также необходима оценка среднего числа заявок в системе. Эту оценку можно получить, применяя известные алгоритмы построения последовательной оценки средних значений. Например, можно применить экспоненциальный фильтр первого порядка

$$\dot{\hat{y}}(t) = -\alpha(\hat{y}(t) - x(t)),$$

где  $\hat{y}(t)$  – оценка среднего числа заявок в системе в момент времени  $t$ ,  $x(t)$  – наблюдаемое число заявок в системе в момент времени  $t$ ,  $\alpha > 0$  – параметр фильтра.

### 3. Пример

Рассмотрим систему обслуживания с параметрами:  $\mu = 200$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1000$ ,  $n = 100$ . Пусть желаемое среднее число заявок в системе  $\bar{y} = 40$ . Зададим полюсы замкнутой системы равными  $s_1 = s_2 = -10$ . Тогда  $k_p = 0,02$ ,  $k_i = 0,1$ .

Сначала решим уравнения Колмогорова, дополненные уравнениями обратной связи. На рис. 1, 2 показаны график среднего числа заявок в системе и график управления при трех значениях интенсивности поступления заявок. Расчеты проводились при начальных условиях  $p_0(0) = 1$ ,  $p_i(0) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

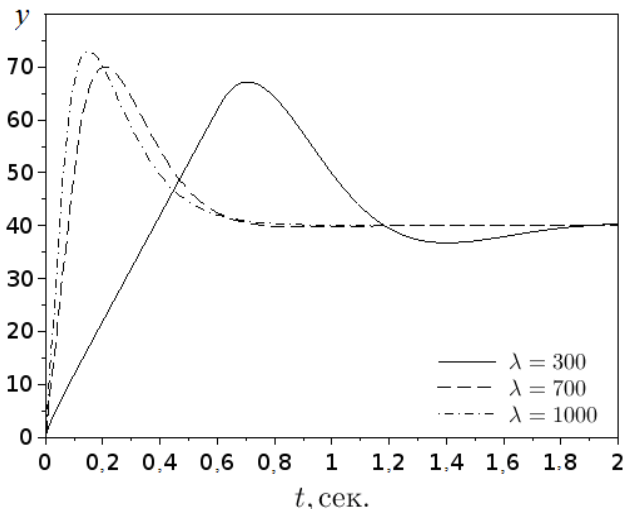


Рис. 1. Среднее число заявок в системе  
Fig. 1. Average number of requests in the system

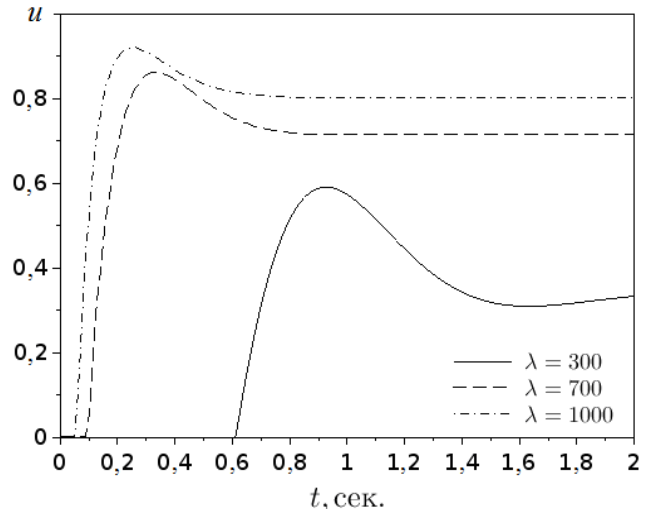


Рис. 2. Вероятность отклонения заявок  
Fig. 2. Probability of rejection of requests

Затем выполним имитационное моделирование. Результаты моделирования, полученные при  $k_p = 0,02$ ,  $k_i = 0,1$ ,  $\lambda = 1\,000$ , показаны на рис. 3, 4.

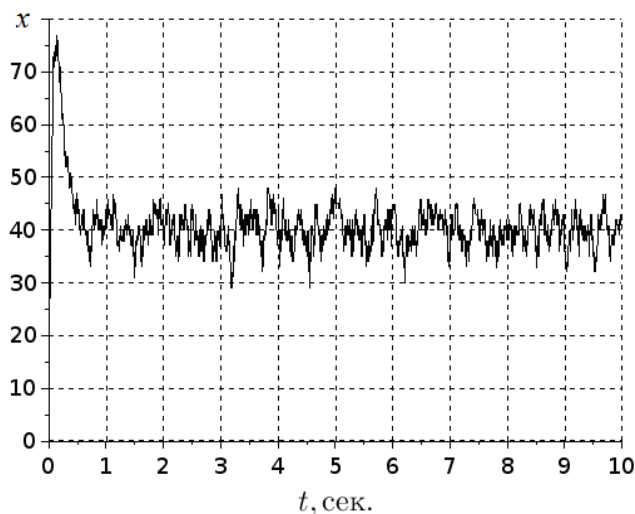


Рис. 3. Число заявок в системе  
Fig. 3. Number of requests in the system

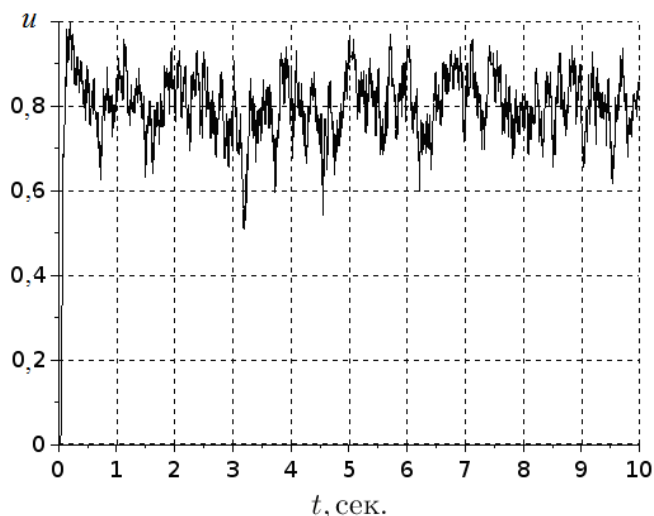


Рис. 4. Управление (вероятность отклонения поступающей заявки)  
Fig. 4. Control (probability of rejection of arriving requests request)

Все расчеты и моделирование выполнялись в системе компьютерной математики Scilab. Результаты моделирования подтверждают свойство робастности системы с управлением.

### Заключение

В статье решена задача синтеза системы управления в виде обратной связи для одноканальной марковской системы массового обслуживания с пуассоновским законом поступления заявок, экспоненциальным законом обработки заявок и ограниченным числом заявок в системе. Предполагается, что интенсивность поступления заявок и интенсивность обработки заявок неизвестны и могут меняться в процессе функционирования системы. В работе дано обоснование асимптотической устойчивости и робастности системы с обратной связью. Описан алгоритм синтеза обратной связи. Приведены результаты моделирования системы с управлением.

Результаты численных экспериментов и имитационного моделирования подтверждают возможность применения предложенной системы управления в системах массового обслуживания с высокой интенсивностью поступления заявок.

Предложенная система управления может быть использована в системах передачи и обработки данных. Например, в компьютерных сетях с активным управлением очередью пакетов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Kitaev M.Yu., Rykov V.V. Controlled queueing systems. New York : CRC Press, 1995. 304 p.
2. Назаров А.А. Управляемые системы массового обслуживания и их оптимизация. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1984. 234 с.
3. Миллер Б.М., Миллер Г.Б., Семенихин К.В. Методы синтеза оптимального управления марковским процессом с конечным множеством состояний при наличии ограничений // Автоматика и телемеханика. 2011. № 2. С. 111–130.
4. Миллер А.Б. Предотвращение перегрузок в сетях передачи данных с помощью методов стохастического управления // Автоматика и телемеханика. 2010. № 9. С. 70–82.
5. Fezazi N.E., Haoussi F.E., Tissir E.H., Alvarez T. Design of robust  $H_\infty$  controllers for congestion control in data networks // J. of the Franklin Institute. 2017. V. 354, No. 17. P. 7828–7845.
6. Hamidian H., Beheshti M. A robust fractional-order PID controller design based on active queue management for TCP network // Int. J. of Systems Science. 2018. V. 49, No. 1. P. 211–216.

7. Bisoy S.K., Pattnaik P.K. Design of feedback controller for TCP/AQM networks // Int. J. Engineering Science and Technology. 2017. V. 20. P. 116–132
8. Alvarez T., Heras H., Reguera J. Controller Design for Congestion Control: Some Comparative Studies // Proc. of the World Congress on Engineering. London, 2014. V. II. P. 756–772.
9. Haghghi A.M., Mishev D.P. Difference and Differential Equations with Applications in Queuing Theory. Wiley, 2013. 424 p.
10. Elliott D. L. Bilinear Control Systems: Matrices in Action. Springer, 2009. 280 p.
11. Хлебников М.В. Квадратичная стабилизация билинейной системы управления: линейный динамический регулятор по выходу // Автоматика и телемеханика. 2017. № 9. С. 3–18.

Поступила в редакцию 21 мая 2019 г.

Perepelkin E.A. (2019) ROBUST CONTROLLER OF QUEUING SYSTEM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 49. pp. 21–28

DOI: 10.17223/19988605/49/3

We consider the queuing system as a control object operating under the congestion conditions. Control problem consists in providing a desired system state. The system state is defined as the number of requests in the system. The number of requests in the system is controlled by rejection of arriving requests with some probability. The control system should have a type of feedback and should have property of robustness in relation to change of parameters of a control object and the entering flow of requests.

The control object as a finite Markov chain is described by the system of the Kolmogorov equations

$$\dot{p} = Ap + (Bp)u, \quad y = cp,$$

where  $A, B, c$  are matrices of the system,  $y$  is the average number of requirements in the system,  $u$  is a control signal. This is a bilinear system with restrictions on the state and control variables. Analysis of this system has shown that it is possible to proceed to a simpler description of the control object in the form of a first-order differential equation with uncertain parameters

$$\dot{y} = -au + b.$$

We suggest applying the classic proportional-integral controller to solve the control problem of the state of this system

$$u = k_p \tilde{y} + k_i z, \quad \dot{z} = \tilde{y},$$

where  $\tilde{y} = y - \bar{y}$  is deviation of the average number of requests in the system from the specified value  $\bar{y}$ ,  $k_p, k_i$  are controller coefficients.

We have described the algorithm of the controller synthesis by the specified poles of the closed system and investigated the conditions of stability and robustness of the system with the controller.

The results of numerical experiments and simulation confirm the possibility of using the proposed controller in queuing systems with a high intensity of requirements.

The proposed control system can be used in data transmission and processing systems operating under congestion conditions, for example, in computer networks with active packet queue management.

Keywords: queuing system; congestion; proportional-integral controller.

PEREPELKIN Evgenii Alexandrovich (Doctor of Technical Science, Professor, Polzunov Altai State Technical University, Barnaul, Russian Federation).

E-mail: eap@list.ru

## REFERENCES

1. Kitaev, M.Yu. & Rykov, V.V. (1995) *Controlled Queueing Systems*. CRC Press.
2. Nazarov, A.A. (1984) *Upravlyaemye sistemy massovogo obsluzhivaniya i ikh optimizatsiya* [Controlled queueing systems and optimization]. Tomsk: Tomsk State University.
3. Miller, B.M., Miller, G.B. & Semenikhin, K.V. (2011) Methods to design optimal control of Markov process with finite state set in the presence of constraints. *Automation and Remote Control*. 72(2). pp. 323–341. DOI: 10.1134/S000511791102010X
4. Miller, A.B. (2010) Using methods of stochastic control to prevent overloads in data transmission networks. *Automation and Remote Control*. 71(9). pp. 1804–1815. DOI: 10.1134/S0005117910090055
5. Fezazi, N.E., Haoussi, F.E., Tissir, E.H. & Alvarez, T. (2017) Design of robust  $H_\infty$  controllers for congestion control in data networks. *Journal of the Franklin Institute*. 354(17). pp. 7828–7845. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2017.09.026
6. Hamidian, H. & Beheshti, M. (2018) A robust fractional-order PID controller design based on active queue management for TCP network. *International Journal of Systems Science*. 49(1). pp. 211–216. DOI: 10.1080/00207721.2017.1397801
7. Bisoy, S.K. & Pattnaik, P.K. (2017) Design of feedback controller for TCP/AQM networks. *Engineering Science and Technology, an International Journal*. 20. pp. 116–132 DOI: 10.1016/j.jestch.2016.10.002

8. Alvarez, T., Heras, H. & Reguera, J. (2014) Controller design for congestion control: Some comparative studies. *Proc. of the World Congress on Engineering*. Vol. II. London U.K. pp. 756–772.
9. Haghghi, A.M. & Mishev, D.P. (eds) (2013) *Difference and differential equations with applications in queueing theory*. Wiley. DOI:10.1002/9781118400678
10. Elliott, D.L. (2009) *Bilinear control systems: Matrices in Action*. Springer. DOI: 10.1023/b101451
11. Khlebnikov, M.V. (2017) Quadratic stabilization of bilinear systems: Linear dynamical output feedback. *Automation and Remote Control*. 78(9). pp. 1545–1558. DOI: 10.1134/S0005117917090016

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

УДК 519.872

DOI: 10.17223/19988605/49/4

**А.А. Назаров, Я.Е. Измайлова****АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ,  
ВЫТЕСНЕНИЕМ ЗАЯВОК И ФАЗОВЫМ ДООБСЛУЖИВАНИЕМ**

Проводится исследование системы с повторными вызовами, в которой входящий поток является простейшим, с вытеснением заявок и фазовым дообслуживанием методом асимптотического анализа. Использовалось предельное условие растущей задержки заявок на орбите. Применяя предлагаемый метод для данной системы с повторными вызовами (RQ-системы), показано, что характеристическая функция числа заявок на орбите является гауссовской. Найдены пропускная способность системы и параметры распределения вероятностей числа заявок на орбите.

**Ключевые слова:** вытеснение заявок; зоны орбиты; фазовое дообслуживание заявок; RQ-система; большая задержка.

В связи с тем, что в современном мире наблюдается ежегодное увеличение объема и размерности информационных данных, проблема проектирования и анализа телекоммуникационных систем является одним из приоритетных направлений развития любой страны. Система с повторными вызовами (RQ-система) – это модель массового обслуживания, которая характеризуется тем, что заявка, пришедшая в систему, если обнаружит прибор занятым, повторит попытку обращения для обслуживания через некоторое случайное время, в течение которого находится на орбите в зоне ожидания. В литературе показано, что такие модели являются адекватными математическими моделями телекоммуникационных сетей связи. Между повторами заявки (клиенты, требования) находятся на орбите. Первые системы с повторными вызовами были рассмотрены R.I. Wilkinson [1]. Наиболее полное и глубокое исследование разнообразных процессов в RQ-системах было приведено в работах Г.И. Фалина [2].

Одной из важных характеристик системы массового обслуживания является процесс обслуживания. В данной работе предлагается обслуживание в два этапа. На первом этапе прибор обрабатывает входящие заявки (первичная обработка), и после обслуживания на первой фазе заявки отправляются на вторую (фактическое обслуживание). Задачи, возникающие в системах управления и требующие двухфазного обслуживания, были предложены В.Т. Doshi [3]. К.С. Madan [4] были рассмотрены системы массового обслуживания M/G/1, где заявка после обслуживания на первой фазе может покинуть систему или перейти на вторую фазу обслуживания. В работе В. Krishna Kumar [5] рассматривается система, в которой заявки, прибывшие в систему, вытесняют заявки, находящиеся только на первой фазе, и при этом обслуживающиеся в тот момент требования фактически покидают систему без обслуживания.

Как правило, рассматриваются системы, в которых все требования однотипные, хотя в реальных системах некоторые должны претендовать на первоочередное обслуживание, т.е. на приоритет. Системам с приоритетами посвящено большое количество исследований, например работы К. Avrachenkov [6], G. Аyyappa, А. Muthu Ganapathi [7], П.П. Бочарова, О.И. Павловой [8], I.M. Atencia [9], С. Kim [10], А.Н. Dudin [11]. Литература по RQ-системам очень обширна. Некоторые обзоры моделей можно найти у J.R. Artalejo [12–13]. В данной работе будет рассмотрена RQ-система с повторными вызовами, фазовым дообслуживанием и вытеснением заявок.

### 1. Математическая модель и постановка задачи

Рассмотрим RQ- систему M/GI/1 с вытеснением заявок и обслуживанием заново (рис. 1).

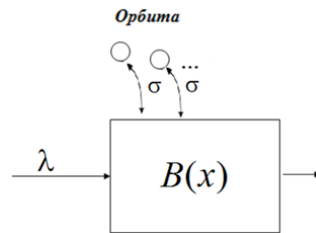


Рис. 1. RQ-система M/GI/1 с вытеснением заявок  
Fig. 1. Retrial queueing system M/GI/1 with exclusion customers

Описание модели приведено в работе [14]. Показано, что пропускная способность RQ-системы с вытеснением заявок и обслуживанием их заново имеет вид  $S = B'(0)$ , где  $B(x)$  – функция распределения времени обслуживания. Откуда для времени обслуживания, распределенного по закону Эрланга, получаем  $S = 0$ . То есть стационарного режима в такой системе не существует.

Поэтому рассмотрим RQ-систему с вытеснением заявок и фазовым дообслуживанием (рис. 2).

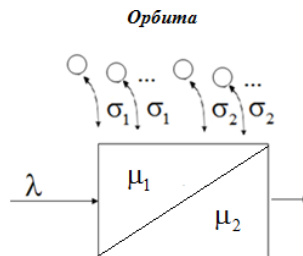


Рис. 2. RQ-система M/E2/1 с вытеснением заявок и дообслуживанием  
Fig. 2. Retrial queueing system M/E2/1 with exclusion customers and phase follow-up

На вход системы с повторными вызовами поступает простейший поток заявок, имеющий интенсивность  $\lambda$ . Если пришедшая заявка застаёт прибор свободным, то она занимает его для обслуживания на первой фазе. Время обслуживания на первой фазе имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\mu_1$ . После успешного окончания обслуживания на первой фазе заявка переходит на вторую фазу обслуживания. Время обслуживания на второй фазе имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\mu_2$ . Если в момент прихода заявки прибор оказывается занятым, то заявка, которая пришла, вытесняет обслуживаемую заявку и встает на прибор. Заявка, вытесненная мгновенно, переходит на орбиту в зону ожидания. Орбита условно разделяется на две зоны. Если заявка обслуживалась на первой фазе, то она уходит в первую зону орбиты, если на второй фазе, то во вторую. В зонах орбиты заявки осуществляют случайную задержку. Продолжительность таких задержек имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\sigma$ . С орбиты после случайной задержки заявка вновь обращается к прибору с повторной попыткой обслуживания. С первой зоны орбиты обращается для обслуживания на первую фазу, со второй зоны – на вторую, таким образом, происходит фазовое дообслуживание заявок, обслуживание которых было прервано.

Так как орбита разделяется на две зоны, то будем полагать:

$\sigma_1 = \gamma_1 \sigma$  – интенсивность обращения заявок с первой зоны орбиты;

$\sigma_2 = \gamma_2 \sigma$  – интенсивность обращения заявок со второй зоны.

Обозначим  $i_1(t)$  – число заявок в первой зоне орбиты;  $i_2(t)$  – число заявок на орбите во второй зоне,  $k(t)$  отвечает за состояние прибора:  $k(t) = 0$ , если прибор свободен;  $k(t) = 1$ , если прибор обслуживает заявку на первой фазе;  $k(t) = 2$ , если прибор обслуживает заявку на второй фазе.

Перед нами стоит задача нахождения двумерного распределения вероятностей числа заявок на орбите и состояний прибора.

## 2. Уравнения Колмогорова

Рассмотрим трехмерный процесс  $\{k(t), i_1(t), i_2(t)\}$ .

Обозначим стационарные вероятности  $P\{k(t)=k, i_1(t)=i_1, i_2(t)=i_2\} = P_k(i_1, i_2)$ ,  $k=0,1,2$ .

Введем функции следующего вида:

$$H_k(u_1, u_2) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} e^{ju_1 i_1} e^{ju_2 i_2} P_k(i_1, i_2), \quad k=0,1,2,$$

где  $j = \sqrt{-1}$  – мнимая единица, которые являются частичными характеристическими функциями.

Можно показать, что система уравнений для частичных характеристических функций имеет вид:

$$\begin{aligned} -\lambda H_0(u_1, u_2) + j\sigma_1 \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_1} + j\sigma_2 \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_2} + \mu_2 H_2(u_1, u_2) &= 0, \\ -\mu_1 H_1(u_1, u_2) + \lambda H_0(u_1, u_2) + \lambda e^{ju_2} H_2(u_1, u_2) + \lambda e^{ju_1} H_1(u_1, u_2) - \lambda H_1(u_1, u_2) + j\sigma_2 \frac{\partial H_1(u_1, u_2)}{\partial u_2} - \\ - j\sigma_1 e^{-ju_1} \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_1} - j\sigma_1 e^{ju_2 - ju_1} \frac{\partial H_2(u_1, u_2)}{\partial u_1} &= 0, \\ -\lambda H_2(u_1, u_2) - \mu_2 H_2(u_1, u_2) + \mu_1 H_1(u_1, u_2) + j\sigma_1 \frac{\partial H_2(u_1, u_2)}{\partial u_1} - \\ - j\sigma_2 e^{-ju_2} \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_2} - j\sigma_2 e^{ju_1 - ju_2} \frac{\partial H_1(u_1, u_2)}{\partial u_2} &= 0. \end{aligned}$$

Данная система трудно решается аналитически, поэтому для исследования используем метод асимптотического анализа [15] в предельном условии большой задержки ( $\sigma \rightarrow 0$ ).

## 3. Асимптотический анализ

Введем обозначения:

$\kappa_1$  – предельное среднее значение числа заявок на орбиты в первой зоне;

$\kappa_2$  – предельное среднее значение числа заявок на орбите во второй зоне;

$R_k$ ,  $k=0,1,2$  – распределение вероятностей состояний прибора.

**Теорема 1.** Пусть  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  – число заявок в зонах орбиты RQ-системы с вытеснением заявок и дообслуживанием. Тогда в предельном условии  $\sigma \rightarrow 0$  для вероятностей состояний прибора  $R_k = P\{k(t)=k\}$  выполняются равенства

$$R_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu_1} - \frac{\lambda}{\mu_2}, \quad R_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}, \quad R_2 = \frac{\lambda}{\mu_2}, \quad (1)$$

а для характеристических функций выполняется предельное равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M \exp\{ju_1 \sigma i_1(t) + ju_2 \sigma i_2(t)\} = \exp\{ju_1 \kappa_1 + ju_2 \kappa_2\},$$

где параметры  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  имеют вид:

$$\kappa_1 = \frac{\lambda^2 \mu_2}{\gamma_1 (\mu_1 \mu_2 - \lambda (\mu_1 + \mu_2))}, \quad \kappa_2 = \frac{\lambda^2 \mu_1}{\gamma_2 (\mu_1 \mu_2 - \lambda (\mu_1 + \mu_2))}. \quad (2)$$

Из полученных в теореме 1 равенств (2) допредельные средние значения числа заявок в зонах на орбите можно аппроксимировать величинами  $\frac{\kappa_k}{\sigma}$ ,  $k=1,2$ .

В работе [14] дано определение пропускной способности.

**Следствие.** Из первого равенства в (1) теоремы 1 получаем значение пропускной способности RQ-системы с вытеснением заявок и фазовым дообслуживанием в виде:

$$S = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} > 0.$$

Поэтому стационарный режим в такой системе существует для любых  $\lambda < S$ .

**Теорема 2.** Пусть  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  – число заявок в зонах орбиты RQ-системы с вытеснением заявок и фазовым дообслуживанием. Тогда имеет место предельное равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M \exp \left\{ j u_1 \frac{\sigma \gamma_1 i_1(t) - \kappa_1}{\sqrt{\sigma}} + j u_2 \frac{\sigma \gamma_2 i_2(t) - \kappa_2}{\sqrt{\sigma}} \right\} = \exp \left\{ \frac{(j u_1)^2}{2} Q_{11} + \frac{(j u_2)^2}{2} Q_{22} + j u_1 j u_2 Q_{12} \right\},$$

где  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  определены выше, величины  $Q_{11}$ ,  $Q_{12}$ ,  $Q_{22}$  – решение неоднородной системы уравнений

$$\begin{aligned} Q_{11}(\gamma_1 R_0 + \gamma_1 R_2 - \gamma_1 R_0 z_0 + \gamma_1 R_0 z_1 + \gamma_1 R_2 z_1 - \gamma_1 R_2 z_2) + Q_{12}(-\gamma_2 R_1 - \gamma_2 R_0 z_0 + \gamma_2 R_0 z_2 - \gamma_2 R_1 z_1 + \gamma_2 R_1 z_2) = \\ = \frac{1}{2} \lambda R_1 + \frac{1}{2} \gamma_1 \kappa_1 R_0 + \frac{1}{2} R_2 \gamma_1 \kappa_1 + \frac{1}{2} R_1 \gamma_2 \kappa_2 + \gamma_1 \kappa_1 R_0 z_1 - \lambda R_1 z_1 + \gamma_1 \kappa_1 R_2 z_1 - \gamma_2 \kappa_2 R_1 z_2, \\ Q_{22}(\gamma_2 R_0 + \gamma_2 R_1 - \gamma_2 R_0 y_0 + \gamma_2 R_0 y_2 + \gamma_2 R_1 y_2 - \gamma_2 R_1 y_1) + Q_{12}(-\gamma_1 R_2 - \gamma_1 R_0 y_0 + \gamma_1 R_0 y_1 - \gamma_1 R_2 y_2 + \gamma_1 R_2 y_1) = \\ = \frac{1}{2} \lambda R_2 + \frac{1}{2} \gamma_2 \kappa_2 R_0 + \frac{1}{2} R_2 \gamma_1 \kappa_1 + \frac{1}{2} R_1 \gamma_2 \kappa_2 - \lambda R_2 y_1 + \gamma_2 \kappa_2 R_0 y_2 + \gamma_2 \kappa_2 R_1 y_2 - \gamma_1 \kappa_1 R_2 y_1, \\ Q_{11}(-\gamma_1 R_2 - \gamma_1 R_0 p_0 + \gamma_1 R_0 p_1 + \gamma_1 R_2 p_1 - \gamma_1 R_2 p_2) + Q_{12}(\gamma_1 R_0 + \gamma_1 R_2 + \gamma_2 R_0 + \gamma_2 R_1 - \gamma_2 R_0 p_0 + \\ + \gamma_2 R_0 p_2 - \gamma_2 R_1 p_1 + \gamma_2 R_1 p_2 - \gamma_1 R_0 s_0 + \gamma_1 R_0 s_1 - \gamma_1 R_2 s_2 + \gamma_1 R_2 s_1) + \\ + Q_{22}(-\gamma_2 R_1 - \gamma_2 R_0 s_0 + \gamma_2 R_0 s_2 + \gamma_2 R_1 s_2 - \gamma_2 R_1 s_1) = -R_2 \gamma_1 \kappa_1 - R_1 \gamma_2 \kappa_2 + \\ + \gamma_1 \kappa_1 R_0 p_1 - \lambda R_1 p_1 + \gamma_1 \kappa_1 R_2 p_1 - \gamma_2 \kappa_2 R_1 p_2 - \lambda R_2 s_1 + \gamma_2 \kappa_2 R_0 s_2 + \gamma_2 \kappa_2 R_1 s_2 - \gamma_1 \kappa_1 R_2 s_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Величины  $z_0, z_1, z_2$ ;  $y_0, y_1, y_2$ ;  $p_0, p_1, p_2$ ;  $s_0, s_1, s_2$  являются решением систем уравнений (4)–(7) соответственно.

Для  $z_0, z_1, z_2$ :

$$\begin{aligned} -(\lambda + \gamma_1 \kappa_1 + \gamma_2 \kappa_2) z_0 + (\lambda + \gamma_1 \kappa_1) z_1 + \gamma_2 \kappa_2 z_2 = -\gamma_1 \kappa_1, \quad -(\mu_1 + \gamma_2 \kappa_2) z_1 + (\mu_1 + \gamma_2 \kappa_2) z_2 = \lambda + \gamma_2 \kappa_2, \\ \mu_2 z_0 + (\lambda + \gamma_1 \kappa_1) z_1 - (\lambda + \mu_2 + \gamma_1 \kappa_1) z_2 = -\gamma_1 \kappa_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Для  $y_0, y_1, y_2$ :

$$\begin{aligned} -(\lambda + \gamma_1 \kappa_1 + \gamma_2 \kappa_2) y_0 + (\lambda + \gamma_1 \kappa_1) y_1 + \gamma_2 \kappa_2 y_2 = -\gamma_2 \kappa_2, \quad -(\mu_1 + \gamma_2 \kappa_2) y_1 + (\mu_1 + \gamma_2 \kappa_2) y_2 = -\gamma_2 \kappa_2, \\ \mu_2 y_0 + (\lambda + \gamma_1 \kappa_1) y_1 - (\lambda + \mu_2 + \gamma_1 \kappa_1) y_2 = \lambda + \gamma_1 \kappa_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Для  $p_0, p_1, p_2$ :

$$\begin{aligned} -(\lambda + \gamma_1 \kappa_1 + \gamma_2 \kappa_2) p_0 + (\lambda + \gamma_1 \kappa_1) p_1 + \gamma_2 \kappa_2 p_2 = -\gamma_2 \kappa_2, \quad -(\mu_1 + \gamma_2 \kappa_2) p_1 + (\mu_1 + \gamma_2 \kappa_2) p_2 = -\gamma_2 \kappa_2, \\ \mu_2 p_0 + (\lambda + \gamma_1 \kappa_1) p_1 - (\lambda + \mu_2 + \gamma_1 \kappa_1) p_2 = \lambda + \gamma_1 \kappa_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Для  $s_0, s_1, s_2$ :

$$\begin{aligned} -(\lambda + \gamma_1 \kappa_1 + \gamma_2 \kappa_2) s_0 + (\lambda + \gamma_1 \kappa_1) s_1 + \gamma_2 \kappa_2 s_2 = -\gamma_1 \kappa_1, \quad -(\mu_1 + \gamma_2 \kappa_2) s_1 + (\mu_1 + \gamma_2 \kappa_2) s_2 = \lambda + \gamma_2 \kappa_2, \\ \mu_2 s_0 + (\lambda + \gamma_1 \kappa_1) s_1 - (\lambda + \mu_2 + \gamma_1 \kappa_1) s_2 = -\gamma_1 \kappa_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Запишем характеристическую функцию распределения вероятностей числа заявок на орбите в следующем виде:

$$H(u_1, u_2) = \exp \left\{ j \frac{u_1}{\sigma} \kappa_1 + j \frac{u_2}{\sigma} \kappa_2 + \frac{(j u_1)^2}{2\sigma} Q_{11} + \frac{(j u_2)^2}{2\sigma} Q_{22} + \frac{j u_1 j u_2}{\sigma} Q_{12} \right\}.$$

Из вышеизложенного получаем, что двумерное распределение вероятностей числа заявок на орбите является в пределе гауссовским распределением.



## Заключение

В работе была исследована система с повторными вызовами, фазовым дообслуживанием и вытеснением заявок методом асимптотического анализа. Показано, что предельная характеристическая функция числа заявок на орбите имеет вид характеристической функции гауссовского распределения. Получено значение пропускной способности данной системы и сделан вывод о том, что при значениях параметра интенсивности входящего потока  $\lambda < S$  для RQ-системы с вытеснением заявок и фазовым дообслуживанием стационарный режим существует, в то время как для RQ-системы с вытеснением заявок и обслуживанием заново стационарного режима не существует. Считаем целесообразным исследовать RQ-систему с вытеснением заявок и фазовым дообслуживанием общего типа, т.е. когда присутствует  $N$  фаз.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Wilkinson R.I. Theories for toll traffic engineering in the USA // The Bell System Technical Journal. 1956. V. 35, No. 2. P. 421–507.
2. Falin G.L., Templeton J.G.C. Retrial queues. London : Chapman & Hall, 1997. 328 p.
3. Doshi B.T. Analysis of a two phase queueing system with general service times // Operations Research Letters. 1991. V. 10, No. 5. P. 265–272.
4. Madan K.C. An M/G/1 queue with second optional service // Queueing Systems. Theory and Applications. 2000. V. 3, No. 4. P. 37–46.
5. Krishna K.B., Vijaykumar A., Arivudainambi D. An M/G/1 Retrial queueing system with two phase service and preemptive resume // Annals of Operations Research. 2002. V. 113, No. 1-4. P. 61–79. DOI:10.1023/A:1020901710087.
6. Avrachenkov K., Dudin A., Klimenok V. Queueing model MMAP/M 2/1 with two orbits // Lecture Notes in Comput. Sci. 2010. V. 6235. P. 107–118.
7. Ayyappan G., Muthu G.A., Gopal S. M/M/1 Retrial queueing system with loss and feedback under pre-emptive priority service // Int. J. of Computer Applications. 2010. V. 2, No. 6. P. 27–34.
8. Bocharov P.P., Pavlova O.I., Puzikova D.A. M|G|1|r retrial queueing systems with priority of primary customers // Mathematical and computer Modelling. 1999. V. 30, No. 3–4. P. 89–98.
9. Atencia I.M. A Geo/G/1 retrial queueing system with priority services // European J. of Operational Research. 2017. Vol. 256, No. 1. P. 178–186.
10. Kim C. Priority tandem queueing system with retrials and reservation of channels as a model of call center // Computers & Industrial Engineering. 2016. V. 96. P. 61–71.
11. Dudin A.N., Kim C., Dudin S., Dudina O. Priority retrial queueing model operating in random environment with varying number and reservation of servers // Applied Mathematics and Computation. 2015. V. 269. P. 674–690.
12. Artalejo J.R. Accessible bibliography on retrial queues // Mathematical and Computer Modelling. 1999. V. 30. P. 1–6.
13. Artalejo J.R. Accessible bibliography on retrial queues: Progress in 2000–2009 // Mathematical and Computer Modelling. 2010. V. 51, No. 9-10. P. 1071–1081.
14. Назаров А.А., Черникова Я.Е. Исследование RQ-системы M/GI/1 с вытеснением в условии большой задержки // Известия Томского политехнического университета. 2013. Т. 323, № 5. С. 16–20.
15. Назаров А.А., Моисеева С.П. Методы асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.

Поступила в редакцию 17 мая 2019 г.

Nazarov A.A., Izmailova Y.E. (2019) ASYMPTOTIC ANALYSIS RETRIAL QUEUEING SYSTEM WITH EXCLUSION CUSTOMERS AND PHASE FOLLOW-UP. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnik i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 49. pp. 29–34

DOI: 10.17223/19988605/49/4

In this paper, we consider a retrial queueing system, which has a two-phase serviced and displacement of customers. Frequently such tasks arise in control systems. The input of the system is a simplest request flow with intensity  $\lambda$ . If the received customer finds the server free, it takes it for service in the first phase. The service time in the first phase has an exponential distribution with a parameter  $\mu_1$ . After successful completion of service in the first phase, the request goes to the second phase of service. Service time in the second phase has an exponential distribution with a parameter  $\mu_2$ . If the server is busy, then the incoming request pushes the previous request out of service and takes its place, while the pushed out request goes to the orbit. The orbit is conventionally divided into two zones. If the customer was serviced in the first phase, it goes to the first zone of the orbit, but if it was serviced in the second

phase, then it comes in the second phase of the orbit. In the orbit zones, the requests are subject to a random delay. The duration of such delays has an exponential distribution with a parameter  $\sigma$ . After a random delay the customer re-accesses the server from an orbit to the re-attempt service. From the first zone of the orbit, the customer is appealed for service to the first phase, from the second zone, one is appealed to the second phase, thus wise, the phase maintenance of customers whose service has been interrupted occurs. The throughput of RQ-system with the displacement of customers and phase follow-up. By throughput we mean the maximum average number of requests that the system can serve per unit of time. In this RQ-system it has the form  $S = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} > 0$ , so the station-

ary mode in such a system exists for any  $\lambda < S$ . Further, the observation of the system is carried out using the method of asymptotic analysis. It was shown that the limit characteristic function of the number of customers in orbit has the form of a characteristic function of the Gaussian distribution. Numerical experiments were carried out. The asymptotic probability distribution of the number of customers in orbit was obtained for the selected parameter values.

Keywords: exclusion of customers; zones in the orbit; phase follow-up customers; retrial queueing system; the long delay.

*NAZAROV Anatoly Andreevich* (Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the department of probability Theory and mathematical statistics, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

*IZMAYLOVA Yana Evgenevna* (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: evgenevna.92@mail.ru

#### REFERENCES

1. Wilkinson, R.I. (1956) Theories for toll traffic engineering in the USA. *The Bell System Technical Journal*. 35(2). pp. 421–507. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1956.tb02388.x
2. Falin, G.L. & Templeton, J.G.C. (1997) *Retrial queues*. London: Chapman & Hall.
3. Doshi, B.T. (1991) Analysis of a two phase queueing system with general service times. *Operations Research Letters*. 10(5). pp. 265–272. DOI: 10.1016/0167-6377(91)90012-E
4. Madan, K.C. (2000) An M/G/1 queue with second optional service. *Queueing Systems. Theory and Applications*. 3(4). pp. 37–46. DOI: 10.1023/A:1019144716929
5. Krishna, K.B. & Vijaykumar, A. & Arivudainambi, D. (2002) An M/G/1 Retrial queueing system with two phase service and preemptive resume. *Annals of Operations Research*. 113(1–4). pp. 61–79. DOI: 10.1023/A:1020901710087
6. Avrachenkov, K. & Dudin, A. & Klimenok, V. (2010) Queueing model MMAP/M 2/1 with two orbits. *Lecture Notes in Computer Science*. 6235. pp. 107–118.
7. Ayyappan, G. & Muthu Ganapathi, A. & Sekar, G. (2010) M/M/1 Retrial queueing system with loss and feedback under preemptive priority service. *International Journal of Computer Applications*. 2(6). pp. 27–34. DOI: 10.5120/672-945
8. Bocharov, P.P., Pavlova, O.I. & Puzikova, D.A. (1999) M|G|1|r retrial queueing systems with priority of primary customers. *Mathematical and computer Modelling*. 30(3–4). pp. 89–98. DOI: 10.1016/S0895-7177(99)00134-X
9. Atencia, I.M. (2017) A Geo/G/1 retrial queueing system with priority services. *European Journal of Operational Research*. 256(1). pp. 178–186. DOI: 10.1016/j.ejor.2016.07.011
10. Kim, C. (2016) Priority tandem queueing system with retrials and reservation of channels as a model of call center. *Computers & Industrial Engineering*. 96. pp. 61–71. DOI: 10.1016/j.cie.2016.03.012
11. Dudin, A.N., Che Soong Kim, Dudin, S. & Dudina, O. (2015) Priority retrial queueing model operating in random environment with varying number and reservation of servers. *Applied Mathematics and Computation*. 269. pp. 674–690. DOI: 10.1016/j.amc.2015.08.005
12. Artalejo, J.R. (1999) Accessible bibliography on retrial queues. *Mathematical and Computer Modelling*. 30. pp. 1–6. DOI: 10.1016/S0895-7177(99)00128-4
13. Artalejo, J.R. (2010) Accessible bibliography on retrial queues: Progress in 2000–2009. *Mathematical and Computer Modelling*. 51(9–10). pp. 1071–1081. DOI: 10.1016/j.mcm.2009.12.011
14. Nazarov, A.A. & Chernikova, Y.E. (2013) Investigation of preemptive RQ-system M|G|1 under extensive delay. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*. vol. 323. no 5. pp. 16–20.
15. Nazarov, A.A. & Moiseeva, S.P. (2006) *Metody asimptoticheskogo analiza v teorii massovogo obsluzhivaniya* [The asymptotical analysis method in queueing theory]. Tomsk: NTL.

## ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.21

DOI: 10.17223/19988605/49/5

**А.М. Горцев, Л.А. Нежелская**

### ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА СОСТОЯНИЙ ОБОБЩЕННОГО АСИНХРОННОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ ПРИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕМСЯ МЕРТВОМ ВРЕМЕНИ

Рассматривается задача оптимальной оценки состояний обобщенного асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным (конечным) числом состояний, являющегося одной из математических моделей информационных потоков сообщений, функционирующих в телекоммуникационных сетях. Условия наблюдения за потоком таковы, что каждое наблюдаемое событие порождает период мертвого времени, в течение которого другие события потока недоступны наблюдению и не вызывают продления его периода (непродлевающееся мертвое время). Находится явный вид апостериорных вероятностей состояний потока. Решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности.

**Ключевые слова:** обобщенный асинхронный дважды стохастический поток событий; апостериорная вероятность; оптимальная оценка состояний; непродлевающееся мертвое время.

Системы и сети массового обслуживания (СМО и СеМО) широко применяются в качестве математических моделей различных технических, физических, экономических и других систем. Случайные потоки событий, являющиеся основными элементами СМО и СеМО, в свою очередь, применяются в качестве математических моделей различных реальных процессов, протекающих в таких системах. В частности, случайные потоки событий служат математическими моделями информационных потоков сообщений, функционирующих в телекоммуникационных сетях [1–3]. Современными математическими моделями информационных потоков в телекоммуникационных сетях являются дважды стохастические потоки событий. Одними из первых работ, положивших начало систематическому исследованию дважды стохастических потоков, были работы [4–9].

Большинством авторов исследования СМО и СеМО осуществляются в условиях, когда все события входящего потока доступны наблюдению. В реальности же зарегистрированное событие может создать период мертвого времени для регистрирующего прибора [10], в течение которого другие события потока становятся ненаблюдаемыми для регистрирующего прибора (теряются). В этой связи можно считать, что мертвое время выступает искажающим фактором при решении задачи оценивания, так как эффект мертвого времени влечет за собой потери событий потока, что отрицательно сказывается на оценивании как состояний, так и параметров потока. Все устройства регистрации делятся на две группы. Первую группу составляют устройства с непродлевающимся мертвым временем [11–13], вторую – устройства с продлевающимся мертвым временем [14]. Период ненаблюдаемости событий потока может продолжаться некоторое фиксированное время, а также может быть случайным. Здесь рассматривается случай непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности.

В работе [15] введен обобщенный асинхронный поток событий с двумя состояниями (обобщенный ММРР-поток), функционирующий при отсутствии мертвого времени. Обобщение результатов этой работы получено в статье [16], где решена задача оптимального оценивания состояний обобщенного асинхронного потока событий с произвольным числом состояний в отсутствие мертвого

времени. В настоящей статье, являющейся непосредственным развитием работы [16], решается задача об оптимальной оценке состояний обобщенного асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным (конечным) числом состояний при непродлеваемом мертвом времени. Предлагается алгоритм оптимальной оценки состояний, когда решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности [17]. Данный критерий обеспечивает минимум полной (безусловной) вероятности ошибки вынесения решения [18].

### 1. Постановка задачи

Рассматривается обобщенный асинхронный поток событий (далее – поток), сопровождающий процесс (интенсивность)  $\lambda(t)$  которого есть кусочно-постоянный случайный процесс с  $n$  состояниями:  $\lambda(t)$  принимает значения из дискретного множества значений  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ,  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n \geq 0$ . Будем говорить, что имеет место  $i$ -е состояние процесса  $\lambda(t)$ , если  $\lambda(t) = \lambda_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $n = 2, 3, \dots$ . Если имеет место  $i$ -е состояние процесса  $\lambda(t)$ , то в течение временного интервала, когда  $\lambda(t) = \lambda_i$ , имеет место пуассоновский поток событий с параметром (интенсивностью)  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Длительность пребывания процесса  $\lambda(t)$  (потока) в  $i$ -м состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Рассматривается стационарный режим функционирования потока, поэтому переходными процессами на полуинтервале наблюдения  $[t_0, t)$ , где  $t_0$  – начало наблюдения,  $t$  – окончание наблюдения, пренебрегаем. Тогда без потери общности можно положить  $t_0 = 0$ . В этих предположениях  $\lambda(t)$  – сопровождающий стационарный кусочно-постоянный скрытый (принципиально ненаблюдаемый) транзитивный марковский процесс с произвольным числом состояний  $n$  ( $n = 2, 3, \dots$ ).

Обобщенный асинхронный поток является обобщением асинхронного потока [11]. Обобщение состоит в следующем: в момент перехода процесса  $\lambda(t)$  из  $i$ -го состояния в  $i$ -е инициируется с вероятностью  $p_{ij}$  дополнительное событие (с вероятностью  $(1 - p_{ij})$  дополнительное событие не инициируется),  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $j \neq i$ ; переход происходит в произвольный момент времени, не связанный с моментом наступления события пуассоновского потока с параметром  $\lambda_i$ , при этом инициирование дополнительного события осуществляется в  $j$ -м состоянии (сначала осуществляется переход из  $i$ -го состояния в  $j$ -е (переход первичен), затем – инициирование дополнительного события в  $j$ -м состоянии),  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $j \neq i$ ; переход и инициирование дополнительного события происходят мгновенно.

Матрицы инфинитезимальных характеристик процесса  $\lambda(t)$  примут вид:

$$\mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} -(\lambda_1 + \alpha_1) & (1 - p_{12})\alpha_{12} & \dots & (1 - p_{1n})\alpha_{1n} \\ (1 - p_{21})\alpha_{21} & -(\lambda_2 + \alpha_2) & \dots & (1 - p_{2n})\alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (1 - p_{n1})\alpha_{n1} & (1 - p_{n2})\alpha_{n2} & \dots & -(\lambda_n + \alpha_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & p_{12}\alpha_{12} & \dots & p_{1n}\alpha_{1n} \\ p_{21}\alpha_{21} & \lambda_2 & \dots & p_{2n}\alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}\alpha_{n1} & p_{n2}\alpha_{n2} & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $\alpha_i = -\alpha_{ii}$ ,  $\alpha_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_{ij}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $\alpha_{ij} > 0$ ,  $0 \leq p_{ij} \leq 1$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $j \neq i$ .

Положив в (1)  $p_{ij} = 0$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $j \neq i$ , получаем матрицы инфинитезимальных характеристик процесса  $\lambda(t)$  для асинхронного потока событий с произвольным числом состояний.

После каждого зарегистрированного в момент времени  $t_k$  события (как события пуассоновского потока с параметром  $\lambda_i$ , так и дополнительного события) наступает время фиксированной длительности  $T$  (мертвое время), в течение которого другие события исходного обобщенного асинхронного потока недоступны наблюдению (теряются). События, наступившие в течение мертвого времени, не вызывают продления его периода (непродлеваемое мертвое время). По окончании мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности  $T$  и т.д.

Таким образом, наличие мертвого времени приводит к тому, что в исходном обобщенном асинхронном потоке происходит частичная потеря событий. В силу этого на полуинтервале  $[t_0, t)$  наблюдается «прореженный» исходный поток, будем называть его наблюдаемым потоком. Требуется на основании последовательности временных моментов (от момента  $t_0$  до момента  $t$ ) наступления событий наблюдаемого потока оценить состояние процесса  $\lambda(t)$  (потока) в момент времени  $t$ . Обозначим  $\hat{\lambda}(t)$  оценку состояния процесса  $\lambda(t)$  в момент времени  $t$ . Для вынесения решения о состоянии процесса  $\lambda(t)$  в момент времени  $t$  необходимо определить апостериорные вероятности  $w(\lambda_i | t) = w(\lambda_i | t_1, \dots, t_m, t) = P(\lambda(t) = \lambda_i | t_1, \dots, t_m, t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , того, что в момент времени  $t$  значение процесса  $\lambda(t) = \lambda_i$  ( $m$  – количество событий, наступивших в моменты времени  $t_1, \dots, t_m$  на интервале наблюдения  $(t_0, t)$ ), при этом  $\sum_{i=1}^n w(\lambda_i | t) = 1$ . Решение о состоянии процесса  $\lambda(t)$  (потока) выносится по критерию максимума апостериорной вероятности [17], согласно которому  $\hat{\lambda}(t) = \lambda_j$ , если  $w(\lambda_j | t) \geq w(\lambda_i | t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

## 2. Явный вид апостериорных вероятностей

Рассмотрим полуинтервал  $[t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , между двумя соседними событиями наблюдаемого потока. Так как моменты времени наступления событий в наблюдаемом потоке случайны, то длительность полуинтервала  $[t_k, t_{k+1})$  – случайная величина. Длительность начального полуинтервала  $[t_0, t_1)$  – также случайная величина. Таким образом, значение длительности полуинтервала  $[t_k, t_{k+1})$  есть  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . С другой стороны, так как наступившее в момент времени  $t_k$  событие наблюдаемого потока порождает период мертвого времени длительности  $T$ , то  $\tau_k = T + \eta_k$ , где  $\eta_k$  – значение длительности интервала между моментом окончания периода мертвого времени и моментом  $t_{k+1}$ . Таким образом, временной полуинтервал  $[t_k, t_{k+1})$  разбивается на два смежных полуинтервала: первый –  $[t_k, t_k + T)$ , второй –  $[t_k + T, t_{k+1})$ . Условия нахождения апостериорных вероятностей  $w(\lambda_i | t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , на полуинтервале  $[t_k, t_k + T)$  длительности  $T$  и на полуинтервале  $[t_k + T, t_{k+1})$ , значение длительности которого есть  $\eta_k$ , принципиально разные. Кроме того, для нахождения вероятностей  $w(\lambda_i | t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , необходимо точно знать длительность  $T$  мертвого времени. В противном случае отсутствие информации о длительности  $T$  мертвого времени делает попытку строгого нахождения вероятностей  $w(\lambda_i | t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , невозможной.

В [16] сформулирован алгоритм расчета апостериорных вероятностей  $w(\lambda_j | t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , для случая отсутствия мертвого времени ( $T = 0$ ). При этом поведение  $w(\lambda_j | t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , на полуинтервале  $[t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , между соседними событиями исходного обобщенного асинхронного потока, а также на полуинтервале  $[t_0, t_1)$  между началом наблюдения и наблюдением первого события определяется выражением

$$w(\lambda_j | t) = \frac{\sum_{s=1}^n c_s^{(k)} \gamma_{js} e^{\omega_s(t-t_k)}}{\sum_{l=1}^n \sum_{s=1}^n c_s^{(k)} \gamma_{ls} e^{\omega_s(t-t_k)}}, \quad j = \overline{1, n}, \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots; \quad (2)$$

$w(\lambda_j | t_0) = w(\lambda_j | t_0 + 0) = \pi_j$ ;  $w(\lambda_j | t_k) = w(\lambda_j | t_k + 0)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;  $\omega_s$  – корни (собственные числа) характеристического уравнения  $\det \mathbf{D} = 0$ ,  $\mathbf{D} = \|d_{sl}\|_1^n$ ,  $d_{sl} = a_{sl}$  ( $s, l = \overline{1, n}$ ,  $s \neq l$ ),  $d_{ss} = a_{ss} - \omega$  ( $s = \overline{1, n}$ ),  $a_{sl} = [(1 - p_{ls})\alpha_{ls} - \lambda_l \delta_{ls}]$ ,  $\delta_{ls}$  – символ Кронекера,  $s, l = \overline{1, n}$ ,  $\alpha_{ls}$  и  $p_{ls}$  определены в (1);  $\gamma_{js}$  – компо-

ненты собственного вектора  $\gamma^{(s)} = (\gamma_{1s}, \dots, \gamma_{ns})^T$ ,  $j, s = \overline{1, n}$  (либо  $\gamma_{ls}$ ;  $l, s = \overline{1, n}$ ), определяемые из уравнения  $(\mathbf{A} - \omega_s \mathbf{E})\gamma^{(s)} = 0$ ,  $s = \overline{1, n}$ , в котором  $\gamma_{ns} = 1$  ( $s = \overline{1, n}$ ),  $\mathbf{A} = \|a_{sl}\|_1^n$ ,  $\mathbf{E}$  – единичная матрица; коэффициенты  $c_s^{(k)}$  являются решением системы линейных алгебраических уравнений  $\sum_{s=1}^n c_s^{(k)} \gamma_{js} = w(\lambda_j | t_k + 0)$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ; вероятность  $w(\lambda_j | t_k + 0)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , определяется формулой пересчета

$$w(\lambda_j | t_k + 0) = \frac{\lambda_j w(\lambda_j | t_k - 0) + \sum_{i=1}^n p_{ij} \alpha_{ij} w(\lambda_i | t_k - 0)}{\sum_{i=1}^n w(\lambda_i | t_k - 0) [\lambda_i + \sum_{s=1}^n p_{is} \alpha_{is}]}, \quad (3)$$

$j = \overline{1, n}$ ;  $p_{jj} = 0$ ,  $p_{ii} = 0$ ;  $k = 1, 2, \dots$ , в которой  $w(\lambda_i | t_k - 0)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , вычисляется по формуле

$$w(\lambda_i | t_k - 0) = \frac{\sum_{s=1}^n c_s^{(k-1)} \gamma_{is} e^{\omega_s (t_k - t_{k-1})}}{\sum_{l=1}^n \sum_{s=1}^n c_s^{(k-1)} \gamma_{ls} e^{\omega_s (t_k - t_{k-1})}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (4)$$

априорные финальные вероятности  $\pi_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) того, что процесс  $\lambda(t)$  в произвольный момент времени  $t$  находится в  $j$ -м состоянии, являются решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^n \pi_i \alpha_{ij} = 0, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad \sum_{j=1}^n \pi_j = 1, \quad (5)$$

где  $\alpha_{ij}$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ) определены в (1). Подчеркнем, что в момент времени  $t_k$  (в момент наступления события наблюдаемого потока) апостериорная вероятность (2) претерпевает разрыв 1-го рода ( $k = 1, 2, \dots$ ).

Таким образом, вычисление апостериорных вероятностей  $w(\lambda_j | t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , по формуле (2) в условиях, когда длительность мертвого времени  $T \neq 0$ , справедливо на полуинтервале  $[t_k + T, t_{k+1})$ , значение длительности которого есть  $\eta_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и на полуинтервале  $[t_0, t_1)$ . При этом начальное условие для  $w(\lambda_j | t)$  привязывается к моменту времени  $t_k + T$ , т.е. в формуле (2), во-первых, нужно  $w(\lambda_j | t_k + 0)$  заменить на  $w(\lambda_j | t_k + T)$ , во-вторых,  $t_k + T \leq t < t_{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ; для  $k = 0$  формула (2) остается без изменения. Формула пересчета (3) и формула (4) остаются при этом без изменения.

Рассмотрим полуинтервал  $[t_k, t_k + T)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Так как на этом полуинтервале длительности  $T$  событие наблюдаемого потока имеет место в граничной точке  $t_k$ , а на самом полуинтервале события недоступны наблюдению (для наблюдателя события отсутствуют), то необходимо определить поведение апостериорных вероятностей  $w(\lambda_j | t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , на полуинтервале  $[t_k, t_k + T)$ ,  $k = 1, 2, \dots$

**Теорема 1.** На полуинтервале времени  $[t_k, t_k + T)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , т.е. в течение мертвого времени длительности  $T$ , апостериорные вероятности состояний обобщенного асинхронного потока с произвольным (конечным) числом состояний,  $w(\lambda_j | t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , удовлетворяют следующей системе линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dw(\lambda_j | t)}{dt} = \alpha_{nj} + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_{ij} - \alpha_{nj}) w(\lambda_i | t), \quad w(\lambda_n | t) = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} w(\lambda_j | t), \quad (6)$$

$t_k \leq t < t_k + T$ ,  $j = \overline{1, n-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$

**Доказательство.** Матрицы инфинитезимальных характеристик (1) процесса  $\lambda(t)$  для рассматриваемого полуинтервала мертвого времени  $[t_k, t_k + T)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , примут вид  $\mathbf{D}_0 = \|\alpha_{ij}\|_1^n$ ,  $\mathbf{D}_1 = \|\mathbf{0}\|_1^n$ ;  $\alpha_{ij} > 0$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $i \neq j$ ;  $\alpha_{ij} = -\sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_{ij}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ; так как наступление событий как пуассоновского потока, так и дополнительных событий не оказывает влияния на поведение процесса  $\lambda(t)$  (процесс  $\lambda(t)$  «живет своей жизнью» и в течение периода мертвого времени). Рассмотрим полуинтервал  $[t, t + \Delta t)$ , где  $\Delta t$  – достаточно малая величина, и  $t_k < t + \Delta t < t_k + T$ , т.е. полуинтервал  $[t, t + \Delta t)$  расположен внутри полуинтервала  $[t_k, t_k + T)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Найдем апостериорную вероятность  $w(\lambda_j | t + \Delta t)$  того, что в момент времени  $t + \Delta t$  процесс  $\lambda(t)$  находится в  $j$ -м состоянии,  $j = \overline{1, n}$ . Зафиксируем  $j$ -е состояние ( $j = \overline{1, n}$ ). Пусть в момент времени  $t$  процесс  $\lambda(t)$  находится в  $j$ -м состоянии и на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  процесс  $\lambda(t)$  не перешел в  $i$ -е состояние ( $i = \overline{1, n}$ ,  $i \neq j$ ), т.е. остался в  $j$ -м состоянии. Вероятность этого события есть  $w(\lambda_j | t)(1 + \alpha_{jj}\Delta t) + o(\Delta t)$ . Пусть в момент времени  $t$  процесс  $\lambda(t)$  находится в  $i$ -м состоянии ( $i = \overline{1, n}$ ) и на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  процесс  $\lambda(t)$  перешел в  $j$ -е состояние ( $i \neq j$ ). Вероятность этого события есть  $\sum_{i=1, i \neq j}^n \alpha_{ij}\Delta t w(\lambda_i | t) + o(\Delta t)$ . Другие возможности имеют вероятность  $o(\Delta t)$ . Тогда имеем

$$w(\lambda_j | t + \Delta t) = (1 + \alpha_{jj}\Delta t)w(\lambda_j | t) + \Delta t \sum_{i=1, i \neq j}^n \alpha_{ij}w(\lambda_i | t) + o(\Delta t), \quad j = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Производя в (7) необходимые преобразования, после чего переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , приходим к линейной однородной системе дифференциальных уравнений [20] для вероятностей  $w(\lambda_j | t)$ :

$$\frac{dw(\lambda_j | t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}w(\lambda_i | t) \quad (t_k \leq t < t_k + T, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = 1, 2, \dots), \quad (8)$$

с начальными условиями  $w(\lambda_j | t = t_k) = w(\lambda_j | t_k + 0)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Начальные условия для системы (8) формируются следующим образом. На полуинтервале  $[t_{k-1} + T, t_k)$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , смежном полуинтервалу  $[t_k, t_k + T)$ , вероятности  $w(\lambda_j | t)$  рассчитываются по формуле (2), где  $w(\lambda_j | t_k + 0)$  заменяются на  $w(\lambda_j | t_{k-1} + T)$ ,  $k = 2, 3, \dots$ ,  $j = \overline{1, n}$ ; затем в момент времени  $t = t_k$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , происходит пересчет вероятностей  $w(\lambda_j | t)$  по формуле (3), так что их значения в точке  $t = t_k$  есть  $w(\lambda_j | t_k + 0)$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , которые являются начальными условиями для системы (8). Для граничного интервала  $[t_0, t_1)$  расчет вероятности  $w(\lambda_j | t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , производится по формуле (2) с их последующим пересчетом по формуле (3) в момент времени  $t = t_1$ . Апостериорные вероятности  $w(\lambda_j | t)$  для любого  $t$  удовлетворяют условию нормировки. Тогда выражая, например,  $w(\lambda_n | t) = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} w(\lambda_j | t)$  и подставляя данное представление в (8) приходим к (6). Теорема 1 доказана.

**Замечание 1.** Поскольку  $\lambda(t)$  – транзитивный марковский процесс, то при  $t \rightarrow \infty$  апостериорные вероятности стремятся к пределам  $w(\lambda_j)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , не зависящим от начальных условий [19]. Тогда система (6) при  $t \rightarrow \infty$  приобретает вид:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_{nj} - \alpha_{ij})w(\lambda_i) = \alpha_{nj}, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad w(\lambda_n) = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} w(\lambda_j). \quad (9)$$

Полученная система линейных неоднородных алгебраических уравнений (9) идентична системе (5), так что  $w(\lambda_j) = \pi_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

Система (6) с начальными условиями (3) определяет поведение вероятностей  $w(\lambda_j | t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , на полуинтервале  $[t_k, t_k + T)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , ее решение устанавливает следующая теорема.

**Теорема 2.** Апостериорные вероятности состояний обобщенного асинхронного потока событий  $w(\lambda_j | t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , на полуинтервале времени  $[t_k, t_k + T)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , определяются формулой

$$w(\lambda_j | t) = \pi_j + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{A}_{ji} b_i^{(k)} e^{\alpha^{(i)} t}, \quad w(\lambda_n | t) = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} w(\lambda_j | t), \quad (10)$$

$$j = \overline{1, n-1}, \quad t_k \leq t < t_k + T, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где  $\pi_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) – решение системы (5);  $\tilde{A}_{ji}$  – элементы матрицы  $\tilde{A} = \|\tilde{A}_{ji}\|_1^{n-1}$ , составленной из собственных векторов матрицы  $\tilde{a} = \|\tilde{a}_{ji}\|_1^{n-1}$  ( $\tilde{a}_{ji} = \alpha_{ij} - \alpha_{nj}$ ) так, что  $i$ -й столбец матрицы  $\tilde{A}$  соответствует собственному числу  $\alpha^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ; коэффициенты  $b_i^{(k)}$  являются решением системы линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{A}_{ji} b_i^{(k)} e^{\alpha^{(i)} t_k} = w(\lambda_j | t_k + 0) - \pi_j \quad (j = \overline{1, n-1}, \quad k = 1, 2, \dots),$$

в которой  $w(\lambda_j | t_k + 0)$  определяются формулой (3).

**Замечание 2.** Из (9) вытекает, что  $\pi_j = w(\lambda_j) = \lim_{t \rightarrow \infty} w(\lambda_j | t)$  при  $t \rightarrow \infty$ , тогда из (10) следует, что все собственные числа  $\alpha^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ , отрицательны.

**Замечание 3.** Из (10) следует, что

$$w(\lambda_j | t_k + T) = \pi_j + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{A}_{ji} b_i^{(k)} e^{\alpha^{(i)} (t_k + T)}, \quad w(\lambda_n | t_k + T) = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} w(\lambda_j | t_k + T), \quad (11)$$

$$j = \overline{1, n-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Полученные формулы позволяют сформулировать алгоритм расчета апостериорных вероятностей  $w(\lambda_j | t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , и алгоритм принятия решения о состоянии процесса  $\lambda(t)$  в любой момент времени  $t$ .

### 3. Алгоритм принятия решения о состоянии процесса $\lambda(t)$

Алгоритм расчета апостериорных вероятностей  $w(\lambda_j | t)$  в любой момент времени  $t$ :

1) в момент времени  $t_0$  находятся  $w(\lambda_j | t_0 + 0) = w(\lambda_j | t_0 = 0) = \pi_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) как решение системы (5);

2) по формуле (2) для  $k = 0$  рассчитываются вероятности  $w(\lambda_j | t)$  ( $j = \overline{1, n}$ ) в любой момент времени  $t$  ( $0 \leq t < t_1$ ), где  $t_1$  – момент наблюдения первого события наблюдаемого потока;

3) по формуле (2) для  $k = 0$  рассчитываются вероятности  $w(\lambda_j | t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , в момент времени  $t_1$ :  $w(\lambda_j | t_1) = w(\lambda_j | t_1 - 0)$ ;

4)  $k$  увеличивается на единицу, и по формуле (3) для  $k = 1$  производится пересчет вероятностей  $w(\lambda_j | t)$  в момент времени  $t = t_1$ , при этом  $w(\lambda_j | t_1 + 0)$  ( $j = \overline{1, n}$ ) являются начальными значениями для расчета  $w(\lambda_j | t)$  по формуле (10);



5) по формуле (10) для  $k = 1$  рассчитываются вероятности  $w(\lambda_j | t)$  ( $j = \overline{1, n}$ ) в любой момент времени  $t$  ( $t_1 < t < t_1 + T$ );

6) по формуле (11) для  $k = 1$  рассчитываются вероятности  $w(\lambda_j | t)$  ( $j = \overline{1, n}$ ) в момент времени  $t = t_1 + T$ , т.е. вероятности  $w(\lambda_j | t_1 + T)$ ; при этом  $w(\lambda_j | t_1 + T)$  ( $j = \overline{1, n}$ ) являются начальными значениями для вычисления вероятностей  $w(\lambda_j | t)$  на следующем шаге алгоритма;

7) для  $k = 1$  по формуле (2), в которой  $w(\lambda_j | t_1 + 0)$  заменяются на  $w(\lambda_j | t_1 + T)$ , рассчитываются вероятности  $w(\lambda_j | t)$  ( $j = \overline{1, n}$ ) в любой момент времени  $t$  ( $t_1 + T < t < t_2$ ), где  $t_2$  – момент наблюдения второго события наблюдаемого потока;

8)  $k$  увеличивается на единицу, и для  $k = 2$  по формуле (4), в которой  $t_1$  заменяется на  $t_1 + T$ , вычисляются вероятности  $w(\lambda_i | t_2 - 0)$  ( $i = \overline{1, n}$ ), после чего по формуле (3) рассчитываются вероятности  $w(\lambda_j | t_2 + 0)$  ( $j = \overline{1, n}$ );

9) алгоритм переходит на шаг 5, после чего шаги 5–8 повторяются для  $k = 2$  и т.д.

Параллельно по ходу вычисления апостериорных вероятностей  $w(\lambda_j | t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , в момент времени  $t$  выносятся решение о состоянии процесса  $\lambda(t)$  (потока) по критерию максимума апостериорной вероятности:  $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$ , если  $w(\lambda_i | t) = \max w(\lambda_j | t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

### Заключение

Предложенный в настоящей статье метод оценивания состояний потока позволяет получить оптимальные оценки состояний обобщенного асинхронного потока событий с произвольным (конечным) числом состояний, функционирующего в условиях непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности в режиме текущего времени. Оценивание производится по критерию максимума апостериорной вероятности, обеспечивающего минимальную полную (безусловную) вероятность принятия ошибочного решения. Апостериорные вероятности получены в явном виде, что позволяет производить их вычисление без привлечения численных методов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск : Изд-во БГУ, 2000. 175 с.
2. Basharin G.P., Gaidamaka Y.V., Samouylov K.E. Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multi-service communication of next generation networks // Automatic Control and Computer Science. 2013. V. 47, is. 2. P. 62–69.
3. Vishnevsky V.M., Larionov A.A., Smolnikov R.V. Optimization of topological structure of broadband wireless networks along the long traffic routes // Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications: proc. of the eighteenth Int. Scientific Conf. (DCCN–2015) (Moscow, October 19–22, 2015). Moscow : ICS RAS, 2015. P. 27–35.
4. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1955. V. 51, is. 3. P. 433–441.
5. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proc. of the Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, is. 4. P. 923–930.
6. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
7. Neuts M.F. A versatile Markovian point process // J. of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
8. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
9. Lucantoni D.M., Neuts M.F. Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue // Communications in Statistics Stochastic Models. 1994. V. 10, is. 3. P. 575–598.
10. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.

11. Nezhel'skaya L.A. Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Science. 2015. V. 564. P. 141–151.
12. Gortsev A.M., Klimov I.S. An estimate for intensity of Poisson flow of events under condition of its partial missing // Radiotekhnika. 1991. No. 12. P. 3–7.
13. Nezhelskaya L.A. Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Science. 2014. V. 487. P. 342–350.
14. Gortsev A.M., Klimov I.S. Estimation of the non-observability period and intensity of Poisson event flow // Radiotekhnika. 1996. No. 2. P. 8–11.
15. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events // Discrete Mathematics and Applications. 2011. V. 21, is. 3. P. 283–290.
16. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного асинхронного потока событий с произвольным числом состояний // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2019. № 47. С. 12–23.
17. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М. : Сов. радио, 1968. Кн. 2. 504 с.
18. Хазен Э.М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М. : Сов. радио, 1968. 256 с.
19. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М. : Физматгиз, 1963. 235 с.
20. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. : Наука, 1969. 424 с.

Поступила в редакцию 29 марта 2019 г.

Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. (2019) OPTIMAL ESTIMATE OF THE STATES OF A GENERALIZED ASYNCHRONOUS EVENT FLOW WITH AN ARBITRARY NUMBER OF STATES UNDER CONDITIONS OF UNEXTENDABLE DEAD TIME. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 49. pp. 35–43

DOI: 10.17223/19988605/49/5

In this paper, we consider a generalized asynchronous flow of events, the accompanying process (intensity) of which is a piecewise constant random process  $\lambda(t)$  with  $n$  states:  $\lambda(t)$  takes values from a discrete set of values  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ,  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n \geq 0$ . Let's say that that the  $i$  th state of the process  $\lambda(t)$  holds if  $\lambda(t) = \lambda_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $n = 2, 3, \dots$ . If the  $i$  th state takes place, then during the time interval when  $\lambda(t) = \lambda_i$  there is a Poisson flow of events with parameter (intensity)  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . The duration of the process  $\lambda(t)$  (flow) in the  $i$  th state is distributed according to the exponential law with parameter  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . We consider the stationary mode of the flow functioning, therefore we can neglect transition processes on the observing semi-interval  $[t_0, t)$ , where  $t_0$  – the beginning of observation,  $t$  – the ending of observation. In these premises,  $\lambda(t)$  is an accompanying stationary piecewise constant hidden transitive Markov process with an arbitrary number of states  $n$  ( $n = 2, 3, \dots$ ).

At the moment of transition of the process  $\lambda(t)$  from the  $i$  th state to the  $j$  th, an additional event is triggered with probability  $p_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $j \neq i$ ; the transition occurs at an arbitrary time moment, not related to the moment of occurrence of the Poisson flow event with parameter  $\lambda_i$ , while initiating an additional event occurs in the  $j$  th state; transition and initiation of an additional event occur instantly.

After each registered event at the time moment  $t_k$  (both the event of the Poisson flow with parameter  $\lambda_i$  and the additional event), there is a period of fixed duration  $T$  (dead time), during which other events of the generalized asynchronous event flow are inaccessible to observation. An event that occurs during the dead time doesn't cause an extension of its period (unextendable dead time) At the end of the dead time period, the first event that occurred again creates a period of dead time of duration  $T$  and etc.

It is required, on the basis of the moments of occurrence of events (from moment  $t_0$  to moment  $t$ ) to estimate the state of the process  $\lambda(t)$  at the moment  $t$ . We denote the estimate of the state of the process  $\lambda(t)$  at the time moment  $t$  as  $\hat{\lambda}(t)$ . We found an explicit form for a posteriori probabilities  $w(\lambda_i | t) = w(\lambda_i | t_1, \dots, t_m, t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , that at the time moment  $t$  the value of the process  $\lambda(t) = \lambda_i$  ( $m$  is the number of events that occurred at the time moments  $t_1, \dots, t_m$  at the observation interval  $(t_0, t)$ ), here

$\sum_{i=1}^n w(\lambda_i | t) = 1$ . The decision on the state of the process  $\lambda(t)$  is made according to criterion of a posteriori probability maximum.

The algorithm for calculating a posteriori probabilities  $w(\lambda_j | t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , at any time moment  $t$  ( $t \geq t_0 = 0$ ) was formulated. In parallel, as we calculate a posteriori probabilities  $w(\lambda_j | t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , we can make a decision on the state of the process  $\lambda(t)$  at the current time moment  $t$ :  $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$ , if  $w(\lambda_i | t) = \max w(\lambda_j | t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

Keywords: generalized asynchronous doubly stochastic flow of events; a posteriori probability; optimal states estimation; unextendable dead time.

GORTSEV Alexander Mikhailovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: dekanat@fpmk.tsu.ru

NEZHHEL'SKAYA Lyudmila Alekseevna (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: ludne@mail.ru

## REFERENCES

1. Dudin, A.N. & Klimenok, V.I. (2000) *Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami* [The queuing systems with correlated flows]. Minsk: BSU.
2. Basharin, G.P., Gaidamaka, Y.V. & Samouylov, K.E. (2013) Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multiservice communication of next generation networks. *Automatic Control and Computer Science*. 47(2). pp. 62–69. DOI: 10.3103/S0146411613020028
3. Vishnevsky, V.M., Larionov, A.A. & Smolnikov, R.V. (2015) Optimization of topological structure of broadband wireless networks along the long traffic routes. *Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications*. Proc. of the 18th International Conference (DCCN–2015). Moscow, October 19–22, 2015. Moscow: ICS RAS. pp. 27–35.
4. Cox, D.R. (1955) The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 51(3). pp. 433–441. DOI: 10.1017/S0305004100030437
5. Kingman, J.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proc. of the Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923–930.
6. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 1 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks. Part 1]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 6. pp. 92–99.
7. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markovian point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764–779. DOI: 10.2307/3213143
8. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a batch markovian arrival process. *Communications in Statistics Stochastic Models*. 7. pp. 1–46. DOI: 10.1080/15326349108807174
9. Lucantoni, D.M. & Neuts, M.F. (1994) Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue. *Communications in Statistics Stochastic Models*. 10(3). pp. 575–598. DOI: 10.1080/15326349408807311
10. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavsky, A.F. (1988) *Statisticheskii analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [The statistical analysis of series of random events in physical experiment]. Minsk: Universitetskoe.
11. Nezhelskaya, L.A. (2015) Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 141–151.
12. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1991) An estimate for intensity of Poisson flow of events under condition of its partial missing. *Radiotekhnika*. 12. pp. 3–7.
13. Nezhelskaya, L.A. (2014) Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Science*. 487. pp. 342–350.
14. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1996) Estimation of the non-observability period and intensity of Poisson event flow. *Radio-tehnika*. 2. pp. 8–11.
15. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2011) An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events. *Discrete Mathematics and Applications*. 21(3). pp. 283–290. DOI: 10.1515/dma.2011.017
16. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2019) Optimal estimate of the states of a generalized asynchronous event flow with an arbitrary number of states. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 47. pp. 12–23. DOI: 10.17223/19988605/47/2
17. Levin, B.R. (1968) *Teoreticheskie osnovy statisticheskoy radiotekhniki* [Theoretical Foundations of Statistical Radio Engineering]. Moscow: Sovetskoe radio.
18. Khazen, E.M. (1968) *Metody optimal'nykh statisticheskikh resheniy i zadachi optimal'nogo upravleniya* [Methods of optimal statistical decisions and problems of optimal control]. Moscow: Sovetskoe radio.
19. Khinchin, A.Ya. (1963) *Raboty po matematicheskoy teorii massovogo obsluzhivaniya* [Works on the Mathematical Theory of Queuing]. Moscow: Fizmatgiz.
20. Elsgolts, L.E. (1969) *Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe ischislenie* [The Differential Equations and Calculus of Variations]. Moscow: Nauka.

УДК 519.233.22  
DOI: 10.17223/19988605/49/6

**Ю.Д. Григорьев**

### **ОЦЕНКА БЛИЗОСТИ ДВУХ ГРАФОВЫХ СТРУКТУР НА ПРИМЕРЕ СРАВНЕНИЯ ПОЭТИЧЕСКИХ ПЕРЕВОДОВ**

Рассматривается интерпретация на языке теории графов метода Портера оценки качества поэтического перевода. Предлагаются новые модификации критериев оценки качества перевода. Предлагаемый в статье количественный подход к оценке качества перевода не затрагивает его содержательную и эстетическую стороны, так как это входит в задачу статьи. Предлагаются в общей сложности пять частных критериев качества, из которых первые три затрагивают структурные свойства оригинала и перевода, а остальные два – их симметрию. В основе развиваемого подхода лежит анализ ритмических полей оригинала и перевода. Каждому стихотворному тексту сопоставляется девять характеристик, которым сопоставляются соответствующие графовые структуры. В качестве этих характеристик выступают слоговый и тоновый объемы строк, метр, ритм, рифма и т.д. Лексика (состав знаменательных слов, точность и вольность перевода, качество рифм и пр.) и специальная адаптация подхода к различным ритмическим вариантам метра в качестве характеристик стиха не рассматриваются. Отмечается возможность дальнейшего развития данного подхода по мере привлечения к рассмотрению новых поэтических структур и математических методов.

**Ключевые слова:** критерий близости; лингвистический граф; ритмическое поле; структура; симметрия.

Хорошо известно, что попытки исследования стиховедческих проблем математическими методами предпринимаются давно [1; 2. С. 384–396; 3–6 и др.]. Это относится и к оцениванию качества поэтического перевода с количественной точки зрения [7–10]. Нас будет интересовать подход Портера [10].

Цель данной статьи – изложить способ количественной оценки качества поэтического перевода в терминах теории графов. С чисто формальной точки зрения такая оценка должна автоматически снимать дискуссионный вопрос о том, какой перевод лучше. Другое дело, какие из этого делать выводы. Самый простой – гордо проигнорировать аргументы математиков. Если же отнестись к этому серьезно, то из подобных сравнений переводчик может более явно увидеть слабые места своего перевода и там, где это возможно, внести коррективы. Вот, собственно, и все, что преследует данная статья. При наличии соответствующего программного обеспечения предлагаемый в статье подход реализуется без особых проблем.

Задача сравнения структур двух графов (в нашем случае – двух переводов, которым сопоставляются наборы соответствующих графов) в полном объеме зависит от ее конкретной постановки и пока не имеет исчерпывающего решения, хотя глубокие подходы к ее решению имеются [11]. Так, в области анализа химических структур разработано много количественных показателей (топологических и молекулярных дескрипторов), используемых для описания структурных свойств графов и сравнения по ним структур химических веществ [12]. Однако представленные в них подходы к анализу близости графов в нашем случае, скорее всего, не подойдут, так как они применимы только к связным графам. Лингвистические же графы, как мы увидим, в своем большинстве являются несвязными.

#### **1. Постановка задачи**

Отправной точкой для постановки задачи, рассматриваемой в данной работе, является статья Портера [10], в которой заложены основные идеи рассматриваемого подхода.

### 1.1. Измерение качества перевода

Будем рассматривать задачу измерения сходства оригинала и перевода в пространстве лингвистических маркеров на языке теории графов. Исходному стихотворному тексту (оригиналу) сопоставляется совокупность конечных  $(p, q)$ -графов  $G = (G_1, \dots, G_m)$ , а его переводу – отображение  $\varphi: G \rightarrow G' = (G'_1, \dots, G'_m)$ . Затем определяется набор частных функционалов  $K_i: G_i \times G'_i \rightarrow [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, r$ , позволяющих сравнивать  $G$  и  $G'$ . Свертка критериев  $Q = g(K_1, \dots, K_r)$  дает комплексный критерий, характеризующий данный перевод. Сравнивая два перевода  $G'$  и  $G''$ , заключаем, что перевод  $G'$  лучше перевода  $G''$ , если  $Q' > Q''$ .

### 1.2. «Пантера» Р. Рильке

Для иллюстрации подхода и большей наглядности постановки задачи рассмотрим два конкретных перевода знаменитой «Пантеры» Рильке [13], принадлежащих В. Эльснеру [14. С. 107] и выдающемуся германисту и переводчику А. Карельскому [14. С. 65]:

От частого мельканья прутьев взор  
Ее так вял, что он не в силах боле  
Хранить что-либо. Мнится, нет и воли,  
А только прутья; ими полн простор.

Беззвучный гибкий шаг по клетке опостылой  
От темного до светлого угла  
Подобен пляске некой мощной силы  
По кругу тесному, где воля замерла.

Лишь прыгнет изредка завеса над зрачком,  
И образ через тишь сторожкую суставов  
Проходит медленно и величаво,  
Чтоб в сердце у нее застыть потом.

Глазам усталым – где передохнуть им?  
Как удержать хоть малой вещи след?  
Исполосован взгляд миллионом прутьев,  
и за миллионом прутьев мира нет.

Упругий шаг бесшумных лап звериных,  
что здесь в пространстве крохотном кружит, –  
как вечный танец силы вокруг середины,  
где воля укрощенная лежит.

Лишь иногда расширится мгновенно зрачок  
и отраженье вглубь войдет,  
пройдет по напряженно ждущим членам  
и в сердца глубине умрет.

Перевод В. Эльснера

Перевод А. Карельского

Необходимые исходные данные – ритмические поля оригинала, переводов и характеристики соответствующих им лингвистических графов – *строфоидов*, представлены в табл. 1–3. В левых частях этих таблиц представлены ритмические поля оригинала и переводов, а в правых частях – характеристики структур всех слоев архитектоники стихотворения, полученные на их основе. Они представлены девятью столбцами, пояснения к которым даются в следующем разделе.

Таблица 1

Ритмическая схема «Пантеры» Р. Рильке

	Ритмическая схема						Строфоиды								
	I	II	III	IV	V	VI	G <sub>1</sub>	G <sub>2</sub>	G <sub>3</sub>	G <sub>4</sub>	G <sub>5</sub>	G <sub>6</sub>	G <sub>7</sub>	G <sub>8</sub>	G <sub>9</sub>
1	⊂*	⊂⊂	⊂*	⊂⊂	⊂*	⊂	11	н	ж	я	м1	р1	3	а	0,55
2	⊂*	⊂*	⊂⊂	⊂*	⊂*		10	ч	м	я	м2	р2	4	б	0,80
3	⊂*	⊂*	⊂*	⊂*	⊂*	⊂	11	н	ж	я	я	р3	5	а	0,91
4	⊂*	⊂*	⊂*	⊂*	⊂*		10	ч	м	я	я	р4	5	б	1,00
5	⊂*	⊂*	⊂*	⊂*	⊂*	⊂	11	н	ж	я	я	р3	5	с	0,91
6	⊂*	⊂*	⊂*	⊂*	⊂*		10	ч	м	я	я	р4	5	д	1,00
7	⊂⊂	⊂*	⊂*	⊂*	⊂*	⊂	11	н	ж	я	м3	р5	4	с	0,73
8	⊂*	⊂*	⊂*	⊂*	⊂*		10	ч	м	я	я	р4	5	д	1,00
9	⊂*	⊂*	⊂*	⊂⊂	⊂*	⊂	11	н	ж	я	м4	р6	4	е	0,73
10	⊂*	⊂*	⊂*	⊂*	⊂*		10	ч	м	я	я	р4	5	ф	1,00
11	⊂*	⊂*	⊂⊂	⊂*	⊂*	⊂	11	н	ж	я	м2	р7	4	е	0,73
12	⊂*	⊂*	⊂*	⊂*	⊂*		8	ч	м	я	я	р8	4	ф	1,00

Примечание. ⊂\* – ямб, ⊂⊂ – пиррихий.

Ритмическая схема «Пантеры» Рильке в переводе В. Эльснера

	Ритмическая схема							Строфоиды								
	I	II	III	IV	V	VI	VII	G' <sub>1</sub>	G' <sub>2</sub>	G' <sub>3</sub>	G' <sub>4</sub>	G' <sub>5</sub>	G' <sub>6</sub>	G' <sub>7</sub>	G' <sub>8</sub>	G' <sub>9</sub>
1	У*	УУ	У*	У*	У*			10	ч	м	я	м5	р9	4	а	0,80
2	УУ	У*	У*	У*	У*	У		11	н	ж	я	м3	р5	4	б	0,73
3	У*	У*	У*	У*	У*	У		11	н	ж	я	я	р3	5	б	0,91
4	У*	У*	У*	У*	У*			10	ч	м	я	я	р4	5	а	1,00
5	У*	У*	У*	У*	УУ	У*	У	13	н	ж	я	м6	р10	5	с	0,77
6	У*	УУ	У*	УУ	У*			10	ч	м	я	м1	р11	3	д	0,60
7	У*	У*	У*	У*	У*	У		11	н	ж	я	я	р3	5	с	0,91
8	У*	У*	УУ	У*	УУ	У*		12	ч	м	я	м7	р12	4	д	0,67
9	У*	У*	УУ	У*	УУ	У*		12	ч	м	я	м7	р12	4	е	0,67
10	У*	У*	У*	У*	УУ	У*	У	13	н	ж	я	м6	р10	5	ф	0,77
11	У*	У*	УУ	УУ	У*	У		11	н	ж	я	м8	р13	3	ф	0,55
12	У*	УУ	У*	У*	У*			10	ч	м	я	м5	р9	4	е	0,80

Примечание. У\* – ямб, УУ – пиррихий.

Ритмическая схема «Пантеры» Рильке в переводе А. Карельского

	Ритмическая схема							Строфоиды								
	I	II	III	IV	V	VI	VII	G' <sub>1</sub>	G' <sub>2</sub>	G' <sub>3</sub>	G' <sub>4</sub>	G' <sub>5</sub>	G' <sub>6</sub>	G' <sub>7</sub>	G' <sub>8</sub>	G' <sub>9</sub>
1	У*	У*	У*	УУ	У*	У		11	н	ж	я	м4	р6	4	а	0,73
2	УУ	У*	У*	У*	У*	У		10	ч	м	я	м3	р9	4	б	0,80
3	УУ	У*	У*	У*	У*	У		11	н	ж	я	м3	р5	4	а	0,73
4	УУ	У*	У*	У*	У*			10	ч	м	я	м3	р9	4	б	0,80
5	У*	У*	У*	У*	У*	У		11	н	ж	я	я	р3	5	с	0,91
6	У*	У*	У*	УУ	У*			10	ч	м	я	м4	р10	4	д	0,80
7	У*	У*	У*	УУ	У*	У		11	н	ж	я	м4	р6	4	с	0,73
8	У*	УУ	У*	УУ	У*			10	ч	м	я	м4	р11	3	д	0,60
9	УУ	У*	У*	УУ	У*	УУ	*	13	н	ж	я	м5	р12	4	е	0,54
10	УУ	У*	У*	У*				8	ч	м	я	м6	р13	3	ф	0,75
11	У*	УУ	У*	У*	У*	У		11	н	ж	я	м7	р14	4	е	0,73
12	У*	УУ	У*	У*				8	ч	м	я	м6	р15	3	ф	0,75

Примечание. У\* – ямб, УУ – пиррихий.

Из табл. 1 следует, что «Пантера» написана 5-стопным ямбом, но ритм ее строк варьирует, так как в них наряду с сильными стопами встречаются ипостаси. В первых стопах предпоследней строки оригинала и последней строки перевода Эльснера отмечены спондеи. Исходя из субъективных соображений автор заменил их пиррихиями. Это свидетельство того, что в определенной степени ритмические поля могут определяться субъективно. В целом же надо сказать, что при их воспроизведении необходимо учитывать законы просодии того языка, на котором написано стихотворение, а также сделанные поэтом акценты.

## 2. Близость оригинала и перевода как графов

Критерии качества перевода можно рассматривать в разных контекстах. Мы рассмотрим только критерии, построенные на основе сравнения *структур* оригинала и перевода, а также анализа их *симметрии*. Другие критерии, скажем, учитывающие художественную выразительность стихов на словесном уровне (лексика, способы рифмовки), в статье не рассматриваются, хотя их отсутствие обедняет анализ. Эти критерии более индивидуальны, так как отражают плод одаренности и образного мышления поэта и, в отличие затрагиваемых далее поэтических структур, с большим трудом поддаются формализации.

## 2.1. Графы и строфоиды

*Строфоиды* – это лингвистические структуры, представленные в виде графов и фиксирующие различные характеристики стихотворения [7]. Это дает возможность подойти к задаче сравнения переводов с формальной точки зрения как к задаче оценивания сходства двух графовых структур. Выработка критериев сравнения решается на эвристическом уровне и поэтому допускает альтернативные способы решения, отличные от рассмотренных в статье.

**Графы.** Любому стихотворению (оригиналу), подлежащему переводу, согласно [10] сопоставляется совокупность *графов (слов, строфоидов)*  $\{G_1, \dots, G_m\}$ , в которых содержится формализованная информация о нем. Каждой строке соответствует вершина графа. Вершины помечаются метками (атрибутами), отражающими лингвистические свойства строк стихотворения. Такие графы называются *помеченными*. Разметка вершин графов оригинала атрибутами на примере «Пантеры» Рильке показана в правых частях табл. 1–3.

Вершины  $V_i$ , имеющие одинаковые метки, соединяются ребрами. Обозначим  $G = \langle V, E \rangle$  –  $(p, q)$ -граф, где  $V$  – множество вершин,  $p = |V|$ ,  $E$  – множество ребер,  $q = |E|$ . Переводу соответствует неизоморфное отображение  $\varphi: G \rightarrow G'$ , согласно которому образ  $G'$  должен сохранять некоторые структурные свойства прообраза  $G$ . Строфоиды  $G$  и  $G'$  являются сравнительно простыми графами и характеризуются следующими свойствами (характеристики графа  $G'$  помечаем штрихами):

- графы  $G$  и  $G'$  являются *неориентируемыми*;

- $p' = p$ ;

- множество  $V$  вершин каждого графа состоит из вершин  $v \in V$  только трех типов – *изолированных* ( $\deg v = 0$ ), *концевых* ( $\deg v = 1$ ) и *инцидентных двум ребрам* ( $\deg v = 2$ ),  $\deg v$  – *степень* вершины  $v$ ;

- графы  $G$  и  $G'$  являются, как правило, несвязными (*связности*  $\kappa(G) = \kappa(G') = 0$  [12. С. 60] и содержат *компоненты связности* только трех типов – изолированные вершины, простые цепи и циклы. Цепи и циклы с  $n$  вершинами обозначаем  $P_n$  и  $C_n$  соответственно. В рассматриваемых графах встречаются только цепи  $P_2$ , т.е. маршруты длиной 1. Циклы  $C_n$  могут быть любыми с  $n \leq p$ ;

- графы  $G$  и  $G'$  являются *планарными* [12. С. 127];

- графы  $G$  и  $G'$  являются *объединением* своих компонент связности, рассматриваемых как их *блоки* [12. С. 41].

Представление лингвистического графа можно вполне экономично реализовать двумя строками  $g = (g_1, \dots, g_p)$  и  $h = (h_1, \dots, h_p)$ , где элементы строк  $g_i$  и  $h_i$  – это метки вершин, связанных ребром. Так как в неориентируемых графах нет петель, то равенство  $g_i = h_i$  означает, что соответствующие вершины ребром не связаны. Объединив строки  $g$  и  $h$  в один объект, получим *подстановку*

*$p$ -й степени*  $C = \begin{pmatrix} g_1, \dots, g_p \\ h_1, \dots, h_p \end{pmatrix}$ . Ее свойства (четность, количество независимых циклов, в которые она

разлагается) можно рассматривать как характеристические свойства строфоида.

Пусть  $C$  – подстановка  $p$ -й степени,  $s$  – число независимых циклов, в которые она разлагается,  $n$  – число действительно перемещаемых символов,  $n \leq p$ . Величина  $\Delta = n - s$  называется *декрементом* подстановки  $C$  [16. С. 36]. Декремент характеризует свойства компонент связности графа и будет использован нами при обосновании критерия связности  $K_1^{(3)}$ .

Отображение  $\varphi: G \rightarrow G'$  называется *изоморфным*, если оно *биективно* и сохраняет отношение смежности. Отображение оригинала в перевод в подавляющем большинстве случаев является неизоморфным, хотя и биективным. В силу этого рассматриваемые далее графы  $G$  и  $G'$  оказываются су-

щественно различными. Опираясь на это обстоятельство, мы и попытаемся оценить сходство их структур с помощью различных критериев.

**Строфоиды.** Как оригинал  $G$ , так и его образ  $G'$ , т.е. перевод, характеризуются множествами графов  $\{G_1, \dots, G_m\}$  и  $\{G'_1, \dots, G'_m\}$ , моделирующими их структуру. Следуя [10], будем называть их строфоидами вместе с присвоенными им *атрибутивными* именами (слогоид, четноид и т.д. [Там же]). Приведем их описания, дополняя их по мере необходимости формальными характеристиками.

*Слогоид*  $G_1$  описывает слоговый объем строк (количество слогов в строке). Метки его вершин означают количество слогов в соответствующей строке. *Четноид*  $G_2$  определяет четность или нечетность числа слогов в строках. Очевидно,  $G_2 = C_r \cup C_s$ , где  $r + s = p$ , т.е. четноид всегда представляет 2-связный граф. *Клаузоид*  $G_3$  содержит информацию о типах рифм. Основными типами рифм являются мужские (м), женские (ж) и дактилические (д). Встречаются и другие типы рифм.

*Инерциоид*  $G_4$  определяет инерцию господствующего метра данной строки. По этому поводу Портер пишет [7. С. 46]: «Господство того или иного 2- или 3-сложного классического метра можно определить, наложив на строку 2- или 3-сложную решетку. В просветах между прутьями будут появляться наборы ударных и неударных слогов. Тот метр, который появляется в строке чаще других, и есть господствующий метр. В таких случаях мы говорим, что стих подчинен инерции метра». В рассматриваемых в статье примерах инерция всех строк оригинала и переводов – ямб (я). Поэтому инерциоид – регулярный степени 2 граф  $G_4 = C_p$ . *Метроид*  $G_5$  определяет реальный метр каждой строки в зависимости от месторасположения в ней ипостасей (пиррихий, спондеев и т.п.). Смысл меток следует из контекста (п – пиррихий, цифры – номер безударной стопы). *Ритмоид*  $G_6$  описывает акцентную схему ритма. Содержательный смысл меток понятен из приводимых таблиц. *Акцентоид*  $G_7$  определяет тоновый объем строк (количество акцентов в строке). *Рифмоид*  $G_8$  определяет способ рифмовки строк. Она может быть перекрестной (абаб), смежной (аабб), кольцевой (абба) или какой-либо иной. Вариантов здесь может быть очень много. *Силоид*  $G_9$  определяется строфоидами  $G_1$  и  $G_7$ , а именно: метки его вершин соответствуют значениям силы инерции строки, которая определяется как отношение числа всех слогов в ударных стопах к общему числу слогов в строке.

Очевидно, что девять перечисленных строфоидов не отражают всей многослойной структуры стихотворения, хотя и затрагивают ее существенную часть. Это же относится и к построенным на основе графов  $G$  и  $G'$  частных и обобщенных критериев их сходства. Итоговые вычисления, связанные с полным сравнением переводов Эльснера и Карельского, вынесены в раздел 3.

## 2.2. Структурность

Предлагаемые частные критерии структуры  $K_1^{(i)}$ ,  $i=1, 2, 3$ , учитывают различия в структуре графов  $G$  и  $G'$ , заложенные в соответствующих им подстановках  $C$  и  $C'$ . На их основе формируется обобщенный критерий структуры

$$K_{\text{СТРУК}} = (1/3) \sum_{i=1}^3 K_1^{(i)}. \quad (1)$$

**Близость вершин и маршрутов.** Коэффициентом *близости вершин* графов  $G$  и  $G'$  назовем величину

$$w = \frac{p - H(V, V')}{p}, \quad (2)$$

где  $H(V, V')$  – *расстояние Хэмминга* между векторами  $v = (v_1, \dots, v_p)$  и  $v' = (v'_1, \dots, v'_p)$ , равное числу вершин, в которых координаты этих векторов различны.



Коэффициентом близости маршрутов в  $G$  и  $G'$  назовем величину

$$u = \frac{q_0}{q + q' - q_0}, \quad (3)$$

где  $q_0$  – длина маршрутов (количество ребер), общих для  $G$  и  $G'$ . Поскольку  $q_0 \leq \min\{q, q'\}$ , то  $u \leq 1$ , и равенство  $u = 1$  достигается только тогда, когда  $q = q' = q_0$ , т.е. в случае  $G \sim G'$ .

Критерием близости вершин и маршрутов оригинала  $G = (G_1, \dots, G_m)$  и перевода  $G' = (G'_1, \dots, G'_m)$ , характеризуемых векторами  $w = (w_1, \dots, w_m)$  и  $u = (u_1, \dots, u_m)$ , назовем величину

$$K_1^{(1)} := \langle w, u \rangle = m^{-1} \sum_{j=1}^m K_{1j}^{(1)}, \quad K_{1j}^{(1)} := w_j u_j, \quad (4)$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – скалярное произведение в метрике  $g_{ij} = m^{-1} \delta_{ij}$ .

Поскольку  $w_i, u_i \in [0, 1]$ , то чем больше значение  $K_1^{(1)}$ , тем выше в структурном отношении качество перевода. Очевидно,  $K_1^{(1)} \in [0, 1]$ . Следовательно, различные переводы можно упорядочить по  $K_1^{(1)}$  в порядке возрастания их качества.

**Степени вершин.** Другой возможный критерий сходства структур  $G$  и  $G'$  строится следующим образом. Пусть  $v(\xi) = \sigma/\mu$  – коэффициент вариации случайной величины  $\xi$ , принимающей два положительных значения  $a$  и  $b$  с равными вероятностями,  $\sigma^2 = D\xi$ ,  $\mu = E\xi$  – дисперсия и среднее  $\xi$  соответственно. Тогда

$$\mu = \frac{a+b}{2}, \quad \sigma^2 = \frac{(a-b)^2}{4}, \quad v(\xi) = \frac{|a-b|}{a+b}.$$

Будем сравнивать  $G_j$  и  $G'_j$  по степеням их вершин, представленных диагоналями  $d_j = \text{diag } A_j^2$  и  $d'_j = \text{diag } A_j'^2$  матриц  $A_j^2$  и  $A_j'^2$ , где  $A_j$  и  $A'_j$  – матрицы смежностей графов  $G_j$  и  $G'_j$  [13. С. 178]. По аналогии с  $v(\xi)$  введем его векторный вариант  $v_j(\xi) = \|d_j - d'_j\| / \|d_j + d'_j\|$ , где  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  – евклидова норма, и рассмотрим критерий близости степеней вершин  $K_1^{(2)}$ , положив

$$K_1^{(2)} := m^{-1} \sum_{j=1}^m K_{1j}^{(2)}, \quad K_{1j}^{(2)} := 1 - v_j(\xi). \quad (5)$$

Вычитание  $v(\xi)$  из единицы объясняется тем, что перевод считается тем лучше, чем меньше коэффициент вариации  $v(\xi)$ .

**Связность.** Следуя [17], введем необходимые определения, связанные с разбиениями множеств. Под разбиением  $p$ -элементного множества  $V$  на  $k$  блоков понимается произвольное семейство  $\pi = \{A_1, \dots, A_k\}$  такое, что

$$\bigcup_{s=1}^k A_s = V, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad A_i \neq \emptyset, \quad 1 \leq i < j \leq k.$$

Множество всех разбиений множества  $V$  на  $k$  блоков обозначаем  $\Pi_k(V)$ , а множество всех разбиений  $\Pi(V)$ . Очевидно, что  $\Pi(V) = \Pi_1(V) \cup \dots \cup \Pi_k(V)$ .

На множестве  $\Pi(V)$  введем отношение частичной упорядоченности  $\preceq$ . Если  $\pi, \sigma \in \Pi(V)$  и каждый блок  $B \in \sigma$  является суммой некоторого числа блоков разбиения  $\pi$ , то будем говорить, что  $\pi$  есть измельчение разбиения  $\sigma$  и писать  $\pi \preceq \sigma$ .

Не всякие два разбиения  $\pi$  и  $\sigma$  сравнимы между собой, но всегда существует измельчение  $\pi'$  такое, что  $\pi' \preceq \sigma$ . Однако не любое измельчение разбиения  $\sigma$  будет нас интересовать. Частично упорядоченное множество  $\langle V, \preceq \rangle$  называется решеткой, если для произвольных  $x, y \in V$  существуют такие элементы  $a, b \in V$ , для которых выполнены условия:

$$a \preceq x, a \preceq y, \quad \forall c: c \preceq x, c \prec y \Rightarrow c \preceq a.$$

Такие элементы  $a, b \in V$ , если они существуют, однозначно определяются через  $x$  и  $y$ . Элемент  $a$  называется *нижней границей* элементов  $x$  и  $y$ , которую обозначим  $x \wedge y$ .

Согласно [17. С. 49, теорема 1.17] множество  $\Pi(V)$ , упорядоченное на основе отношения измельчения, образует решетку, причем

$$\pi \wedge \sigma := \{A \cap B : (A \in \pi) \wedge (B \in \sigma) \wedge (A \wedge B \neq \emptyset)\}. \quad (6)$$

Соотношение (6) дает способ вычисления нижней границы  $\pi \wedge \sigma$  разбиений  $\pi$  и  $\sigma$ . В контексте нашей задачи в роли разбиений  $\pi$  и  $\sigma$  выступают разбиения множеств вершин  $V$  и  $V'$  строфоидов  $G$  и  $G'$ .

Пусть  $\Delta, \Delta'$  – декременты подстановок (4), соответствующих графам  $G$  и  $G'$ . На практике, как правило, выполняется неравенство  $\Delta \geq \Delta'$ . В этих случаях  $\kappa := \Delta'/\Delta \leq 1$ . В противном случае вместо отношения  $\Delta'/\Delta$  будем использовать величину  $\kappa := 2 - \Delta'/\Delta \leq 1$ , т.е. в общем случае полагаем  $\kappa := |\Delta - \Delta'|/\Delta'$ . Величину

$$K_1^{(3)} := m^{-1} \sum_{j=1}^m K_{1j}^{(3)}, \quad K_{1j}^{(3)} := \frac{\kappa_j(\pi_j)}{|\pi_j \wedge \pi'_j|} \quad (7)$$

назовем критерием *связности* оригинала и перевода, а определяющие ее величины  $K_{1j}^{(3)}$  – *относительными коэффициентами связности* их  $j$ -х строфоидов. Чем больше значение  $K_1^{(3)}$ , тем выше качество перевода.

### 2.3. Симметрия

Критерий симметрии  $K_{\text{СИММ}}$  построим на основе двух частных критериев симметрии  $K_2^{(i)}$ ,  $i=1, 2$ , учитывающих свойства симметрии графов  $G$  и  $G'$ . Для этого полагаем

$$K_{\text{СИММ}} = (1/2)(K_2^{(1)} + K_2^{(2)}). \quad (8)$$

Общим подходом к измерению симметрии графа  $G$  является вычисление его индекса симметрии  $I(G)$ . Сравнивая индексы  $I(G)$  и  $I(G')$ , можно заключить, насколько перевод отклонился от оригинала по критерию симметрии.

*Индексом симметрии*  $I(G)$  графа  $G$  называется порядок его группы автоморфизмов  $\text{Aut } G$  [15. С. 190], т.е.

$$I(G) = |\text{Aut } G|. \quad (9)$$

В силу определения лингвистического графа все строфоиды содержат в качестве компонент связности только изолированные вершины, маршруты длиной два (отдельные ребра) и простые циклы. Изолированные вершины на порядок группы  $\text{Aut } G$  влияния не оказывают. Поэтому произвольный автоморфизм любого строфоида можно получить, выполняя сначала произвольный автоморфизм на каждой из его компонент связности, а затем совершая любую перестановку между собой компонент связности с одинаковым числом вершин. Перебирая все комбинации таких отображений, получаем индекс симметрии (9) графа  $G$ .

Критерием *относительной симметрии*  $K_2^{(1)}$  назовем величину

$$K_2^{(1)} := K_2^{(1)}(G, G') = m^{-1} \sum_{j=1}^m K_{2j}^{(1)}, \quad K_{2j}^{(1)} := \frac{\min \{I(G_j), I(G'_j)\}}{\max \{I(G_j), I(G'_j)\}}. \quad (10)$$

Другим вариантом критерия относительной симметрии (10) является критерий *вариации симметрии*, имеющий вид:

$$K_2^{(2)} := K_2^{(2)}(G, G') = 1 - m^{-1} \sum_{j=1}^m K_{2j}^{(2)}, \quad K_{2j}^{(2)} := \frac{|I(G_j) - I(G'_j)|}{I(G_j) + I(G'_j)}. \quad (11)$$

Величины  $K_{2j}^{(2)}$  в критерии (11) – это коэффициенты вариации индекса симметрии для  $j$ -го строфоиды, т.е. отношение среднеквадратического отклонения равномерной случайной величины, принимающей значения  $I(G_j)$  и  $I(G'_j)$ , к ее среднему.

### 3. Сравнение переводов Эльснера и Карельского

Исходные данные для сравнения переводов Эльснера и Карельского представлены в табл. 4, а результаты сравнения – в табл. 5.

Таблица 4

Исходные данные для сравнения переводов Эльснера и Карельского

Автор, переводчик	Параметры	Характеристики строфоидов $G_j$ и $G'_j$ , $j=1, \dots, 9$								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Рильке	$q_j$	11	12	12	12	8	5	11	6	9
	$ \pi_j $	3	2	2	1	5	8	3	6	5
	$ \Delta_j $	9	10	10	11	7	4	9	6	7
	$I(G_j)$	120	288	288	24	28	16	120	4 608	120
Эльснер	$q'_j$	10	12	12	12	6	4	11	6	4
	$q'_0$	1	1	4	12	1	0	3	2	0
	$w'_j$	5/12	2/3	2/3	1	1/6	1/6	7/12	2/3	1/6
	$u'_j$	1/20	1/23	1/5	1	1/13	0	3/19	1/5	0
	$ \pi_j \wedge \pi'_j $	3/9	2/4	2/4	1	5/11	8/12	3/7	6/10	5/12
	$ \Delta'_j $	8	10	10	11	5	4	9	6	4
	$I(G'_j)$	1 024	288	288	24	576	384	400	4 608	384
Карельский	$q'_j$	11	12	12	12	8	2	11	5	8
	$q'_0$	7	12	12	12	2	0	4	5	3
	$w'_j$	5/6	1	1	1	1/12	1/12	5/12	11/12	1/3
	$u'_j$	1/2	1	1	1	1/17	0	2/9	5/6	3/14
	$ \pi_j \wedge \pi'_j $	3/5	1	1	1	5/9	8/12	3/6	6/7	5/9
	$ \Delta'_j $	8	10	10	11	6	2	9	5	6
	$I(G'_j)$	160	288	288	24	96	8	96	7 680	96

Таблица 5

Результаты анализа: критерии качества переводов Эльснера и Карельского

Переводчик	Параметры	Характеристики строфоидов $G_j$ и $G'_j$ , $j=1, \dots, 9$									Критерии
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Эльснер	$K_{1j}^{(1)}$	0,021	0,029	0,133	1,000	0,013	0	0,092	0,133	0	0,158
	$K_{1j}^{(2)}$	0,770	1	1	1	0,553	0,393	0,810	1	0,478	0,778
	$K_{1j}^{(3)}$	0,333	0,500	0,500	1	0,455	0,667	0,429	0,600	0,417	0,544
	$K_{СТРУК}$										0,481
	$K_{2j}^{(1)}$	0,117	1	1	1	0,049	0,042	0,300	1	0,312	0,536
	$K_{2j}^{(2)}$	0,790	0	0	0	0,907	0,920	0,538	0	0,524	0,591
	$K_{СИММ}$										0,563

Переводчик	Параметры	Характеристики строфоидов $G_j$ и $G'_j$ , $j=1, \dots, 9$									Критерии
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Карельский	$K_{1j}^{(1)}$	0,417	1	1	1	0,012		0	0,204	0,278	0,434
	$K_{1j}^{(2)}$	0,805	1	1	1	0,608	0,168	0,782	0,782	0,570	0,746
	$K_{1j}^{(3)}$	0,533	1	1	1	0,476	0,333	0,500	0,714	0,476	0,670
	$K_{СТРУК}$										0,617
	$K_{2j}^{(1)}$	0,750	1	1	1	0,292	0,500	0,800	0,600	0,800	0,749
	$K_{2j}^{(2)}$	0,143	0	0	0	0,548	0,333	0,111	0,250	0,111	0,834
	$K_{СИММ}$										0,791

Для сравнимости двух разных переводов объединим критерии структурного сходства (1) и симметрии (8) в один обобщенный критерий адекватности, или мастерства перевода:

$$K_{АДЕК} := \frac{3}{5} K_{СТРУК} + \frac{2}{5} K_{СИММ} = \frac{1}{5} \left( \sum_{i=1}^3 K_1^{(i)} + \sum_{i=1}^2 K_2^{(i)} \right). \quad (12)$$

Тогда согласно (12) и табл. 5 получаем

$$Q_1 := K_{АДЕК}(\text{Эльснер}) = 0,514, \quad Q_2 := K_{АДЕК}(\text{Карельский}) = 0,687.$$

Так как  $Q_2 > Q_1$ , то в совокупности по всем показателям перевод Карельского лучше перевода Эльснера, что и соответствует действительности.

### Заключение

Рассмотренные оценки близости оригинала и перевода не охватывают всего многообразия нюансов, возникающих при решении такой задачи. Скажем, в ритмических полях можно дополнительно учитывать, наряду с ударными и безударными, слабые и сильные слоги. И вообще строить ритмические поля нужно с участием стиховедов [18. С. 88]. Но в данном случае важен сам принцип, сама идея использовать ритмическое поле как источник информации для последующих вычислений.

Чрезмерные попытки усилить математическую составляющую предлагаемого подхода приведут к утрате интереса к нему со стороны филологов. С другой стороны, доскональное погружение во все стиховедческие тонкости также приведет к излишней сложности предлагаемой методики. Важен принцип, а остальное – дело будущих исследователей, которые могли бы продолжить совершенствование алгоритмов анализа оригинала и перевода в необходимых направлениях.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Гаспаров М.Л. Статистическое обследование русского трехударного дольника // Теория вероятностей и ее применения. 1963. Т. 8, № 1. С. 102–108.
2. Холшевников В.Е. Стихование и математика // Содружество наук и тайны творчества : сб. ст. / под ред. Б. Мейлаха. М. : Искусство, 1968. С. 384–396.
3. Мауенова М.Р. Poetyka i matematyka. Warszawa, 1965.
4. Леви И. К вопросу о точных методах анализа стиха : пер. с чеш. // Мауенова М.Р. Poetyka i matematyka. Warszawa, 1965.
5. Настопкене В. Опыт исследования точности перевода количественными методами // Литература (Вильнюс). 1981. Т. 23, № 2. С. 53–70.
6. Григорьев Ю.Д., Мартыненко Г.Я. Комбинаторные варианты рифм в сонетах Рильке: квантитативно-типологический подход // Вестник Новосибирского государственного университета. Сер. Лингвистика и межкультурная коммуникация. 2019. Т. 17, № 1. С. 5–20.
7. Андреев С.Н. Точный и вольный перевод стихотворного текста: количественная оценка // Известия Смоленского государственного университета. 2012. № 4 (20). С. 88–95.
8. Гаспаров М.Л. Подстрочник и мера точности // Теория перевода и научные основы подготовки переводчиков : материалы Всесоюз. науч. конф. М. : МГПИИЯ, 1975.

9. Григорьев Ю.Д. Системная гармония перевода поэтических текстов // Научный вестник Новосибирского государственного технического университета. 2018. Т. 70, № 1. С. 79–102.
10. Портер Л.Г. Количественные критерии адекватности поэтического перевода // Мир перевода. 2004. Т. 1, № 11. С. 39–54.
11. Погребной В.К. Метод интеграции структурных различий в графовых моделях и его применение для описания структур // Известия Томского политехнического университета. 2011. Т. 318. № 5. С. 10–16.
12. Дэмер М., Эммерт-Штрайб Ф., Цой Ю.Р., Вармуза К. Новый функционал информативности для анализа структуры химических графов // Известия Томского политехнического университета. 2010. Т. 316, № 5. С. 5–11.
13. Rilke R.M. Neue Gedichte und der Neuen Gedichte anderer Teil. Frankfurt am Main : Insel Verlag, 1976. 172 S.
14. Чайковский Р.Р., Лысенкова Е.Л. Неисчерпаемость оригинала: 100 переводов «Пантеры» Р.М. Рильке на 15 языков. Магадан : Кордис, 2001. 211 с.
15. Харари Ф. Теория графов. М. : Мир, 1973. 302 с.
16. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М. : Наука, 1965. 432 с.
17. Липский В. Комбинаторика для программистов. М. : Мир, 1988. 214 с.
18. Казарцев Е.В. Сравнительное стиховедение. Метрика и ритмика. СПб. : Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2017. 160 с.

Поступила в редакцию 19 мая 2019 г.

Grigoriev Yu.D. (2019) ESTIMATION OF PROXIMITY OF GRAPH STRUCTURES ON AN EXAMPLE OF COMPARISON OF POETIC TRANSLATIONS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 49. pp. 44–54

DOI: 10.17223/19988605/49/6

A quantitative approach to estimation the quality of poetic translation is considered. The approach is based on Porter's method according to which any translation is characterized by a finite number of indicators reflecting the multi-layered structure of the poetic text. In this case, a linguistic graph  $G$  is associated with every indicator. The attribution of such graph vertexes allows to work in a proximity measure between graph  $G$  of the original and graph  $G'$  of the translation. In development of Porter's method new variants of the proximity criteria  $G$  and  $G'$  constructed with graph theory application are suggested.

The proposed quantitative approach to estimation the quality of translation does not affect its substantive and aesthetic aspects. The estimation of these parties is not a part of paper's task. In total five partial quality criteria are suggested: three of them are connected with structural properties of the original and the translation, and two others – with their symmetry. On such basis two intermediate criteria of structure  $K_{\text{STRUC}}$  and symmetry  $K_{\text{SYMM}}$  are formed. The generalized criterion  $Q = (3/5)K_{\text{STRUC}} + (2/5)K_{\text{SYMM}}$  after that is introduced. Such a convolution of individual criteria into one criterion makes it possible to compare different translations of the same text among themselves. Let be  $Q_i$  a quality criterion of  $i$ -th translation. If an inequality  $Q_2 > Q_1$  takes place then a second translation is better than a first translation.

The developed approach is based on a comparison of the rhythmic fields of the original and the translation which are the starting point for further analysis. Each poetic text is matched with nine characteristics, i.e. nine graph structures. These characteristics are the syllable and tone volumes of lines, the meter, the rhythm, the rhyming method, etc.

The vocabulary (composition of significant words, accuracy and poetic licence, quality of rhymes, etc.) and special adaptation of the approach to various rhythmic versions of the meter as characteristics of the verse are not considered. The presentation is accompanied by an analysis of two translations of "Panther" by R. Rilke, made by Karelsky and Elsner.

Keywords: Criterion of proximity; linguistic graph; rhythmic field; structure; symmetry.

GRIGORIEV Yuri Dmitrievich (Doctor of Technical Sciences, Professor, Saint-Petersburg Electrical University).

E-mail: yuri\_grigoriev@mail.ru

#### REFERENCES

1. Gasparov, M.L. (1963) Statistical Investigation of Russian Dolnik Trimeter. *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniya – Theory of Probability and its Applications*. 8(1). pp. 102–108. DOI: 10.1137/1108009
2. Kholshevnikov, V.E. (1968) Stikhovedenie i matematika [Prosody and mathematics]. In: Meylakh, B. (ed.) *Sodruzhestvo nauk i tayny tvorchestva* [Collaboration of Sciences and Secret of Creativity]. Moscow: Iskusstvo. pp. 384–396.
3. Mayenowa, M.R. (ed.) (1965) *Poetyka i matematyka* [Poetry and Mathematic]. Warsaw: [s.n.].
4. Levy, I. (1965) K voprosu o tochnykh metodakh analiza stikha [On exact methods of the verse analysis]. Translated from Czech. In: Mayenowa, M.R. (ed.) *Poetyka i matematyka* [Poetry and Mathematic]. Warsaw: [s.n.].
5. Nastopkene, V. (1981) Opyt issledovaniya tochnosti perevoda kolichestvennymi metodami [Experience of translation accuracy research by quantitative method]. *Literatura*. 23(2). pp. 53–70.

6. Grigoriev, Yu.D. & Martynenko, G.Ya. (2019) Combinatorics of Rhyming Variants in Sonnets by R. M. Rilke: A Quantitative and Typological Approach. *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Lingvistika i mezhkul'turnaya kommunikatsiya – NSU Vestnik. Series: Linguistics and Intercultural Communication*. 17(1). pp. 5–20. DOI: 10.25205/1818-7935-2019-17-1-5-20
7. Andreev, S.N. (2012) Tochnyy i vol'nyy perevod stikhotvornogo teksta: kolichestvennaya otsenka [Exact and free translation of the poetic text: a quantitative estimation]. *Izvestiya Smolenskogo gosudarstvennogo universiteta*. 4(20). pp. 88–95.
8. Gasparov, M.L. (1975) [The word-per-word translation and accuracy measure]. *Teoriya perevoda i nauchnye osnovy podgotovki perevodchikov* [Theory of Translation and Scientific Bases for Translators Training]. Proc. of the Conference. Moscow: Moscow State Pedagogical Institute of Foreign Languages.
9. Grigoriev, Yu.D. (2018) System harmony of poetic text translation. *Nauchnyy vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Scientific Bulletin of NSTU*. 70(1). pp. 79–102. DOI: 10.17212/1814-1196-2018-1-79-102
10. Porter, L.G. (2004) Kolichestvennyye kriterii adekvatnosti poeticheskogo perevoda [Quantitative criteria of the poetic translation adequacy]. *Mir perevoda*. 1(11). pp. 39–54.
11. Pogrebnoy, V.K. (2011) Metod integratsii strukturnykh razlichiy v grafovykh modelyakh i ego primeneniye dlya opisaniya struktur [A method of integration structural distinctions in the graph models and its application for the structures description]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta – Bulletin of Tomsk Polytechnic University*. 318(5). pp. 10–16.
12. Damer, M., Emmert-Schreib, F., Tsoy, Yu.R. & Varmusa, K. (2010) Novyy funktsional informativnosti dlya analiza struktury khi-micheskikh grafov [The new information functional for the analysis of chemical graphs structure]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta – Bulletin of Tomsk Polytechnic University*. 316(5). pp. 5–11.
13. Rilke, R.M. (1976) *Neue Gedichte und der Neuen Gedichte anderer Teil*. Frankfurt am Main: Insel Verlag.
14. Chaykovsky, R.R. & Lysenkova, E.L. (2001) *Neischerpaemost' originala: 100 perevodov "Pantery" R.M. Ril'ke na 15 yazykov* [Inexhaustibility of the Original: 100 Translations of R. M. Rilke's "Panther" into 15 Languages]. Magadan: Kordis.
15. Harary, F. (1973) *Teoriya grafov* [Graph theory]. Translated from English. Moscow: Mir.
16. Kurosh, A.G. (1965) *Kurs vysshey algebry* [Higher algebra]. Moscow: Nauka.
17. Lipsky, V. (1988) *Kombinatorika dlya programmistov* [Combinatorics for Programmers]. Moscow: Mir.
18. Kazartsev, E.V. (2017) *Sravnitel'noe stikhovedenie. Metrika i ritmika* [Comparative Prosody. Metrics and Rhythmics]. St. Petersburg: Russian State Pedagogical University.

УДК 519.95

DOI: 10.17223/19988605/49/7

**Н.А. Игнатъев, А.И. Мирзаев****ОТБОР ПРИЗНАКОВ В СОБСТВЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО ОБЪЕКТА  
НА ОСНОВЕ МЕРЫ ЕГО КОМПАКТНОСТИ**

Рассматривается использование логических закономерностей в форме гипершаров для поиска собственного признакового пространства объекта выборки из непересекающихся классов. Разработан алгоритм проверки истинности отношения связанности объектов по системе гипершаров на определяемом наборе признаков. Отношение связанности используется для вычисления значения меры компактности объекта при поиске его собственного признакового пространства.

**Ключевые слова:** отношение связанности объектов; собственное признаковое пространство; мера компактности.

Понятие «собственное пространство объекта» связано с принятием решения. Принятие решения зависит от закономерностей (как правило, скрытых), которые наиболее точно передают особенности объекта. В [1] эти особенности было предложено искать в виде логических закономерностей в окрестности объекта. Аргументом в пользу такого подхода служило отсутствие машинных алгоритмов, позволяющих производить поиск логических закономерностей за приемлемое время.

Отбор информативного набора признаков в окрестности объекта и вычисление индекса здоровья (оценки объекта) по нему рассматривался в [2]. В качестве критерия для отбора использовался поиск максимума разности частоты встречаемости представителей двух классов по системе вложенных гипершаров. Центром гипершаров являлся рассматриваемый объект.

Выбор эвристик для построения алгоритмов распознавания образов основывается на гипотезе о компактности объектов классов. Общепринятого определения меры компактности не существует [3]. Показано [4], что в метрических алгоритмах классификации компактность зависит от многообразия структур отношений между объектами классов. Различаются между собой и численные методы для количественного оценивания компактности. В одномерном случае для оценивания используются интервальные методы, в многомерном – вычисление меры компактности объектов классов и выборки в целом по заданной метрике. Общим для одномерного и многомерного случаев является наличие областей признакового пространства, в границах которых вычисляется мера компактности.

В одномерном случае на числовой оси можно производить сравнение объектов по значениям их исходных и латентных признаков, используя отношения «больше», «меньше» или «равно». При вычислении меры компактности в многомерном случае [4] применялось отношение связанности объектов по подмножеству (оболочке) граничных объектов классов по заданной метрике. Связанность объектов  $S_i$ ,  $S_j$  рассматривалась как свойство логических закономерностей в форме гипершаров, центрами которых они являлись. Объекты  $S_i$  и  $S_j$  считались связанными, если в пересечении их гипершаров были объекты оболочки.

Связанность объектов применялась для анализа кластерной структуры классов с помощью меры компактности. Для вычисления меры компактности в  $(0; 1]$  использовались число непересекающихся групп и количество объектов, в них входящих.

Отбор информативных признаков на основе методов кластеризации рассматривался в [5]. Использовалось разбиение признаков на группы, и в каждой группе выделялось по одному наиболее типичному представителю. Результаты группировки существенно зависели от вводимой меры расстояния между признаками.

В [6] в качестве критерия информативности признаков применялась функция конкурентного сходства (FRiS-функция). Среднее значение функции конкурентного сходства зависит от того, как близко группы объектов находятся от разделяющей границы. Те объекты, которые располагаются в тесном окружении своих объектов и значительно удалены от объектов других классов, имеют более высокое значение функции, чем периферийные объекты, близкие к другим классам. Отбор информативных признаков позволяет сделать прозрачным способ построения решающих правил и количественно оценить компактность классов.

При реализации алгоритмов отбора информативных наборов признаков объекта необходимо учитывать:

- наличие или отсутствие свойства инвариантности признаков к масштабам измерений;
- выбор меры близости между объектами со свойствами метрики;
- наличие шумовых объектов в выборке и способов их обнаружения;
- истинность отношения связанности объектов классов;
- выбор способа вычисления меры компактности объекта класса.

В работе определяется бинарное отношение связанности объектов одного отдельно взятого класса обучающей выборки. Это отношение используется для вычисления меры компактности объекта класса с целью отбора признаков в его собственное пространство. Мера компактности рассматривается в качестве индекса объекта по определяемому набору признаков и служит средством для поиска скрытых закономерностей в базах данных.

## 1. Постановка задачи

Одной из целей анализа кластерной структуры данных в [4] через отношение связанности объектов классов было решение задачи о минимальном покрытии обучающей выборки объектами-эталоном. Объекты каждого класса разбивались на непересекающиеся группы. Отношение связанности объектов гарантировало единственность числа групп и их состава. Поиск объектов-эталонных минимального покрытия производился по каждой группе в отдельности. Среднее число объектов выборки, притягиваемых одним эталоном, использовалось как показатель обобщающей способности алгоритма распознавания. В идеале отдельно взятый объект выборки мог быть единственным эталоном всего класса. Научный и практический интерес представляет оценка вклада объекта в обобщающую способность.

Количественная мера компактности объекта зависит от структуры его отношений с другими объектами обучающей выборки. Среди факторов, влияющих на оценку структуры, особое значение имеет размерность признакового пространства [7] и расстояния между объектами по заданной метрике  $\rho(x, y)$ . С этими факторами связано такое понятие, как «проклятие размерности пространства» [8].

Задача вычисления меры компактности объекта в рамках его собственного признакового пространства формулируется так. Считается, что задано множество объектов  $E_0 = \{S_1, \dots, S_m\}$ , разделенное на непересекающиеся классы  $K_1$  и  $K_2$ . Описание объектов производится с помощью набора из  $n$  разнотипных признаков:  $X(n) = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\xi$  из которых измеряются в интервальных шкалах,  $(n - \xi)$  – в номинальной. На множестве объектов  $E_0$  задана метрика  $\rho(x, y)$ .

Пусть  $r_d = \rho(S_d, S_u) = \min_{S_j \in K_{3-t}} \rho(S_d, S_j)$  – расстояние от  $S_d \in K_t$ ,  $t = 1, 2$ , до ближайшего (граничного) объекта  $S_u \in K_{3-t}$ ,  $\Gamma(K_t, \rho)$  – множество граничных объектов класса  $K_{3-t}$ . Обозначим через  $O(S_d, \rho) = \{S_i \in K_t | \rho(S_i, S_d) < r_d\}$  и  $Z(S_d, \rho) = \{S_i \in O(S_d, \rho) | \rho(S_i, S^*) \leq r_d\}$ ,  $S^* \in \Gamma(K_t, \rho)$ .

Объекты  $S_d, S_u \in K_t$  считаются связанными, если  $O(S_u, \rho) \cap Z(S_d, \rho) \neq \emptyset$ . Компактность объекта  $S_d \in K_t$  на наборе  $X(k) \subset X(n)$ ,  $k \leq n$ , вычисляется как

$$\theta_d(X(k)) = \left| \{S_i \in K_t | O(S_i, \rho) \cap Z(S_d, \rho) \neq \emptyset\} \right| / |K_t|. \quad (1)$$

Очевидно, что  $0 < \theta_d(X(k)) \leq 1$ , так как  $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ . Требуется найти такой набор  $X(u) \subset X(n)$ , при котором

$$\theta_d(X(u)) = \max_{X(k) \subset X(n)} \theta_d(X(k)). \quad (2)$$



Определяемый по (2) набор  $X(u)$  применяется для описания собственного признакового пространства объекта  $S_d \in K_t$ , а значение  $\theta_d(X(u))$  используется как мера его компактности.

## 2. Отбор признаков в собственное пространство объекта

При отборе набора  $X(k) \subset X(n)$ ,  $k \leq n$ , для описания признакового пространства объекта  $S \in E_0$  необходимо:

- произвести выбор метрики в качестве меры расстояния между объектами;
- задать способ нормирования значений количественных признаков для унификации масштабов измерений;
- определить наличие шумовых объектов в окрестности объекта  $S$ .

Описание допустимого объекта в рамках его собственного пространства из информативных признаков необходимо для нахождения индивидуальной меры сходства (различия) с другими объектами. Эта мера должна отражать отношения между объектами и служить средством для принятия решения.

Обозначим через  $i, j$  – множество индексов соответственно количественных и номинальных признаков в наборе  $X(n)$ . Для унификации масштабов измерений значения количественных признаков дробно-линейным преобразованием отобразим в  $[0; 1]$ . В качестве меры расстояния между объектами  $S_u, S_v \in E_0$  ( $S_c = (a_{c1}, \dots, a_{cn})$ ,  $c = 1, \dots, m$ ) будем использовать метрику Журавлёва

$$\rho(S_u, S_v) = \sum_{i \in I} |a_{ui} - a_{vi}| + \sum_{i \in J} \begin{cases} 1, a_{ui} \neq a_{vi}, \\ 0, a_{ui} = a_{vi}. \end{cases}$$

Для выбора информативного набора признаков  $X(r) \subset X(n)$ ,  $r \leq n$ , из собственного пространства объекта предлагается производить предобработку данных. Смысл предобработки заключается в поиске первой пары признаков  $(x_i, x_j) \subset X(n)$ ,  $i \neq j$ , для информативного набора.

Множество расстояний объектов  $E_0$  от  $S_d \in K_t$  по паре  $(x_i, x_j)$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  рассматривается как радиусы вложенных гипершаров, представленных в виде упорядоченной последовательности

$$\rho(S_d, S_{d_1}), \dots, \rho(S_d, S_{d_\mu}), \dots, \rho(S_d, S_{d_m}), S_d = S_{d_1}, \quad (3)$$

где  $\mu = |K_t|$ . Обозначим через  $\eta_t(i, j)$  ( $\eta_{3-t}(i, j)$ ) число ближайших к  $S_d$  объектов по (3) из  $K_t$  ( $K_{3-t}$ ) при условии, что  $\eta_t(i, j) + \eta_{3-t}(i, j) = \mu$ . При  $\eta_{3-t}(i, j) = 0$  все объекты класса  $K_t$  содержатся в гипершаре с центром в  $S_d$ . С помощью значения  $\eta_t(i, j)$  решается проблема выбора первого шага при отборе собственного пространства объекта.

В процессе предобработки необходимо исключить появление сходных с  $S_d \in K_t$  описаний объектов из  $K_{3-t}$ . Плотность распределения представителей класса  $K_t$  в окрестности объекта  $S_d$  по наборам из  $\{(x_i, x_j)\}$  предлагается определять по значениям

$$\theta_{ij} = \max_{1 \leq u \leq \eta_t(i, j)} (z_t(u) - z_{3-t}(u)), \gamma_{ij} = \arg \max_{1 \leq u \leq \eta_t(i, j)} (z_t(u) - z_{3-t}(u)), \quad (4)$$

где  $z_t(u)$  ( $z_{3-t}(u)$ ) – число объектов класса  $K_t$  ( $K_{3-t}$ ) в гипершаре радиуса  $\rho(S_d, S_{d_u})$  из последовательности (3).

Пусть  $\rho(S_d, S_{d_k})$ ,  $k \geq 2$  – значение радиуса гипершара из (3), определяемого по расстоянию до первого ближайшего объекта  $S_{d_k} \in K_{3-t}$ . Для выбора первой пары признаков в  $X(r) \subset X(n)$ ,  $r \leq n$ , из множества наборов  $\{(x_i, x_j)\}$  используется матрица  $B(S_d) = \{b_{ij}\}_{n \times n}$ , значения элементов которой вычисляются как

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, \rho(S_d, S_{d_k}) = 0, \\ \left[ |O(S_d, \rho)| \times \theta_{ij} / \gamma_{ij}, \rho(S_d, S_{d_k}) > 0. \end{cases} \quad (5)$$

Целью вычисления значений  $b_{ij} \neq 0$  является поиск кластеров данных с максимальной плотностью объектов одного с  $S_d \in K_t$  класса.

Существует зависимость количества связанных с  $S_d \in K_t$  объектов для вычисления (2) от наличия или отсутствия шумовых объектов. Шумовые объекты из  $K_{3-t}$  по  $X(p)$ ,  $p \leq n$ , и метрике  $\rho(x, y)$  для объекта  $S_d \in K_t$  предлагается определять следующим образом.

Пусть  $\Gamma(p)$  – множество граничных объектов классов по  $X(p) \subset X(n)$ ,  $p \leq n$ , и метрике  $\rho(x, y)$ ,  $G(p) = \{g_i\}_{S_i \in \Gamma(p)}$ , где  $g_i = \left| \left\{ S_j \in K_{3-c} \mid \rho(S_j, S_i) = \min_{S_r \in K_c} \rho(S_j, S_r) \right\} \right|$  – число объектов, для которых  $S_i \in K_c \cap \Gamma(p)$ ,  $c = 1, 2$ , является граничным. Объект  $S_i \in K_{3-t} \cap \Gamma(p)$ ,  $t = 1, 2$ , считается шумовым относительно объекта  $S_d \in K_t$  если:

$$1) \rho(S_d, S_i) = \min_{S_r \in K_{3-t}} \rho(S_d, S_r);$$

$$2) g_i/|K_t| > |O(S_i, \rho)|/|K_{3-t}|.$$

Результаты предобработки с использованием (3), (4) в виде пары признаков  $H(2) = (x_i, x_j)$  рассматриваются в качестве начального приближения эвристического алгоритма пошагового отбора информативных признаков объекта  $S_d \in K_t$ . Последовательность шагов по реализации алгоритма такова.

Шаг 1. Ввод  $H(2)$ .  $p = 2$ .  $X(p) = H(2)$ .  $count = 0$ .  $T = 0$ .

Шаг 2. По набору  $X(p)$  вычислить множество граничных объектов  $\Gamma(p)$  и  $G(p) = \{g_i\}_{S_i \in \Gamma(p)}$ .

Шаг 3. Определить объект  $S_c \in K_{3-t} \cap \Gamma(p)$  с  $\rho(S_c, S_d) = \min_{S_r \in K_{3-t} \cap \Gamma(p)} \rho(S_d, S_r)$ . Если  $g_c/|K_t| > |O(S_c, \rho)|/|K_{3-t}|$ ,

то обновить множество граничных объектов  $\Gamma(p)$  по  $X(p)$  на  $E_0 \setminus \{S_c\}$ .

Шаг 4. Вычислить значения элементов множества  $Z(S_d, \rho)$  и  $\theta_d(X(p))$  по (1). Если  $\theta_d(X(p)) > T$ , то  $T = \theta_d(X(p))$ ,  $H(p) = X(p)$ ,  $u = p$ . Если  $T = 1$ , то идти 7.

Шаг 5.  $count = count + 1$ . Если  $count = n$ , то идти 7.

Шаг 6.  $R = 0$ .  $v = 0$ . **Начало цикла:** Для всех  $x_a \in X(n) \setminus X(p)$  вычислять значения  $\theta_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$  по (3) и (4) на  $X(p+1) = X(p) \cup \{x_a\}$ . Если  $|O(S_d, \rho)| \times \theta_{ij}/\gamma_{ij} > R$ , то  $R = |O(S_d, \rho)| \times \theta_{ij}/\gamma_{ij}$ ,  $v = a$ . **Конец цикла.**  $X(p+1) = X(p) \cup \{x_v\}$ .  $p = p + 1$ . Идти 2.

Шаг 7. Вывод  $T$ ,  $H(u)$ .

Шаг 8. Конец.

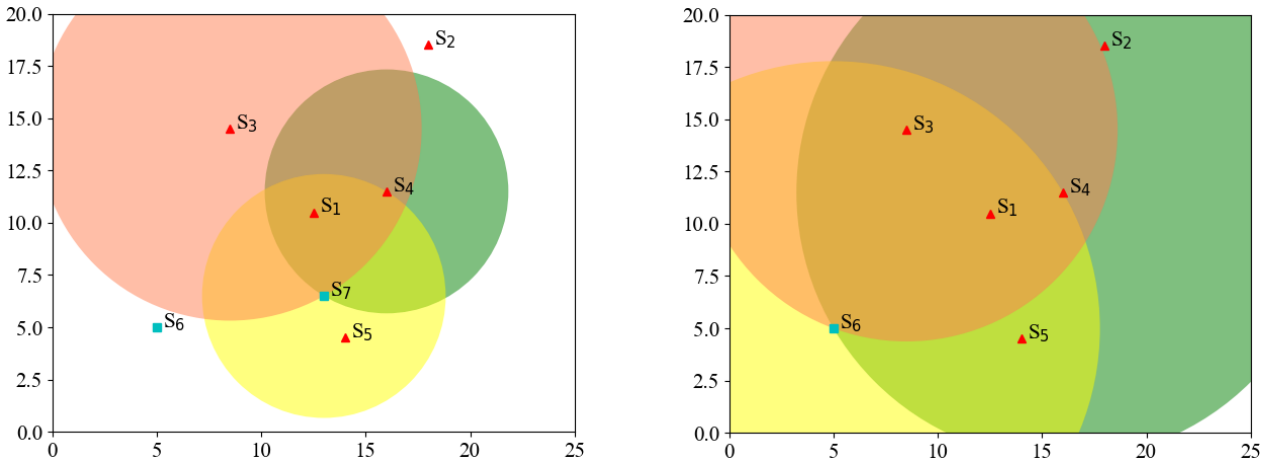


Рис. 1. Иллюстрация процесса выбора связанных объектов для  $S_4$  до и после удаления шумового объекта  $S_7$   
 Fig. 1. Illustration of the process of selecting connected objects for  $S_4$  before and after removing the  $S_7$  noise object

Процесс выбора связанных объектов для вычисления меры компактности (1) до и после удаления шумового объекта показан на рис. 1.

### 3. Вычислительный эксперимент

Для эксперимента была взята выборка данных German из [9]. Выборка представлена 1 000 объектами, разделенными на два класса  $K_1$  и  $K_2$ . Каждый объект рассматривается как кредитная история

клиента банка. Кредитная история описывается 20 признаками, 7 из которых измеряются в количественных шкалах, 13 – в номинальных. В табл. 1 и 2 представлена последовательность отбора признаков в собственное пространство для объектов  $S_{907} \in K_1$  и  $S_8 \in K_2$  алгоритмом из разд. 2. Количество объектов в гипершаре и связанных получено после удаления шумовых объектов.

Таблица 1

Отбор признаков в собственное пространство объекта  $S_{907} \in K_1$

Набор признаков	Количество объектов		Значение (1)
	в гипершаре	связанных	
$x_9, x_{20}$	23	23	0,0000
$x_5, x_9, x_{20}$	32	31	0,0443
$x_5, x_6, x_9, x_{20}$	63	58	0,0829
$x_5, x_6, x_9, x_{14}, x_{20}$	55	54	0,0771
$x_5, x_6, x_9, x_{12}, x_{14}, x_{20}$	59	90	0,1286
$x_5, x_6, x_9, x_{12}, x_{14}, x_{16}, x_{20}$	49	85	0,1214
$x_5, x_6, x_9, x_{11}, x_{12}, x_{14}, x_{16}, x_{20}$	77	96	0,1371
$x_2, x_5, x_6, x_9, x_{11}, x_{12}, x_{14}, x_{16}, x_{20}$	72	91	0,1300
$x_2, x_5, x_6, x_9, x_{11}, x_{12}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{20}$	63	101	0,1443

На наборе  $x_9, x_{20}$  (см. табл. 1) значение (1) равно 0, так как существует объект из  $K_1$ , описание которого совпадает (пересекается) с описанием ближайшего к  $S_{907} \in K_1$  объекта из  $K_2$ .

Таблица 2

Отбор признаков в собственное пространство объекта  $S_8 \in K_2$

Набор признаков	Количество объектов		Значение (1)
	в гипершаре	связанных	
$x_8, x_{13}$	7	16	0,0000
$x_4, x_8, x_{13}$	16	23	0,0000
$x_4, x_8, x_{13}, x_{14}$	16	24	0,0000
$x_4, x_8, x_{13}, x_{14}, x_{18}$	18	19	0,0000
$x_4, x_8, x_{11}, x_{13}, x_{14}, x_{18}$	37	41	0,0586
$x_4, x_5, x_8, x_{11}, x_{13}, x_{14}, x_{18}$	42	48	0,0686

Как видно из табл. 1 и 2 количество связанных объектов может быть больше, меньше или равно количеству объектов в гипершаре. Собственные наборы признаков для восьми случайно выбранных объектов из классов  $K_1$  и  $K_2$  приведены в табл. 3.

Таблица 3

Результаты отбора признаков в собственное пространство восьми объектов из классов  $K_1$  и  $K_2$

Номер объекта (класс)	Набор признаков	Значение (1)
310 (1)	$x_5, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{14}, x_{18}, x_{20}$	0,0400
325 (1)	$x_1, x_5, x_{12}$	0,0871
460 (1)	$x_1, x_2, x_5, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{18}, x_{19}, x_{20}$	0,1171
826 (1)	$x_2, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20}$	0,0771
38 (2)	$x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_{16}, x_{17}$	0,0167
125 (2)	$x_1, x_5, x_{11}, x_{19}$	0,0167
707 (2)	$x_2, x_3, x_5, x_6, x_{10}, x_{12}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{18}, x_{19}, x_{20}$	0,0300
827 (2)	$x_1, x_2, x_5, x_6, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{17}, x_{18}, x_{20}$	0,0267

Как видно из табл. 3, свойством собственного пространства объектов класса  $K_2$  (плохие клиенты) является относительно низкое значение компактности по отношению связанности объектов (см. значение (1)) по сравнению с  $K_1$  (хорошие клиенты).

Для сравнительного анализа рассмотрим формирование собственного признакового пространства объектов из табл. 3 по критерию из [10]. Устойчивость объекта  $S_d \in K_t$  по (3) на наборе  $X(k) \subset X(n)$  вычисляется как значение функционала

$$F(S_d, X(k)) = \max_{1 \leq i \leq m} \left( \frac{z_i(i)}{|K_t|} - \frac{z_{3-i}(i)}{|K_{3-i}|} \right), \quad (6)$$

где  $z_t(i)$ ,  $z_{3-t}(i)$  – число объектов в  $\{S_{d_1}, \dots, S_{d_t}\} \subset E_0$ , определяемых по (3), соответственно из классов  $K_t$  и  $K_{3-t}$ . Множество допустимых значений (6) принадлежит интервалу  $(0; 1]$ . Условием для поиска набора информативных признаков  $X(\mu)$ ,  $\mu \leq n$ , для  $S_d \in K_t$  является

$$F(S_d, X(\mu)) = \max_{1 \leq k \leq n} \max_{\{X(k)\}} F(S_d, X(k)). \quad (7)$$

Выбор первой пары признаков в  $X(2)$  из  $\{(x_i, x_j)\}_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$  производится по (7). Процесс отбора реализован в виде последовательного (пошагового) добавления признаков в  $X(\mu)$ ,  $\mu = 2, 3, \dots$ . Существенным отличием отбора информативных признаков для  $S_d \in K_t$  по (7) от (1) является «безразличие» к наличию шумовых объектов из класса  $K_{3-t}$ . Информативные наборы признаков, получаемые по экстремуму (7), приведены в табл. 4.

Таблица 4

Информативные наборы признаков объектов по критерию (7)

Номер объекта (класс)	Набор признаков	Значение (7)
310 (1)	$x_2, x_5, x_{14}$	0,2238
325 (1)	$x_1, x_3, x_5$	0,3819
460 (1)	$x_1, x_2, x_5, x_{14}, x_{16}$	0,3571
826 (1)	$x_3, x_5, x_9, x_{19}$	0,2481
38 (2)	$x_6, x_{10}, x_{13}, x_{16}, x_{20}$	0,2090
125 (2)	$x_1, x_2, x_7, x_{15}, x_{20}$	0,2143
707 (2)	$x_2, x_4, x_{20}$	0,2338
827 (2)	$x_1, x_{13}, x_{14}, x_{16}, x_{20}$	0,3014

Относительно малое различие между оценками по (7) из разных классов (см. табл. 4) объясняется отсутствием учета наличия шумовых объектов и непустого множества объектов из  $K_1$  и  $K_2$ , описания которых на определяемом наборе признаков  $X(u) \subset X(n)$  совпадают.

### Заключение

Разработан метод отбора признаков в собственное пространство объекта на основе отношения связанности объектов по системе гипершаров. Отношение связанности применяется для вычисления меры компактности объекта относительно своего класса в определяемом подпространстве заданного признакового пространства. Метод может быть использован для поиска скрытых закономерностей в данных в рамках информационных моделей из слабо формализованных предметных областей.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Дюк В.А. Методология поиска логических закономерностей в предметной области с нечеткой системологией: на примере клинично-экспериментальных исследований : дис. ... д-ра техн. наук. СПб., 2005. 309 с.
2. Ignat'ev N.A., Mirzaev A.I. The Intelligent Health Index Calculation System // Pattern Recognition and Image Analysis. 2016. V. 26, No. 1. P. 73–77.
3. Загоруйко Н.Г., Борисова И.А., Дюбанов В.В., Кутненко О.А. Количественная мера компактности и сходства в конкурентном пространстве // Сибирский журнал индустриальной математики. 2010. Т. 13, № 1 (41). С. 59–71.
4. Ignatyev N.A. Structure Choice for Relations between Objects in Metric Classification Algorithms // Pattern Recognition and Image Analysis. 2018. V. 28, No. 4. P. 590–597.
5. Колесникова С.И. Методы анализа информативности разнотипных признаков // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 1 (6). С. 69–80.
6. Загоруйко Н.Г., Кутненко О.А., Борисова И.А., Дюбанов В.В., Леванов Д.А., Зырянов О.А. Выбор информативных признаков для диагностики заболеваний по генетическим данным // Вавиловский журнал генетики и селекции. 2014. Т. 18, No. 4/2. С. 898–903.
7. Айвазян С.А., Бухштабер В.М., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности. М. : Финансы и статистика, 1989. 607 с.
8. Гудфеллоу Я., Бенджио И., Курвилль А. Глубокое обучение : пер. с англ. М. : ДМК Пресс, 2018. 652 с.
9. The UCI Machine Learning Repository. URL: <http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets> (accessed: 09.04.2019).
10. Игнатьев Н.А. Индексирование объектов по индивидуальным наборам информативных признаков // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 4 (37). С. 27–35.

Ignatyev A.N., Mirzaev A.I. (2019) SELECTION OF FEATURES INTO THE OBJECT'S OWN SPACE BASED ON THE MEASURE OF ITS COMPACTNESS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 49. pp. 55–62

DOI: 10.17223/19988605/49/7

Considered using of logical regularities in the form of hyper-sphere for the selection of feature into the own space of the object from sample  $E_0 = \{S_1, \dots, S_m\}$ . Sample divided into of disjoint subset (classes)  $K_1$  and  $K_2$ . The objects are described by means of the set of  $n$  diverse features  $X(n) = (x_1, \dots, x_n)$ . On the set  $E_0$ , the metric  $\rho(x, y)$  is given.

Let  $r_d = \rho(S_d, S_u) = \min_{S_j \in K_{3-t}} \rho(S_d, S_j)$  be the distance from  $S_d \in K_t$ ,  $t = 1, 2$  to the nearest (boundary) object  $S_u \in K_{3-t}$ ,  $\Gamma(K_t, \rho)$  be the set of boundary objects of the class  $K_{3-t}$ . Denote by  $O(S_d, \rho) = \{S_i \in K_t | \rho(S_i, S_d) < r_d\}$  and  $Z(S_d, \rho) = \{S_i \in O(S_d, \rho) | \rho(S_i, S^*) \leq r_d\}$ ,  $S^* \in \Gamma(K_t, \rho)$ . The objects  $S_d, S_u \in K_t$  are considered to be connected if  $O(S_u, \rho) \cap Z(S_d, \rho) \neq \emptyset$ . The compactness of the object  $S_d \in K_t$  on the set  $X(k) \subset X(n)$ ,  $k \leq n$  is calculated as

$$\theta_d(X(k)) = \left| \left\{ S_i \in K_t \mid O(S_i, \rho) \cap Z(S_d, \rho) \neq \emptyset \right\} \right| / |K_t|.$$

The object  $S_i \in K_{3-t} \cap \Gamma(\rho)$ ,  $t = 1, 2$  is called noise relative to the object  $S_d \in K_t$  if:

$$1. \rho(S_d, S_i) = \min_{S_r \in K_{3-t}} \rho(S_d, S_r);$$

$$2. g_i / |K_t| > |O(S_i, \rho)| / |K_{3-t}|, \quad g_i = \left| \left\{ S_j \in K_t \mid \rho(S_j, S_i) = \min_{S_r \in K_{3-t}} \rho(S_j, S_r) \right\} \right|$$

is the number of objects, where  $S_i \in K_{3-t} \cap \Gamma(\rho)$  is the nearest

one. The set  $X(u) \subset X(n)$ , computed on  $E_0 \setminus \{S_i\}$  as  $\theta_d(X(u)) = \max_{X(k) \subset X(n)} \theta_d(X(k))$  is considered informative for the object  $S_d \in K_t$ , and the value of  $\theta_d(X(u))$  is considered as a measure of its compactness.

To implement the algorithm of step by step selection of features into an informative set, data preprocessing is performed. The purpose of preprocessing is to select the first pair  $(x_i, x_j)$  into an informative set based on the proposed criterion. The criterion is used to search for a cluster of data with a maximum density of descriptions of objects of one with  $S_d$  class  $K_t$  by sets of  $\{(x_i, x_j)\}$ .

The results of the computational experiment are described according to 1 000 bank customers. Customers are divided into 700 good and 300 bad customers. From the results of the experiment, it was concluded that the measure of compactness among good customers is higher than that of bad ones.

Keywords: relation of connectedness of objects; object's own space; measure of compactness.

IGNATEV Nikolay Aleksandrovich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan).

E-mail: ignatev@rambler.ru

MIRZAEV Aziz Ibrakhimovich (National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan).

E-mail: mirzaevaziz@gmail.com

## REFERENCES

1. Dyuk, V.A. (2005) *Metodologiya poiska logicheskikh zakonomernostey v predmetnoy oblasti s nechetkoy sistemologiyey: na primere kliniko-eksperimental'nykh issledovaniy* [Methodology of the search for logical patterns in the subject area with fuzzy systemology: clinical and experimental studies]. Engineering Dr. Diss. St. Petersburg.
2. Ignatiev, N.A. & Mirzaev, A.I. (2016) The Intelligent Health Index Calculation System. *Pattern Recognition and Image Analysis*. 26(1). pp. 73–77. DOI: 10.1134/S1054661816010089
3. Zagoruiko, N.G., Borisova, I.A., Dyubonov, V.V. & Kutnenko, O.A. (2010) A quantitative measure of compactness and similarity in the competitive space. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki – Siberian Journal of Industrial Mathematics*. 1(41). pp. 59–71.
4. Ignatyev, N.A. (2018) Structure Choice for Relations between Objects in Metric Classification Algorithms. *Pattern Recognition and Image Analysis*. 28(4). pp. 590–597. DOI: 10.1134/S1054661818040132
5. Kolesnikova, S.I. (2009) Methods for analyzing the informativeness of various types of features. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(6). pp. 69–80.
6. Zagoruiko, N.G., Kutnenko, O.A., Borisova, I.A., Dyubonov, V.V., Levanov, D.A. & Zyryanov, O.A. (2014) Feature selection in for medical diagnostics on microarray data. *Vavilovskiy zhurnal genetiki i selektsii – Vavilov Journal of Genetics and Breeding*. 18(4/2). pp. 898–903.

7. Ayzvazyan, S.A., Buchstaber, V.M., Enyukov, I.S. & Meshalkin, L.D. (1989) *Prikladnaya statistika. Klassifikatsiya i snizhenie razmernosti* [Application statistics. Classification and reduction of dimension]. Moscow: Finansy i statistika.
8. Goodfellow, I., Bengio, Y. & Courville, A. (2016) *Deep Learning*. Cambridge: MIT Press.
9. UCI. (n.d.) [Online] Available from: <http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets>. (Accessed: 9th April 2019).
10. Ignatiev, N.A. (2016) Indexation of objects according to individual sets of informative feature. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(37). pp. 27–35. DOI: 10.17223/19988605/37/3

УДК 681.5.015

DOI: 10.17223/19988605/49/8

**М.А. Новосельцева, С.Г. Гутова, Е.С. Каган, Д.М. Бородулин****СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ  
РОТОРНО-ПУЛЬСАЦИОННОГО АППАРАТА**

Рассматривается задача структурно-параметрической идентификации модели, описывающей технологический процесс с применением роторно-пульсационного аппарата. Для построения модели технологического процесса используется аппарат теории непрерывных дробей. Показано, что экспериментальные данные процесса аппроксимируются разгонной характеристикой апериодического звена первого порядка с переменными коэффициентами.

**Ключевые слова:** структурно-параметрическая идентификация; непрерывная дробь; передаточная функция; технологический процесс; роторно-пульсационный аппарат.

Проблема идентификации моделей динамических объектов и технологических процессов является одной из актуальных в современной мировой науке и практике [1–16]. Математические модели используются практически во всех отраслях современной промышленности, и именно с их применением связаны успехи систем автоматизации действующих производств. Не является исключением и пивоваренная индустрия, которая за последние десятилетия осуществила прирост производственных мощностей. Начало XXI в. ознаменовано стремительным техническим развитием отечественной пивоваренной отрасли, направленным на увеличение объемов производства пива, расширение его ассортимента и повышение качества. В пивоварении технологический процесс охмеления пивного сусле играет важную роль. В процессе охмеления происходит ряд технологических явлений, таких как экстрагирование и изомеризация горьких веществ хмеля, придание хмелевой горечи, ароматизация пивного сусле и т.д. Применяемые в промышленности способы охмеления пивного сусле не дают достаточно полного и эффективного выхода экстрактивных веществ, специфических компонентов хмеля. Поэтому в последнее время в российской промышленности одним из наиболее перспективных способов интенсификации процесса охмеления пивного сусле является использование роторно-пульсационных аппаратов (РПА) [17–22], которые позволяют максимально извлекать горькие вещества из хмеля.

Для изучения закономерностей влияния технических и технологических характеристик РПА на процесс охмеления пивного сусле представляется актуальным проведение математического моделирования этого технологического процесса. Первые попытки моделирования процессов на выходе РПА были осуществлены на основе регрессионных моделей планирования эксперимента [23], однако для их построения необходим большой объем экспериментальных данных, что не всегда является практически реализуемым. Также имеется ряд исследований по определению влияния гидромеханических и акустических явлений в РПА на характеристики получаемого продукта [17–19]. В работах [20–22] проводится численное моделирование процессов растворения в данных аппаратах. Однако на сегодняшний день вопрос моделирования динамических процессов в РПА остается открытым.

В связи с этим представляется актуальным использование альтернативных методов моделирования данного технологического процесса. Одним из таковых является кибернетический подход к анализу РПА. В работе на основе алгоритмического аппарата непрерывных дробей будет рассмотрена структурно-параметрическая идентификация, позволяющая построить динамическую модель получения хмелевого экстракта в условиях отсутствия априорной информации и при минимальном объеме экспериментальных данных.

## 1. Постановка задачи структурно-параметрической идентификации динамического объекта

Априорная неопределенность и меняющиеся условия функционирования динамических объектов являются характерной чертой научных исследований, что значительно затрудняет применение большого количества существующих методов идентификации [1–17], в которых восстановление структуры модели является неочевидным процессом и приводит к перебору пробных моделей на основе субъективного экспертного подхода. Поэтому с целью принятия научно обоснованных технических решений становится актуальным использование методов структурно-параметрической идентификации.

Линейный динамический объект описывается непрерывной передаточной функцией (НПФ)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \quad (1)$$

где  $s$  – переменная преобразования Лапласа [3]. Известно также модальное представление НПФ объекта [3, 24]:

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - s_i^0)}{\prod_{i=1}^n (s - s_i)}, \quad (2)$$

где  $K = b_m/a_n$ ,  $s_1^0, s_2^0, \dots, s_m^0$  – нули НПФ,  $s_1, s_2, \dots, s_n$  – полюсы НПФ.

Использование современных систем управления и новейших информационных технологий приводит к цифровым процессам получения и обработки информации, поэтому входное  $x(t)$  и выходное  $y(t)$  воздействия объекта могут быть представлены результатами измерений с некоторым временным шагом  $\Delta$ :  $x[0] = x(0\Delta)$ ,  $x[1] = x(1\Delta)$ ,  $x[2] = x(2\Delta)$ , ...  $y[0] = y(0\Delta)$ ,  $y[1] = y(1\Delta)$ ,  $y[2] = y(2\Delta)$ ... Тогда модель динамического объекта в цифровой форме с использованием преобразования  $z = e^{s\Delta}$  [24] имеет вид:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_m z^{-m} + \dots + b_1 z^{-1} + b_0}{a_n z^{-n} + \dots + a_1 z^{-1} + 1}, \quad (3)$$

где  $G(z)$  – дискретная передаточная функция (ДПФ) динамического объекта [24, 25],  $X(z)$ ,  $Y(z)$  –  $z$ -преобразования числовых последовательностей значений входного и выходного воздействий. Дискретную модель объекта можно представить и в форме конечно-разностного уравнения

$$y(n\Delta t) = \sum_{i=0}^m b_i x[n-i] - \sum_{i=1}^n a_i y[n-i]. \quad (4)$$

Таким образом, задачей структурно-параметрической идентификации динамического объекта является построение моделей вида (1)–(4) по результатам измерений входного и выходного воздействий с шагом дискретизации  $\Delta$ .

## 2. Структурно-параметрическая идентификация динамического объекта на основе теории непрерывных дробей

В последние десятилетия аппарат непрерывных дробей достаточно активно развивается в области фундаментальных исследований их свойств [26–28]. Однако вопросу использования непрерывных дробей в прикладных исследованиях отводится очень малая роль.

Ранее в авторских работах [24, 25, 29] теория непрерывных дробей была успешно использована для решения широкого спектра прикладных задач. Таковыми являлись задачи структурно-параметрической идентификации моделей различных динамических объектов, анализа свойств и характеристик детерминированных, периодических и стохастических процессов, оценки риска объектов и систем и т.д.

Для построения модели объекта поместим результаты измерений входного и выходного воздействий в строки № 0 и № 1 матрицы-идентификатора (5):



	столбец № 0	столбец № 1	столбец № 2	столбец № 3	...
строка № 0	$x[0]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	...
строка № 1	$y[0]$	$y[1]$	$y[2]$	$y[3]$	...
строка № 2	$a_{20}$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	...
строка № 3	$a_{30}$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	...
...	...	...	...	...	...

Остальные элементы матрицы-идентификатора находятся по формулам

$$a_{m,k} = a_{m-2,k+1}/a_{m-2,0} - a_{m-1,k+1}/a_{m-1,0}, \quad (6)$$

$$a_{0,k} = x[k], a_{1,k} = y[k], k = 0, 1, 2, \dots$$

Расчет матрицы-идентификатора прекращается при появлении строки с нулевыми элементами. Данный факт является критерием останова вычислительной процедуры по формуле (6). Элементы столбца № 0 матрицы (5) образуют непрерывную правильную  $C$ -дробь [24, 25], аппроксимирующую ДПФ динамического объекта:

$$G(z) = \frac{a_{10}/a_{00}}{1 + \frac{a_{20}z^{-1}}{1 + \frac{a_{30}z^{-1}}{1 + \dots}}} \quad (7)$$

В случае  $y[0] = 0$  строка № 1 матрицы сдвигается на один элемент влево. Отрицательная степень переменной  $z$  для данной строки увеличивается на единицу.

Затем непрерывную дробь (7) сворачивают в дробно-рациональное выражение, аналогичное (3), и определяют ее нули и полюсы. Для восстановления модели объекта в форме НПФ (2) требуется использовать соотношение

$$s = (\ln|z| + i \arg z) / \Delta. \quad (8)$$

При усложнении объекта у ДПФ могут появляться дополнительные нули и полюсы [24, 25], которые отсутствуют в НПФ. Это отрицательные или равные нулю корни числителя и знаменателя (7). Дополнительные нули и полюсы по формуле (8) в  $s$ -плоскость не переводятся [24, 25].

Далее находят коэффициент  $K$  согласно теореме о конечном значении [3] основных свойств  $z$ -преобразования:

$$\lim_{z \rightarrow 1} G(z) = K. \quad (9)$$

**Пример.** В качестве иллюстрации работы метода структурно-параметрической идентификации рассмотрим апериодический объект 1-го порядка. Его НПФ имеет вид [3]:

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}, \quad (10)$$

где  $T$  – постоянная времени,  $K$  – коэффициент усиления. Реакция объекта на единичное ступенчатое воздействие описывается разгонной характеристикой  $h(t)$  вида:

$$h(t) = K(1 - e^{-t/T}). \quad (11)$$

Зададим некоторый шаг дискретизации  $\Delta$  и заполним матрицу-идентификатор:

1	1	1	...
$K(1 - e^{-\Delta/T})$	$K(1 - e^{-2\Delta/T})$	$K(1 - e^{-3\Delta/T})$	...
$a_{20}$	$a_{21}$	$a_{22}$	...
0	0	0	...

Строка № 0 определяется значениями входного единичного ступенчатого воздействия. Элементы строки № 1 – значения разгонной характеристики (11), рассчитанные с шагом дискретизации  $\Delta$ . Элементы строки № 1 сдвинуты на один столбец влево. Элементы строки № 2 рассчитаны по формуле (6):

$$a_{2k} = a_{0,k+1}/a_{00} - a_{1,k+1}/a_{10} = -e^{-\Delta/T} \cdot (1 - e^{-(k+1)\Delta/T}) / (1 - e^{-\Delta/T}),$$

причем

$$a_{20} = -e^{-\Delta/T}.$$

Элементы строки № 3 равны  $a_{3k} = 0$ . Появление строки с нулевыми значениями определяет ДПФ объекта:

$$G(z) = \frac{a_{01}/a_{00} \cdot z^{-1}}{1 + a_{20}z^{-1}} = \frac{K(1 - e^{-\Delta/T})z^{-1}}{1 - e^{-\Delta/T}z^{-1}}. \quad (13)$$

В ДПФ (13) нулей нет, полюс равен

$$z_1 = e^{-\Delta/T},$$

что при переходе в  $s$ -плоскость дает

$$s_1 = -1/T.$$

Последний результат совпадает с полюсом объекта (10). Тогда модель динамического объекта (10) имеет вид:

$$G(s) = k \frac{1}{s + 1/T} = \frac{kT}{Ts + 1}.$$

Для определения коэффициента передачи  $kT$  воспользуемся формулой (9) и получим

$$\lim_{z \rightarrow 1} G(z) = K.$$

Дискретная модель разгонной характеристики принимает вид:

$$h[n] = e^{-\Delta/T} \cdot h[n-1] + K(1 - e^{-\Delta/T}) \cdot x[n-1]. \quad (14)$$

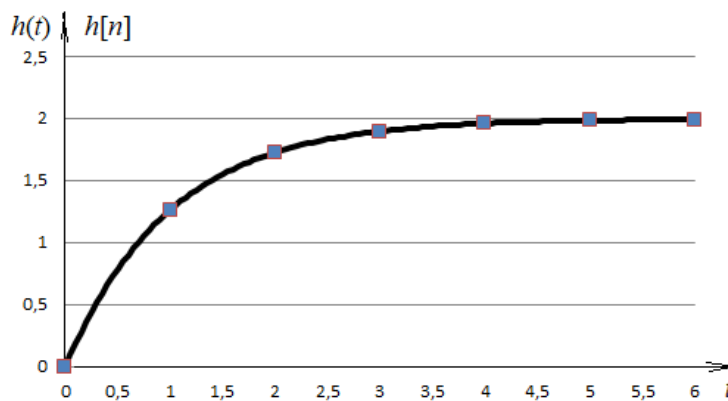


Рис. 1. Разгонная характеристика (11) и значения ее дискретной модели (14) (сплошная черная линия – график непрерывной разгонной характеристики, синие квадраты – значения дискретной модели)

Fig. 1. Overclocking characteristic (11) and values of its discrete model (14) (solid black line – graph of continuous acceleration characteristics, blue squares-values of discrete model)

На рис. 1 для сравнительного анализа приведены графики значений разгонной характеристики (11) и ее дискретной модели (14) для  $\Delta = 1$ ,  $K = 2$ ,  $T = 1$ . Очевидно, что дискретная модель точно оценивает значения истинной разгонной характеристики объекта и может быть использована для оценки состояния процесса на выходе объекта. Таким образом, на основе цифровых отсчетов входного и выходного воздействий аperiodического звена 1-го порядка с использованием метода структурно-параметрической идентификации были определены структура и параметры модели объекта (10).

### 3. Структурно-параметрическая идентификация модели технологического процесса получения хмелевого экстракта

Разработка математической модели, описывающей технологический процесс получения хмелевого экстракта на выходе РПА, является актуальной задачей для пивоваренных отраслей промыш-

ленности, поскольку дает возможность определить необходимые технологические параметры работы (температура, частота вращения ротора), которые позволят максимально улучшить показатели по выходу экстракта. Осуществим структурно-параметрическую идентификацию этого процесса с использованием описанного выше метода.

Входным воздействием на РПА является количественное соотношение неохмеленного сусла и гранулированного хмеля  $F$ . Воздействие на выходе РПА – показатель эффективности процесса – содержание изогумуллона в хмелевом экстракте (в мг/л). Техническими и технологическими параметрами, влияющими на процесс охмеления пивного сусла хмелевыми экстрактами, являются температура перерабатываемой среды  $t$  (°C), частота вращения ротора  $n$  (об/мин) и величина зазора между ротором и статором, измеряемая в миллиметрах. С помощью лабораторных исследований экспертами было установлено, что при величине зазора между ротором и статором, равной 0,3 мм, наблюдается лучший выход изогумуллона в хмелевом экстракте. Поэтому при проведении дальнейших расчетов будет использоваться именно это значение зазора.

Зафиксируем значения параметров  $t = 55^\circ\text{C}$ ,  $n = 2\,500$  об/мин. Экспертами были предоставлены значения разгонной характеристики<sup>1</sup> по содержанию изогумуллона, измеренные с шагом  $\Delta = 1$  мин, в качестве входного воздействия было взято постоянное соотношение неохмеленного сусла и гранулированного хмеля, равное 8 мг/л.

Рассчитаем матрицу-идентификатор, в которой строка № 0 занята значениями входного воздействия, а строка № 1 – значениями разгонной характеристики:

8	8	8	8	8
18,82	20,06	22,33	22,38	22,40
-0,065887	-0,186504	-0,189161	-0,190223	...
-1,764758	-1,684464	-1,190223	...	...
1,876144	1,908832	...	...	...

В строке № 1 осуществлен сдвиг на один столбец влево, так как значение разгонной характеристики в начальный момент времени равно 0. Значения последующих строк рассчитаны по формуле (6). Строка матрицы № 5 может считаться равной нулю с точностью проведенных измерений.

Элементы столбца № 0 порождают непрерывную дробь вида:

$$G(z) = \frac{\frac{18,82}{8} z^{-1}}{1 - \frac{0,065887 z^{-1}}{1 - \frac{1,764758 z^{-1}}{1 + 1,876144 z^{-1}}}}$$

Сворачивая полученную непрерывную дробь, получим дробно-рациональное выражение для ДПФ объекта

$$G(z) = \frac{2,3525 z^{-1} + 0,262035 z^{-2}}{1 + 0,045499 z^{-1} - 0,123614 z^{-2}} \quad (15)$$

В  $s$ -плоскость переводится только один полюс  $-z_1 = 0,329574$ , получаем  $s_1 = -1,109$ . Тогда  $T = 0,9009$ ,  $K = 2,836078$ . НПФ примет вид:

$$G(s) = \frac{2,8361}{0,9009s + 1}, \quad (16)$$

а конечно-разностное уравнение

$$h[n] = -0,045499 \cdot h[n-1] + 0,123614 \cdot h[n-2] + 2,3525 \cdot x[n-1] + 0,262035 \cdot x[n-2]. \quad (17)$$

<sup>1</sup> Данные собраны кандидатом технических наук, доцентом кафедры «Технологическое проектирование пищевых производств» Института инженерных технологий Кемеровского государственного университета Е.А. Сафоновой.

На рис. 2 приведена линейная аппроксимация исходных данных и полученной дискретной модели. Результаты идентификации при других значениях температур и частотах вращения ротора приведены в табл. 1, 2.

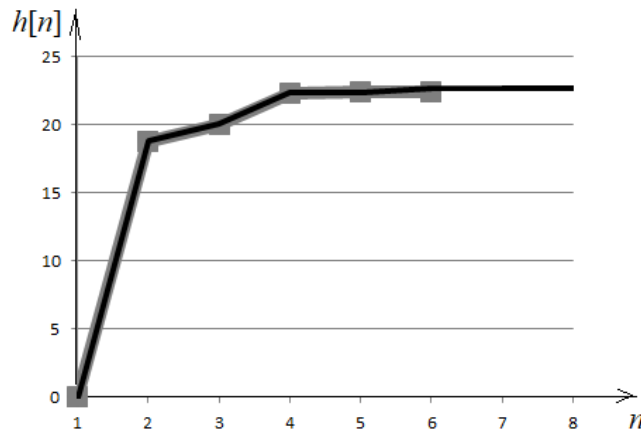


Рис. 2. Линейная аппроксимация экспериментальных данных и полученной дискретной модели разгонной характеристики (сплошная черная линия – значения конечно-разностного уравнения, серая линия с квадратами – линейная аппроксимация экспериментальных данных)

Fig. 2. Linear approximation of the experimental data and the resulting discrete model of the acceleration characteristic (solid black line – values of the finite difference equation, gray line with squares-linear approximation of the experimental data)

Таблица 1

Значения  $K$  при различных  $t$  и  $n$

$K$		Частота вращения ротора $n$ (1 000 об/мин)	
		$n_1 = 2,5$	$n_2 = 3$
Температура $t$ , °C	$t_1 = 55$	2,836078	3,388565
	$t_2 = 70$	3,209291	3,879953
	$t_3 = 85$	3,605610	4,279379

Таблица 2

Значения  $T$  при различных  $t$  и  $n$

$T$		Частота вращения ротора $n$ (1000 об/мин)	
		$n_1 = 2,5$	$n_2 = 3$
Температура $t$ , °C	$t_1 = 55$	0,9009	0,9950
	$t_2 = 70$	0,7348	0,8292
	$t_3 = 85$	0,7610	0,7407

Сравним результаты идентификации процесса охмеления с результатами идентификации аperiодического звена 1-го порядка. Наличие дополнительных нуля и полюса ДПФ в модели процесса охмеления позволяет сделать предположение о том, что объект идентификации имеет более сложную структуру и не является линейным.

На основе полученных результатов зададим зависимости  $K = K(t, n)$  и  $T = T(t, n)$  и далее рассчитаем их значения с помощью метода наименьших квадратов:

$$K = -0,6886 + 0,0126t + 0,6986n + 0,0081tn - 0,0001t^2,$$

$$T = 0,9340 - 0,0276t + 0,6461n - 0,0076tn + 0,0003t^2. \quad (18)$$

Ошибки моделирования, найденные с помощью квадратического критерия, оказались равны:

$$\sum (K_{ij} - K(t_i, n_j))^2 = 0,001, \quad \sum (T_{ij} - T(t_i, n_j))^2 = 0,004.$$

Таким образом, для значений параметров  $t, n$  ( $55 \leq t \leq 85, 2,5 \leq n \leq 3$ ) модель процесса охмеления пивного сусла на выходе РПА описывается НПФ вида:

$$G(s) = \frac{K(t, n)}{T(t, n)s + 1},$$

а разгонная характеристика – следующей формулой:

$$h(t) = K(t, n) \cdot \left(1 - e^{-t/T(t, n)}\right), \quad (19)$$

где значения  $K(t, n)$  и  $T(t, n)$  находятся согласно (18).

### Заключение

В работе показано, что экспериментальные данные, описывающие технологический процесс охмеления пивного суслу на выходе РПА, удовлетворительно аппроксимируются разгонной характеристикой аperiodического звена первого порядка, причем наибольшее совпадение наблюдается в установившемся режиме. НПФ такого звена имеет переменные коэффициенты, а зависимость коэффициентов от температуры и частоты вращения ротора имеет квадратичную природу. Полученные модели (17)–(19) позволяют осуществить выбор оптимальных технологических параметров обрабатываемой среды, которые улучшат показатели по выходу изогумулона. Достоинство предложенного подхода заключается в том, что для моделирования не требуется наличия большого объема измерений. Использование данного подхода позволяет автоматически оценить неизвестную заранее структуру математической модели объекта, а также все его параметры, что существенно отличает его от существующих аналогов. Это преимущество освобождает исследователя от необходимости принимать эвристические решения, сопряженные с ошибками.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ljung L., Glad T. Modeling & Identification of Dynamic Systems. Lund : Studentlitteratur AB, 2016. 402 p.
2. Isermann R., Munchhof M. Identification of Dynamic Systems. Berlin : Springer, 2011. 705 p.
3. Dorf R.C., Bishop R.H. Modern control systems. Harlow : Pearson, 2011. 832 p.
4. Jafarov S.M., Mustafayeva A.M. Identification of dynamic objects under uncertainty and non-stationarity sing etalon transformers // Procedia Computer Science. 2017. V. 120. P. 561–567.
5. Utkin A.V. Synthesis of a Control System for a Steam Turbine // Automation and Remote Control. 2018. V. 79, is.12. P. 2186–2202.
6. Cerovsky Z., Lev M. Permanent Magnet Synchronous Machine Parameters Identification for Load Characteristics Calculation // Automatica. 2018. V. 56, No. 2, P. 241–246.
7. Weerts H.H.M., Van den Hof P.M.J., Dankers A.G. Identifiability of linear dynamic networks // Automatica. 2018. V. 89, No. 4. P. 247–258.
8. Gilberto P., Yang Wa, Boli Ch., Thomas P. Identification of multi-sinusoidal signals with direct frequency estimation: an adaptive observer approach // Automatica. 2019. V. 99, No. 1. P. 338–345.
9. Wang Ji, Le Vang T., Pyrkin A.A., Kolyubin S.A., Bobtsov A.A. Identification of Piecewise Linear Parameters of Regression Models of Non-Stationary Deterministic Systems // Automation and Remote Control. 2018. V. 79, No. 12. P. 2159–2168.
10. Voevoda A.A., Troshina G.V. Active identification of linear stationary dynamic objects on base of the Fisher information matrix: the steady state // 12th Int. Conf. on Actual Problems of Electronics Instrument Engineering (APEIE). Novosibirsk, Russia, 2–4 Oct. 2014. P. 745–748.
11. Shumikhin A.G., Aleksandrova A.S. Identification of a controlled object using frequency responses obtained from a dynamic neural network model of a control system // Computer Research and Modeling. 2017. V. 9, is. 5. P. 729–740.
12. Masaki I. Subspace identification with moment matching // Automatica. 2019. V. 99, No. 1. P. 22–32.
13. Первушин В.Ф. О непараметрической идентификации линейных динамических объектов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4 (25). С. 95–104.
14. Карабутов Н.Н. Структурная идентификация систем: анализ динамических структур. М. : МГИУ, 2008. 160 с.
15. Пупков К.А, Егупов Н.Д., Гаврилов К.И. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления : учебник / под ред. Н.Д. Егупова. М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 743 с.
16. Tan A.H., Godfrey K.R. Industrial Process Identification. Perturbation Signal Design and Applications. Springer, 2019. 217 p.
17. Промтов М.А., Червяков В.М. Кинетика растворения NaCl в воде при обработке в роторно-импульсном аппарате // Известия вузов. Химия и химическая технология. 2000. Т. 43, № 6. С. 120–123.
18. Промтов М.А. Пульсационные аппараты роторного типа: теория и практика. М. : Машиностроение, 2001. 247 с.
19. Червяков В.М., Однолько В.Г. Использование гидродинамических и кавитационных явлений в роторных аппаратах. М. : Машиностроение, 2008. 116 с.
20. Фёдоров А.В., Шульгин А.В., Василишин М.С., Иванов О.С., Иванова Д.В., Карпов А.Г. К оценке длительности процесса периодического растворения дисперсного материала в роторно-пульсационном аппарате // Инженерно-физический журнал. 2011. Т. 84, № 4. С. 664–669.

21. Василишин М.С., Иванов О.С., Иванова Д.Б., Карпов А.Г., Кухленко А.А., Орлов С.Е. Кинетика массообмена при растворении дисперсных материалов в роторно-пульсационном аппарате // Химическая технология. 2013. Т. 14, № 2. С. 100–103.
22. Кухленко А.А., Орлов С.Е., Иванова Д.Б., Василишин М.С. Процесс растворения полидисперсных материалов в установке с вращающимся пульсационным аппаратом // Журнал инженерной физики и теплофизики. 2015. Т. 88, № 1. С. 23–34.
23. Иванец В.Н., Бакин И.А., Иванец Г.Е. Интенсификация процессов гомогенизации и диспергирования при получении сухих, увлажненных и жидких комбинированных продуктов // Техника и технология пищевых производств. 2012. № 3. С. 34–45.
24. Карташов В.Я., Новосельцева М.А. Динамическая оценка риска в сложных системах. Кемерово : Кемеровский гос. ун-т, 2012. 212 с.
25. Kartashov V.Ya., Novoseltseva M.A. Structural-and-Parametric Identification of Linear Stochastic Plants Using Continuous Fractions // Automation and Remote Control. 2010. V. 71, No. 8. P. 1727–1740.
26. Cuyt A.A.M., Petersen V., Verdonk B., Waadeland H., Jones W.B. Handbook of Continued Fractions for Special Functions. Springer, 2008. 431 p.
27. Waadeland H., Lorentzen L. Continued Fractions. Springer, 2008. 308 p.
28. Iosifescu M., Kraaikamp C. Metrical Theory of Continued Fractions. Springer, 2002. 383 p.
29. Novoseltseva M.A., Gutova S.G., Kazakevich I.A. Structural and parametric identification of a multisinusoidal signal model by using continued fractions // 2018 Int. Russian Automation Conf. (RusAutoCon 2018). 9–16 Sept. Sochi, Russia. 2018. P. 60–64.

Поступила в редакцию 18 марта 2019 г.

Novoseltseva M.A., Gutova S.G., Kagan E.S., Borodulin D.M. (2019) STRUCTURAL AND PARAMETRIC IDENTIFICATION OF THE PROCESS MODEL USING A ROTARY PULSATION MACHINE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 49. pp. 63–72

DOI: 10.17223/19988605/49/8

The paper addresses the task of structural-parametric identification of a model describing the technological process of obtaining hop extract at the exit of using a rotary pulsation machine (RPM). In the literature, there have been attempts to simulate the process at the output of the RPM based on regression models of experiment planning, but their construction requires a large amount of experimental data, which is associated with repeated interruption of the technological process for taking measurements. This makes it impossible to use a passive experiment for data acquisition. Based on equally spaced measurements of the input and output effects, it is proposed to construct an identifier matrix. Basing on the values of its zero column, a continuous fraction is restored, which is converted into a discrete transfer function. Using the inverse formula for a consistent  $z$ -transform, the zeros and poles of the continuous transfer function (which is the final goal of the simulation) are determined. The transformation of the denominator polynomial of the continuous transfer function leads to the determination of the time constant  $T$ , the transfer coefficient  $K$  is determined by the finite value theorem. The constructed transfer function allows obtaining a model of any reaction of the object, including the RPM acceleration characteristics.

The empirical data allowed the authors to determine that the model of the desired RPM acceleration characteristics corresponds to the aperiodic link of the first order. However, in the discrete transfer function, obtained using the apparatus of continued fractions, there is an additional pole and zero. This indicates the presence of a nonlinear relationship between the input process, which is the quantitative ratio of unhopped wort and granulated hops, and the output process – the content of isohumulone in the hop extract. Additional technological parameters are the temperature  $t$  at which the hopping process occurs and the rotor speed  $n$ . Studies have shown that for different values of  $t$  and  $n$ , the parameters of the transfer function change.

The resulting models allow selecting the optimal technological parameters of the processed medium, which will improve the performance of isohumulone output.

Keywords: structural and parametric identification; continuous fraction; transfer function; technological process; rotary pulsation machine.

*NOVOSELTSEVA Marina Aleksandrovna* (Candidate of Technical Sciences, Assistant Professor of Department of Applied Mathematics, Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation).

E-mail: man300674@gmail.com

*GUTOVA Svetlana Gennadyevna* (Candidate of Technical Sciences, Assistant Professor of Department of Applied Mathematics, Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation).

E-mail: gsg1967@mail.ru

KAGAN Elena Sergeevna (Candidate of Technical Sciences, Head of Department of Applied Mathematics, Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation).

E-mail: kaganes@mail.ru

BORODULIN Dmitry Mihaylovich (Doctor of Technical Sciences, Director of the Institute of engineering technologies, Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation).

E-mail: borodulin\_dmitri@list.ru

## REFERENCES

1. Ljung, L. & Glad, T. (2016) *Modeling & Identification of Dynamic Systems*. Sweden: Studentlitteratur AB.
2. Isermann, R. & Munchhof, M. (2011) *Identification of Dynamic Systems*. Germany: Springer.
3. Dorf, R.C. & Bishop, R.H. (2011) *Modern control systems*. Harlow: Pearson.
4. Jafarov, S.M. & Mustafaeva, A.M. (2017) Identification of dynamic objects under uncertainty and non-stationarity sing etalon transformers. *Procedia Computer Science*. 120. pp. 561–567.
5. Utkin, A.V. (2018) Synthesis of a Control System for a Steam Turbine. *Automation and Remote Control*. 79(12). pp. 2186–2202. DOI: 10.1134/S0005117918120081
6. Cerovsky, Z. & Lev, M. (2018) Permanent Magnet Synchronous Machine Parameters Identification for Load Characteristics Calculation. *Automatica*. 56(2). pp. 241–246. DOI: 10.7305/automatica.2015.07.813
7. Weerts, H.H.M., Van den Hof, P.M.J. & Dankers, A.G. (2018) Identifiability of linear dynamic networks. *Automatica*. 89(4). pp. 247–258. DOI: 10.1016/j.automatica.2017.12.013
8. Pin, G., Wang, Y., Chen, B. & Parisini, T. (2019) Identification of multi-sinusoidal signals with direct frequency estimation: An adaptive observer approach. *Automatica*. 99(1). pp. 338–345. DOI: 10.1016/j.automatica.2018.10.026
9. Wang, J., Le Vang, T., Pyrkin, A.A., Kolyubin, S.A. & Bobtsov, A.A. (2018) Identification of Piecewise Linear Parameters of Regression Models of Non-Stationary Deterministic Systems. *Automation and Remote Control*. 7(12). pp. 2159–2168. DOI: 10.1134/S0005117918120068
10. Voevoda, A.A. & Troshina, G.V. (2014). Active identification of linear stationary dynamic objects on base of the Fisher information matrix: the steady state. *12th Int. Conf. on Actual Problems of Electronics Instrument Engineering (APEIE)*. Novosibirsk, Russia, October 2–4, 2014. pp. 745–748.
11. Shumikhin, A.G. & Aleksandrova, A.S. (2017) Identification of a controlled object using frequency responses obtained from a dynamic neural network model of a control system. *Computer Research and Modeling*. 9(5). pp. 729–740. DOI: 10.20537/2076-7633-2017-9-5-729-740
12. Masaki, I. (2019) Subspace identification with moment matching. *Automatica*. 99(1). pp. 22–32. DOI: 10.1016/j.automatica.2018.10.002
13. Pervushin, V.F. (2013) On non-parametric models of linear dynamic objects. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(25). pp. 95–104.
14. Karabutov, N.N. (2008) *Strukturnaya identifikatsiya sistem: analiz dinamicheskikh struktur* [Structural Identification of Systems: Analysis of Dynamic Structures]. Moscow: Moscow State Industrial University.
15. Pupkov, K.A., Egupov, N.D. & Gavrilov, K.I. (2001) *Metody robustnogo, neyro-nechetkogo i adaptivnogo upravleniya* [Methods of robust, neuro-fuzzy and adaptive control]. Moscow: Moscow State Technical University.
16. Tan, A.H. & Godfrey, K.R. (2019) *Industrial Process Identification. Perturbation Signal Design and Applications*. Springer.
17. Promptov, M.A. & Chervyakov, V.M. (2000) Kinetics of NaCl dissolution in water under the treatment in a rotary pulse apparatus. *Izvestiya vuzov. Khimiya i khimicheskaya tekhnologiya – Chemistry and Chemical Technology*. 43(6). pp. 120–123.
18. Promptov, M.A. (2001) *Pul'satsionnye apparaty rotornogo tipa: teoriya i praktika* [Rotary-Type Pulsation Apparatuses: Theory and Practice]. Moscow: Mashinostroenie.
19. Chervyakov, V.M. & Odnolko, V.G. (2008) *Ispol'zovanie gidrodinamicheskikh i kavitatsionnykh yavleniy v rotornykh apparatakh* [Use of Hydrodynamic and Cavitation Phenomena in Rotary Apparatuses]. Moscow: Mashinostroenie.
20. Fedorov, A.V., Shulgin, A.V., Vasilishin, M.S., Ivanova, D.B., Ivanov, O.S., & Karpov, A.G. (2011) On the evaluation of the time of periodical dissolution of a dispersed material in a rotor-pulse device. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 84(4). pp. 717–722.
21. Vasilishin, M.S., Ivanov, O.S., Ivanova, D.B., Karpov, A.G., Kukhlenko, A.A. & Orlov, S.E. (2013) Study of mass-exchange kinetics in rotary-pulsation plant. *Khimicheskaya tekhnologiya – Chemical Technology*. 14(2). pp. 100–103.
22. Kukhlenko, A.A., Orlov, S.E., Ivanova, D.B. & Vasilishin, M.S. (2015) Process of Dissolution of Polydisperse Materials in a Unit with a Rotary Pulsation Apparatus. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 88(1). pp. 23–34.
23. Ivanets, V.N., Bakin, I.A. & Ivanets, G.E. (2012) Intensifikatsiya protsessov gomogenizatsii i dispergirovaniya pri poluchenii sukhikh, uvlazhnenykh i zhidkikh kombinirovannykh produktov [Intensification of the processes of homogenization and dispersion in the preparation of dry, moist and liquid combination products]. *Tekhnika i tekhnologiya pishchevykh proizvodstv – Food Processing: Techniques and Technology*. 3. pp. 34–45.
24. Kartashov, V.Ya. & Novoseltseva, M.A. (2012) *Dinamicheskaya otsenka riska v slozhnykh sistemakh* [Dynamic risk assessment in complex systems]. Kemerovo: Kemerovo State University.

25. Kartashov, V.Ya. & Novoseltseva, M.A. (2010) Structural-and-Parametric Identification of Linear Stochastic Plants Using Continuous Fractions. *Automation and Remote Control*. 71(8). pp. 1727–1740. DOI: 10.1134/S0005117910080217
26. Cuyt, A.A.M., Petersen, V., Verdonk, B., Waadeland, H. & Jones, W.B. (2008) *Handbook of Continued Fractions for Special Functions*. Springer.
27. Waadeland, H. & Lorentzen, L. (2008) *Continued Fractions*. Springer.
28. Iosifescu, M. & Kraaikamp, C. (2002) *Metrical Theory of Continued Fractions*. Springer.
29. Novoseltseva, M.A., Gutova, S.G. & Kazakevich, I.A. (2018) Structural and parametric identification of a multisinusoidal signal model by using continued fractions. *2018 Int. Russian Automation Conf. (RusAutoCon 2018)*. Sochi, Russia, September 9–16, 2018. Sochi. pp. 60–64.



УДК 519.2

DOI: 10.17223/19988605/49/9

Е.А. Пчелинцев, С.С. Перелевский

**АДАПТИВНОЕ ЭФФЕКТИВНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ФУНКЦИИ  
В ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНОЙ РЕГРЕССИИ**

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 17-11-01049. Работа второго автора частично поддержана Министерством науки и высшего образования РФ (государственное задание № 2.3208.2017/4.6).*

Изучаются асимптотические свойства адаптивной улучшенной процедуры выбора модели для оценивания неизвестной функции в гетероскедастичной регрессии. Установлено, что процедура является асимптотически эффективной в смысле среднеквадратического риска, т.е. асимптотический среднеквадратический риск процедуры совпадает с соответствующей константой Пинскера, обеспечивающей точную нижнюю границу риска по всем возможным оценкам. Приводятся результаты численного моделирования.

**Ключевые слова:** непараметрическая гетероскедастичная регрессия; улучшенное оценивание; среднеквадратический риск; оракульные неравенства; асимптотическая эффективность.

Рассматривается задача адаптивного асимптотически эффективного оценивания в непараметрической гетероскедастичной регрессионной модели

$$y_j = S(x_j) + \sigma_j \xi_j, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (1)$$

где  $x_j = j/n$  – точки разбиения сегмента  $[0, 1]$ ,  $S$  – неизвестная 1-периодическая функция, которую требуется оценить,  $(\xi_j)_{1 \leq j \leq n}$  – последовательность центрированных независимых одинаково распределенных случайных величин с единичной дисперсией,  $(\sigma_j)_{1 \leq j \leq n}$  – неизвестные коэффициенты волатильности, зависящие от точек  $x_j$  и функции  $S$ ,  $n$  – число наблюдений.

Гетероскедастичные регрессионные модели широко применяются в эконометрических исследованиях, в частности при анализе инвестиционного поведения фирм, для задачи потребления и др. [1, 2]. Также регрессионная модель типа (1) используется в стохастических дифференциальных уравнениях для аппроксимации диффузионных процессов с непрерывным временем путем применения последовательных ядерных оценок [3, 4]. Важной является задача качественной статистической идентификации таких моделей [5].

Цель данной работы – доказать свойство асимптотической (при  $n \rightarrow \infty$ ) эффективности улучшенной процедуры выбора модели, предложенной авторами в [6], для оценивания функции  $S$  в модели (1). Рассматривается адаптивная постановка задачи, т.е. в условиях отсутствия информации о гладкости неизвестной функции  $S$ .

Понятие асимптотической эффективности связано с оптимальной скоростью сходимости минимаксного риска, т.е. важным вопросом в результатах оптимальности является изучение точной асимптотики минимаксного риска [7]. Проблема асимптотического непараметрического оценивания в модели гетероскедастичной регрессии изучались в работах [8–10]. Для доказательства асимптотической эффективности процедуры необходимо показать, что ее асимптотический квадратичный риск совпадает с нижней границей, определяемой константой Пинскера [11]. В данной работе поставленная задача решается с использованием подхода, основанного на методах выбора модели и точных оракульных неравенств, разработанных в статьях [10, 12]. В отличие от указанных работ, в статье применяется метод улучшенного адаптивного непараметрического оценивания, предложенный в [6, 13].

Статья состоит из четырех разделов. В разд. 1 описывается построение адаптивной улучшенной процедуры выбора модели и формулируется точное оракульное неравенство для среднеквадратического риска процедуры оценивания. В разд. 2 доказывается теорема об асимптотической эффективности процедуры выбора модели в минимаксном смысле. В разд. 3 изучается задача оценивания непериодической функции в модели (1). В разд. 4 приводятся результаты численного моделирования.

### 1. Адаптивная процедура выбора модели. Оракульное неравенство

Для оценивания неизвестной функции  $S$  в модели (1) предлагается использовать семейство  $(S_\lambda^*)_{\lambda \in \Lambda}$  улучшенных взвешенных оценок наименьших квадратов, определенное в [6], т.е.

$$S_\lambda^*(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \theta_{j,n}^* \phi_j(x), \quad (2)$$

где вектор весовых коэффициентов  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  принадлежит некоторому конечному множеству  $\Lambda \subset [0,1]^n$  с  $n \geq 3$ ,  $(\phi_j)_{1 \leq j \leq n}$  – система ортонормированных тригонометрических функций в  $L_2[0,1]$ ,

$$\theta_{j,n}^* = \left( 1 - \frac{c_n}{|\tilde{\theta}_n|} \mathbf{1}_{\{1 \leq j \leq d\}} \right) \hat{\theta}_{j,n}, \quad |\tilde{\theta}_n|^2 = \sum_{j=1}^d \hat{\theta}_{j,n}^2, \quad \hat{\theta}_{j,n} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n y_l \phi_j(x_l).$$

Здесь коэффициент  $c_n \approx d/n$ ,  $d \approx n^\delta / \ln n$ ,  $0 < \delta < 1$ ,  $\mathbf{1}_A$  – индикатор множества  $A$ . Заметим, что  $c_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . В данной работе используется множество весов  $\Lambda$ , введенное в статье [12], т.е.

$$\Lambda = \{\lambda_\alpha, \alpha \in A\}, \quad A = \{1, \dots, k\} \times \{t_1, \dots, t_m\},$$

где  $t_i = i\varepsilon$  и  $m = [\varepsilon^{-2}]$  – целая часть числа  $\varepsilon^{-2}$ . Считаем, что параметры  $k \geq 1$  и  $0 < \varepsilon < 1$  – функции от  $n$ , т.е.  $k = k_n$  и  $\varepsilon = \varepsilon_n$  такие, что

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} k_n = +\infty, & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{\ln n} = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0, & \lim_{n \rightarrow \infty} n^\delta \varepsilon_n = +\infty \end{cases}$$

для любого  $\delta > 0$ . Например, можно взять для  $n \geq 3$

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\ln n}, \quad k_n = \bar{k} + \sqrt{\ln n},$$

где  $\bar{k}$  – некоторая неотрицательная постоянная. Для любого  $\alpha = (\beta, t) \in A$  положим, что весовой вектор  $\lambda_\alpha = (\lambda_{\alpha,1}, \dots, \lambda_{\alpha,n})$  с компонентами

$$\lambda_{\alpha,j} = \mathbf{1}_{\{1 \leq j \leq d\}} + (1 - (j/\omega_\alpha)^\beta) \mathbf{1}_{\{d < j \leq \omega_\alpha\}}.$$

Здесь  $d = d(n) = [\omega_\alpha / \ln n]$ ,

$$\omega_\alpha = \varpi + (\kappa_\beta t n)^{1/(2\beta+1)}, \quad \kappa_\beta = (\beta+1)(2\beta+1)/(\pi^{2\beta}\beta),$$

и  $\varpi$  – некоторая неотрицательная постоянная.

Метод выбора модели заключается в описании правила выбора процедуры из семейства оценок (2), т.е. нужно выбрать вектор весовых коэффициентов  $\lambda \in \Lambda$  в (2). Для этого естественно минимизировать эмпирическую квадратическую ошибку вида:

$$Err_n(\lambda) = \|S_\lambda^* - S\|_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n (S_\lambda^*(x_l) - S(x_l))^2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \theta_{j,n}^{*2} - 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j \theta_{j,n}^* \theta_j + \|S\|^2.$$

Однако поскольку во втором слагаемом коэффициенты  $\theta_j$  неизвестны, то минимизация этого выражения не приводит к нахождению коэффициентов  $\lambda$ . Необходимо величины  $\theta_{j,n}^* \theta_j$  заменить некоторыми оценками. В качестве таких оценок предлагаются

$$\bar{\theta}_{j,n} = \theta_{j,n}^* \hat{\theta}_{j,n} - \frac{1}{n} \hat{\zeta}_n,$$

где  $\hat{\zeta}_n$  – некоторая оценка интегрированной дисперсии шума

$$\zeta_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sigma_j^2.$$

При осуществлении этой замены в эмпирической ошибке нужно заплатить «штраф». Определим платежную функцию как

$$J_n(\lambda) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \theta_{j,n}^{*2} - 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j \bar{\theta}_{j,n} + \rho \hat{P}_n(\lambda). \quad (3)$$

Здесь  $0 < \rho < 1$  – некоторый положительный коэффициент, зависящий от  $n$  и такой, что  $\rho(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и пенализационное слагаемое

$$\hat{P}_n(\lambda) = \frac{|\lambda|^2 \hat{\zeta}_n}{n}, \quad |\lambda|^2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j^2.$$

Отметим, что в случае, когда последовательность  $(\sigma_j)_{1 \leq j \leq n}$ , известна, то

$$P_n(\lambda) = \frac{|\lambda|^2 \zeta_n}{n}.$$

Полагая теперь

$$\lambda^* = \arg \min_{\lambda \in \Lambda} J_n(\lambda),$$

определим процедуру выбора модели равенством

$$S^* = S_{\lambda^*}^*. \quad (4)$$

Заметим, что  $\lambda^*$  существует, поскольку множество  $\Lambda$  конечно. В случае, когда  $\lambda^*$  не единственное, берем любое из них.

Обозначим далее через  $\mathbf{P}_n$  семейство распределений  $p$  в  $\mathbf{R}^n$  векторов  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  в модели (1), таких что компоненты  $\xi_j$  совместно независимы, центрированы с единичной дисперсией и

$$\max_{1 \leq k \leq n} \mathbf{E}(\xi_k^4) \leq l_n,$$

где последовательность  $(l_n)_{n \geq 1}$  удовлетворяет условиям  $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n / n^\delta = 0$ , для любого  $\delta > 0$ .

Легко видеть, что для любого  $n \geq 1$  центрированное гауссовское распределение в  $\mathbf{R}^n$  с единичной ковариационной матрицей принадлежит семейству  $\mathbf{P}_n$ . Для оценки  $S^*$  определим следующий робастный среднеквадратический риск

$$\mathfrak{R}_n(S^*, S) = \sup_{p \in \mathbf{P}_n} \mathbf{E}_{S,p} \|S^* - S\|_n^2, \quad (5)$$

где  $\mathbf{E}_{S,p}$  – математическое ожидание относительно распределения  $\mathbf{P}_{S,p}$  по наблюдениям  $(y_1, \dots, y_n)$  с фиксированной функцией  $S$  и фиксированным распределением  $p \in \mathbf{P}_n$  случайных величин  $(\xi_j)_{1 \leq j \leq n}$  в модели (1).

**Замечание 1.** Если оценка  $S^*$  определена только в точках  $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$ , то продолжаем ее ступенчатой функцией на сегмент  $[0, 1]$  следующим образом:

$$S^*(x) = S^*(x_1) \mathbf{1}_{[0, x_1]}(x) + \sum_{l=2}^n S^*(x_l) \mathbf{1}_{(x_{l-1}, x_l]}(x) \text{ для любого } 0 \leq x \leq 1.$$

Тогда риск, не зависящий от разбиения сегмента  $[0, 1]$ , определим равенством

$$\mathcal{Q}_n(S^*, S) = \sup_{p \in \mathbf{P}_n} \mathbf{E}_{S,p} \|S^* - S\|^2, \quad (6)$$

где  $\|\cdot\|$  обозначает норму в  $L_2[0,1]$ .

В работе [6] установлено, что оценка (2) превосходит по среднеквадратической точности процедуру выбора модели, построенную на основе взвешенных оценок наименьших квадратов  $\hat{S}_\lambda$  из [12], получено выражение для минимального выигрыша в точности, т.е.

$$\mathfrak{R}_n(S_\lambda^*, S) - \mathfrak{R}_n(\hat{S}_\lambda, S) \leq -c_n^2. \quad (7)$$

Также в работе [6] получено следующее оракульное неравенство, определяющее неасимптотическую точную верхнюю границу для среднеквадратического риска (5) процедуры оценивания (4).

**Теорема 1.** Пусть наблюдения описываются уравнением (1). Тогда для любого  $0 < \rho < 1/3$  среднеквадратический риск (5), предложенной процедуры выбора модели (4) для оценивания функции  $S$  удовлетворяет следующему оракульному неравенству:

$$\mathfrak{R}_n(S^*, S) \leq \frac{1-\rho}{1-2\rho} \min_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{R}_n(S_\lambda^*, S) + \frac{1}{n} \Psi_n(\rho),$$

где  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(\rho) / n^\delta = 0$  для любого  $\delta > 0$ .

## 2. Асимптотическая эффективность

Пусть  $C_{per,1}^k(\mathbf{R})$  – множество 1-периодических  $k$  раз дифференцируемых  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  функций и пусть функция  $S$  в модели (1) принадлежит следующему соболевскому шару:

$$W_r^k = \left\{ f \in C_{per,1}^k(\mathbf{R}) : \sum_{i=0}^k \|f^{(i)}\|^2 \leq r \right\},$$

где  $k \geq 1$  и  $r > 0$  – неизвестные параметры.

Обозначим через  $\Sigma_n$  множество всех оценок  $\hat{S}_n$ , измеримых относительно наблюдений  $(y_1, \dots, y_n)$ . Предположим, что коэффициенты волатильности  $(\sigma_j)_{j \geq 1}$  удовлетворяют следующим условиям.

**C1)**  $\sigma_j(S) = g(x_j, S)$  для некоторой неизвестной функции  $g : [0, 1] \times L_2[0, 1] \rightarrow \mathbf{R}_+$ , которая квадратично интегрируема по  $x$  и такая, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g^2(x_j, S) - \zeta(S) = 0,$$

где  $\zeta(S) = \int_0^1 g^2(x, S) dx$ . Кроме того,  $g_* = \inf_{0 \leq x \leq 1} \inf_{W_r^k} g^2(x, S) > 0$  и  $\zeta(S) < \infty$ .

**C2)** Для некоторого  $x \in [0, 1]$  оператор  $g^2(x, \cdot) : C[0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  дифференцируем в смысле Фреше при любой фиксированной функции  $f_0$  из  $C[0, 1]$ , т.е. для любой  $f$  из некоторой окрестности  $f_0$  в  $C[0, 1]$

$$g^2(x, f) = g^2(x, f_0) + L_{x, f_0}(f - f_0) + Y(x, f_0, f),$$

где производная по Фреше  $L_{x, f_0} : C[0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  – ограниченный линейный оператор, а остаточный член  $Y(x, f_0, f)$  для каждого  $x \in [0, 1]$ , удовлетворяет следующему свойству:

$$\lim_{\|f - f_0\|_\infty \rightarrow 0} \frac{\|Y(x, f_0, f)\|}{\|f - f_0\|_\infty} = 0, \quad \|f\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|.$$

**C3)** Существует некоторая положительная постоянная  $C^*$ , такая что для любой функции  $S$  из  $C[0, 1]$ , оператор  $L_{x, S}$ , определенный в **C2)**, удовлетворяет следующему неравенству для любой функции  $f$  из  $C[0, 1]$ :

$$|L_{x, S}(f)| \leq C^* (|S(x)f(x)| + |f|_1 + \|S\| \|f\|), \quad |f|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

С4) Функция  $g_0(\cdot) = g(\cdot, S_0)$ , соответствующая  $S_0 \equiv 0$ , является непрерывной на интервале  $[0, 1]$ . Кроме того,

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \sup_{0 \leq x \leq 1} \sup_{\|S\|_\infty \leq \delta} |g(x, S) - g(x, S_0)| = 0.$$

**Замечание 2.** Из условия С1) следует, что функция  $g$  равномерно интегрируема по первой переменной, отделена от нуля и ограничена на классе  $W_r^k$ . Отделимость от нуля равносильна невырожденности распределения наблюдений, а ограниченность означает, что интенсивность шума конечна. Из условий С2) и С3) вытекает свойство регулярности функция  $g$  по второй переменной. Условие С4) обеспечивает непрерывность функции в точке  $S_0$ .

Например, в качестве функции, удовлетворяющей перечисленным условиям С1)–С4), можно взять предложенную в [1]

$$g^2(x, S) = c_0 + c_1 x + c_2 S^2(x) + c_3 \int_0^1 S^2(t) dt,$$

где  $c_0 > 0$ ,  $c_i \geq 0$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , – некоторые неизвестные постоянные. В этом случае

$$\zeta(S) = c_0 + 0,5c_1 + (c_2 + c_3) \int_0^1 S^2(t) dt$$

и производная Фреше

$$L_{x,S}(f) = 2S(x)f(x) + 2 \int_0^1 S(t)f(t) dt.$$

Хорошо известно, что оптимальная скорость сходимости равна  $n^{\frac{2k}{2k+1}}$ , когда риск берется равномерно по классу  $W_r^k$ . Справедливы следующие асимптотические результаты.

**Теорема 2.** Пусть для модели (1) выполнены условия С2)–С4). Тогда робастный риск (5) для всех  $k \geq 1$  и  $r > 0$  удовлетворяет следующему асимптотическому неравенству:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2k}{2k+1}} \inf_{\hat{S}_n \in \Sigma_n} \sup_{S \in W_r^k} \frac{\mathfrak{R}_n(\hat{S}_n, S)}{\gamma_k(S)} \geq 1,$$

где  $\gamma_k(S) = \Gamma_k^*(\zeta(S))^{2k/(2k+1)}$ ,  $\Gamma_k^* = ((2k+1)r)^{1/(2k+1)} (k / (\pi(k+1)))^{2k/(2k+1)}$  – константа Пинскера.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству Теоремы 4.3 из работы [10].

**Теорема 3.** Пусть для модели (1) выполнено условие С1). Тогда для робастного риска (5) процедуры выбора модели  $S^*$  всех  $k \geq 1$  и  $r > 0$  справедливо неравенство

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2k}{2k+1}} \sup_{S \in W_r^k} \frac{\mathfrak{R}_n(S_\lambda^*, S)}{\gamma_k(S)} \leq 1. \quad (8)$$

**Доказательство.** Для доказательства теоремы необходимо найти оценку из семейства (2), для которой возможно получить асимптотическую верхнюю границу (8). Положим

$$\tilde{l}_n = \min(\inf\{i \geq 1 : i\varepsilon \geq \bar{r}(S)\}, m), \quad \bar{r}(S) = r / \zeta(S)$$

и выберем  $\tilde{\alpha} = (k, \tilde{l}_n) \in A$ , где  $k \geq 1$  – неизвестный параметр множества  $W_r^k$  и  $\tilde{l}_n = \tilde{l}_n \varepsilon$ . Определим

$$\tilde{S} = S_{\tilde{\lambda}}^*, \quad \tilde{\lambda} = \lambda_{\tilde{\alpha}}.$$

Ясно, что эта оценка принадлежит семейству (2) и зависит от неизвестных параметров  $k$ ,  $r$  и  $\bar{r}(S)$ , следовательно, не может быть явно вычислена и применяться для решения задачи оценивания в адаптивной постановке. Однако для риска этой оценки, принимая во внимание неравенство (7) и Теорему 5.1 из [10], имеем

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2k}{2k+1}} \sup_{S \in W_r^k} \frac{\mathfrak{R}_n(\tilde{S}, S)}{\gamma_k(S)} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2k}{2k+1}} \sup_{S \in W_r^k} \frac{\mathfrak{R}_n(\hat{S}_{\tilde{\lambda}}, S)}{\gamma_k(S)} \leq 1. \quad (9)$$

Теперь, применяя оракульное неравенство из Теоремы 1 и полученную верхнюю границу (9), приходим к неравенству (8) для робастного риска процедуры (4). Теорема 3 доказана.

**Следствие 1.** Из Теорем 2 и 3 следует, что процедура выбора модели  $S_{\lambda^*}$ , определенная в (4), является асимптотически эффективной, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2k}{2k+1}} \sup_{S \in W_r^k} \frac{\mathfrak{R}(S_{\lambda^*}, S)}{\gamma_k(S)} = 1.$$

**Замечание 3.** Утверждения Теорем 2 и 3 также справедливы для робастного риска (6), поскольку нетрудно видеть, что для любого  $0 < \delta < 1$  и любой оценки  $\hat{S}_n \in \Sigma_n$  функции  $S \in W_r^k$  справедливо неравенство

$$\|\hat{S}_n - S\|_n^2 \geq (1 - \delta) \|T(\hat{S}_n) - S\|^2 - (\delta^{-1} - 1)r / n^2,$$

где  $T(f)(x) = f(x_1)\mathbf{1}_{[0, x_1]}(x) + \sum_{l=2}^n f(x_l)\mathbf{1}_{(x_{l-1}, x_l]}(x)$ . Данное неравенство есть оценка погрешности от аппроксимации нормы в  $L_2[0, 1]$  эмпирической нормой.

### 3. Оценивание непериодической функции

Рассмотрим задачу оценивания непериодической функции  $S$  в модели (1). В этом случае будем оценивать функцию  $S$  на любом внутреннем сегменте  $[a, b]$  из  $[0, 1]$ , т.е. для  $0 < a < b < 1$ . Следует отметить, что в граничных точках  $x = 0$  и  $x = 1$  необходимо использовать ядерные оценки, предложенные в [14].

Пусть  $\chi: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}_+^n$  – бесконечно дифференцируемая функция и такая, что  $\chi(x) = 1$  для  $a \leq x \leq b$  и  $\chi^{(k)}(0) = \chi^{(k)}(1) = 0$  для всех  $k \geq 0$ . Умножая уравнение (1) на функцию  $\chi(\cdot)$  и моделируя последовательность  $(\zeta_j)_{1 \leq j \leq n}$  независимых стандартных нормальных случайных величин, приходим к задаче оценивания периодической функции  $S_1(x) = S(x)\chi(x)$  по наблюдениям

$$\tilde{y}_j = S_1(x_j) + \tilde{\sigma}_j(S)\tilde{\xi}_j, \quad 1 \leq j \leq n,$$

где  $\tilde{\sigma}_j(S) = \sqrt{\sigma_j^2(S)\chi^2(x) + \varepsilon^2}$ ,

$$\tilde{\xi}_j = \frac{\sigma_j(S)}{\tilde{\sigma}_j(S)}\xi_j + \frac{\varepsilon}{\tilde{\sigma}_j(S)}\zeta_j$$

и  $\varepsilon > 0$  – некоторый достаточно малый параметр. Заметим, что если последовательность  $(\sigma_j(S))_{1 \leq j \leq n}$  удовлетворяет условиям **C1)–C4)**, то и последовательность  $(\tilde{\sigma}_j(S))_{1 \leq j \leq n}$  удовлетворяет этим условиям с функцией  $\tilde{g}(x, S) = \sqrt{g^2(x, S)\chi^2(x) + \varepsilon^2}$ .

### 4. Численное моделирование

В этом разделе проиллюстрируем теоретически установленные результаты с помощью численного моделирования в среде MatLab. В качестве функции  $S$  в модели (1) выберем

$$S(x) = x \sin(2\pi x) + x^2(1 - x) \cos(4\pi x).$$

Последовательность  $(\xi_j)_{1 \leq j \leq n}$  – независимые стандартные гауссовские случайные величины, коэффициенты

волатильности  $\sigma_j^2 = 2 + x_j + S^2(x_j) + \int_0^1 S^2(t)dt$ . Для вычисления весовых коэффициентов

$(\lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$  положим для  $n \geq 3$

$$k = 100 + \sqrt{\ln n}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\ln n}, \quad m = [\ln^2 n],$$

$$\rho = \frac{1}{3 + \ln^2 n}, \quad \omega_\alpha = 100 + (A_\beta t n)^{\frac{1}{2\beta+1}}.$$

В таблице приведены результаты поведения эмпирических среднеквадратических рисков по  $N = 1\,000$  реализациям процедур выбора модели (4).

Нормированные эмпирические квадратические риски

$n$	1 001	2 001	10 001	20 001	40 001	50 001
$n^{\frac{2k}{2k+1}} \frac{R(S^*, S)}{\gamma_k(S)}$	4,0856	2,0009	1,0117	1,0020	1,0006	1,0002

Из таблицы видно, что с ростом числа наблюдений  $n$  нормированные эмпирические среднеквадратические риски стремятся к единице, что численно подтверждает Следствие 1.

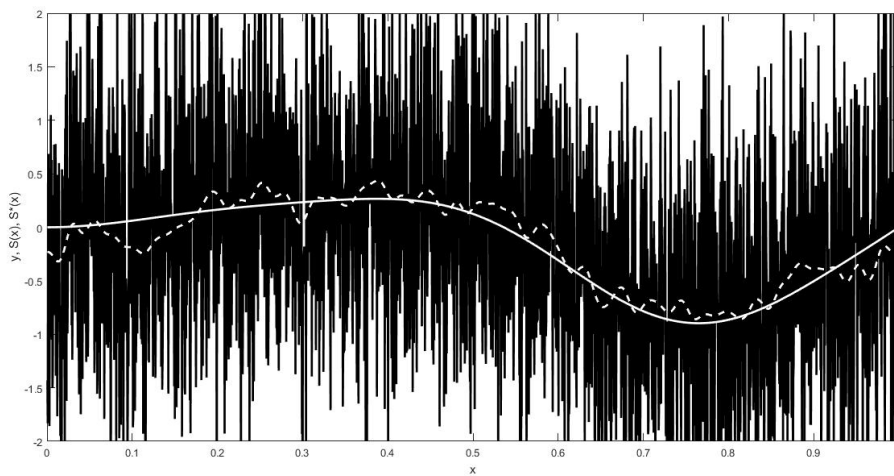


Рис. 1. Графики наблюдений  $(y_1, \dots, y_n)$ , функции регрессии  $S$  и ее оценки при  $n = 1\,001$   
 Fig. 1. Graphs of the observations  $(y_1, \dots, y_n)$ , regression function  $S$  and its estimate for  $n = 1\,001$

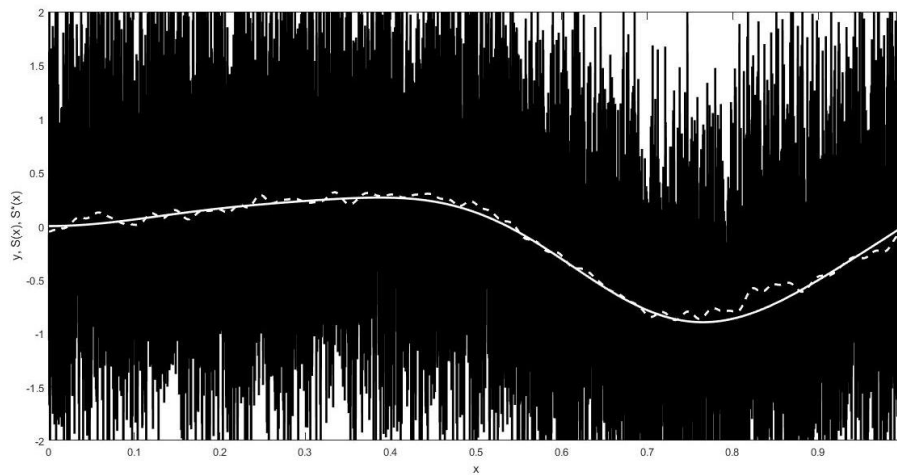


Рис. 2. Графики наблюдений  $(y_1, \dots, y_n)$ , функции регрессии  $S$  и ее оценки при  $n = 10\,001$   
 Fig. 2. Graphs of the observations  $(y_1, \dots, y_n)$ , regression function  $S$  and its estimate for  $n = 10\,001$

На рис. 1, 2 представлены графики наблюдений  $(y_1, \dots, y_n)$ , истинной функции регрессии  $S$  (сплошная белая линия) и ее оценки (4) (штрихованная белая линия).

## Заключение

Отметим, что данная статья является продолжением исследований, представленных авторами в работе [6], и завершает решение задачи улучшенного адаптивного оценивания в непараметрической гетероскедастичной регрессионной модели (1) в смысле среднеквадратической точности. Установлено, что предложенная улучшенная процедура выбора модели является асимптотически эффективной. Проведенный численный анализ подтверждает работоспособность процедуры и достаточно быструю сходимость нормированных рисков к точной нижней границе, определяемой константой Пинскера. Результаты работы рекомендуется применять в задаче калибровки с целью повышения качества статистической идентификации.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Goldfeld S.M., Quandt R.E. *Nonlinear Methods in Econometrics*. London : North-Holland, 1972.
2. Cai T., Wang L. Adaptive variance function estimation in heteroscedastic nonparametric regression // *Annals of Statistics*. 2008. V. 36, No. 5. P. 2025–2054.
3. Galtchouk L., Pergamenschikov S. Adaptive sequential estimation for ergodic diffusion processes in quadratic metric // *Journal of Nonparametric Statistics*. 2011. V. 23, No. 2. P. 255–285.
4. Pchelintsev E.A., Perelevskiy S.S., Makarova I.A. Improved nonparametric estimation of the drift in diffusion processes // *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*. 2018. Vol. 160, No 2. P. 364–372.
5. Belomestny D., Reiss M. Spectral calibration of exponential Levy models // *Finance and Stochastics*. 2006. Vol. 10, No 4. P. 449–474.
6. Пчелинцев Е.А., Перелевский С.С. Адаптивное оценивание в гетероскедастичной непараметрической регрессии // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2019. № 57. С. 38–52.
7. Ibragimov I.A., Hasminskii R.Z. *Statistical Estimation: Asymptotic Theory*. New York : Springer, 1981.
8. Efroimovich S. Sequential design and estimation in heteroscedastic nonparametric regression // *Sequential Analysis*. 2007. Vol. 26. P. 3–25.
9. Efroimovich S., Pinsker M. Sharp – optimal and adaptive estimation for heteroscedastic nonparametric regression // *Statistica Sinica*. 1996. Vol. 6. P. 925–942.
10. Galtchouk L., Pergamenschikov S. Adaptive asymptotically efficient estimation in heteroscedastic nonparametric regression // *Journal of the Korean Statistical Society*. 2009. V. 38, No. 4. P. 305–322.
11. Pinsker M.S. Optimal filtration of square integrable signals in Gaussian white noise // *Problems Transmiss. information*. 1981. N 17. P. 120–133.
12. Galtchouk L., Pergamenschikov S. Sharp non-asymptotic oracle inequalities for nonparametric heteroscedastic regression models // *Journal of Nonparametric Statistics*. 2009. V. 21, No. 1. P. 1–16.
13. Pchelintsev E.A., Pchelintsev V.A., Pergamenschikov S.M. Improved robust model selection methods for a Lévy nonparametric regression in continuous time // *Journal of Nonparametric Statistics*. 2019. P. 1–17. DOI: 10.1080/10485252.2019.1609672.
14. Brua J.-Y. Asymptotically efficient estimators for nonparametric heteroscedastic regression models // *Statistical Methodologie*. 2009. Vol. 6, No. 1. P. 47–60.

Поступила в редакцию 10 мая 2019 г.

Pchelintsev E.A., Perelevskiy S.S. (2019) ADAPTIVE EFFICIENT ESTIMATION FOR A FUNCTION IN HETEROSCEDASTIC REGRESSION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 49. pp. 73–81

DOI: 10.17223/19988605/49/9

We consider the problem of adaptive asymptotically efficient estimation in a nonparametric heteroscedastic regression model

$$y_j = S(x_j) + \sigma_j \xi_j, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (1)$$

where the design points  $x_j = j/n$ ,  $S$  is an unknown function to be estimated,  $(\xi_j)_{1 \leq j \leq n}$  is a sequence of centered independent random variables with unit variance and  $(\sigma_j)_{1 \leq j \leq n}$  are unknown scale functionals depending on the design points and the regression function  $S$ .

To estimate the unknown function  $S$  in model (1), it is proposed to use a model selection procedure based on improved weighted least squares estimates, defined in [6].



Denote via  $\mathbf{P}_n$  a family of distributions  $p$  in  $\mathbf{R}^n$  of the vectors  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  in the model (1) such that  $\max_{1 \leq k \leq n} \mathbf{E}(\xi_k^4) \leq l_n$ , where the sequence  $l_n$  is such that  $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n / n^\delta = 0$ , for any  $\delta > 0$ . For estimate  $S^*$  we define the following robust mean square risk

$$\mathfrak{R}_n(S^*, S) = \sup_{p \in \mathbf{P}_n} \mathbf{E}_{S,p} \|S^* - S\|_n^2,$$

where  $\mathbf{E}_{S,p}$  is the expectation with respect to the distribution  $\mathbf{P}_{S,p}$  of the observations  $(y_1, \dots, y_n)$  with the fixed function  $S$  and the fixed distribution  $p \in \mathbf{P}_n$  of random variables  $(\xi_j)_{1 \leq j \leq n}$  in the model (1). Under some additional conditions on the volatility coefficients in the model (1), the following asymptotic equality is proved:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2k}{2k+1}} \sup_{S \in W_k^k} \frac{\mathfrak{R}(S_{\lambda^*}^*, S)}{\gamma_k(S)} = 1,$$

which means that the proposed model selection procedure  $S_{\lambda^*}^*$  for estimating the function  $S$  from the Sobolev ball  $W_k^k$  is asymptotically efficient. The results of the numerical analysis confirm the efficiency of the procedure and sufficiently fast convergence of the normalized risks to the sharp lower limit defined by the Pinsker constant  $\gamma_k(S)$ .

Keywords: nonparametric heteroscedastic regression; improved estimation; mean square risk; oracle inequalities, asymptotic efficiency.

*PHELINTSEV Evgeny Anatolevich* (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: evgen-pch@yandex.ru

*PERELEVSKY Svyatoslav Sergeevich* (Post-graduate Student, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: slavaperelevskiy@mail.ru

#### REFERENCES

1. Goldfeld, S.M. & Quandt, R.E. (1972) *Nonlinear Methods in Econometrics*. London: North-Holland.
2. Cai, T. & Wang, L. (2008) Adaptive variance function estimation in heteroscedastic nonparametric regression. *Annals of Statistics*. 36(5). pp. 2025–2054.
3. Galtchouk, L. & Pergamenschikov, S. (2011) Adaptive sequential estimation for ergodic diffusion processes in quadratic metric. *Journal of Nonparametric Statistics*. 23(2). pp. 255–285. DOI: 10.1080/10485252.2010.544307
4. Pchelintsev, E.A., Perelevskiy, S.S. & Makarova, I.A. (2018) Improved nonparametric estimation of the drift in diffusion processes. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki – Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series*. 160(2). pp. 364–372.
5. Belomestny, D. & Reiss, M. (2006) Spectral calibration of exponential Levy models. *Finance and Stochastics*. 10(4). pp. 449–474. DOI: 10.1007/s00780-006-0021-5
6. Pchelintsev, E.A. & Perelevskiy, S.S. (2019) Adaptive estimation in a heteroscedastic nonparametric regression. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. no. 57. pp. 38–52. DOI: 10.17223/19988621/57/3
7. Ibragimov, I.A. & Hasminskii, R.Z. (1981) *Statistical Estimation: Asymptotic Theory*. New York: Springer.
8. Efroimovich, S. (2007) Sequential design and estimation in heteroscedastic nonparametric regression. *Sequential Analysis*. 26. pp. 3–25. DOI: 10.1080/07474940601109670
9. Efroimovich, S. & Pinsker, M. (1996) Sharp – optimal and adaptive estimation for heteroscedastic nonparametric regression. *Statistica Sinica*. 6. pp. 925–942.
10. Galtchouk, L. & Pergamenschikov, S. (2009) Adaptive asymptotically efficient estimation in heteroscedastic nonparametric regression. *Journal of the Korean Statistical Society*. 38(4). pp. 305–322. DOI: 10.1016/j.jkss.2008.12.001
11. Pinsker, M.S. (1981) Optimal filtration of square integrable signals in Gaussian white noise. *Problems of Information Transmission*. 17. pp. 120–133.
12. Galtchouk, L. & Pergamenschikov, S. (2009) Sharp non-asymptotic oracle inequalities for nonparametric heteroscedastic regression models. *Journal of Nonparametric Statistics*. 21(1). pp. 1–16. DOI: 10.1080/10485250802504096
13. Pchelintsev, E.A., Pchelintsev, V.A. & Pergamenschikov, S.M. (2019) Improved robust model selection methods for a Lévy nonparametric regression in continuous time. *Journal of Nonparametric Statistics*. 31(3). pp. 1–17. DOI: 10.1080/10485252.2019.1609672.
14. Brua, J.-Y. (2009) Asymptotically efficient estimators for nonparametric heteroscedastic regression models. *Statistical Methodologie*. 6(1). pp. 47–60. DOI: 10.1016/j.stamet.2008.02.009

УДК 519.95

DOI: 10.17223/19988605/49/10

Ф.Г. Фейзиев, М.Р. Мехтиева

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛНОЙ РЕАКЦИИ  
ОДНОГО КЛАССА ДВОИЧНЫХ 3D-МНОГОМЕРНЫХ  
НЕЛИНЕЙНЫХ МОДУЛЯРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Рассматривается вопрос представления полной реакции одного класса двоичных 3D- многомерных нелинейных модулярных динамических систем в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры и нахождение неизвестных коэффициентов этого полинома при известных входной и выходной последовательностях рассматриваемой системы.

**Ключевые слова:** 3D-многомерные нелинейные модулярные динамические системы; многопараметрические системы; фиксированная память; ограниченная связь; двухзначный аналог полинома Вольтерры; неизвестные коэффициенты; рекуррентное соотношение.

Модулярные динамические системы (МДС) [1–6] относятся к классу дискретных динамических систем, в которых входные, выходные последовательности и последовательности состояния принимают значения из конечного поля или кольца (понятие модулярной динамической системы – синоним понятия «конечные последовательностные машины» [7]). МДС широко применяются в вычислительной технике, системах диагностики, кодировании и декодировании дискретных сообщений, в криптографии, моделировании, управлении непрерывных и дискретных объектов и т.д. [1, 2, 5, 6, 8–12].

МДС делится на однопараметрические и многопараметрические классы. Однопараметрические МДС эволюционируют в дискретном времени. Многопараметрические, т.е.  $nD$ -МДС эволюционируют в дискретном времени и  $(n-1)$ -мерном дискретном (клеточном) пространстве и поэтому имеют более широкую возможность применения (здесь  $n$  – натуральное число и  $n \geq 2$ ). Из-за этого они часто привлекают внимание исследователей [13–16].

Постановка и решение теоретических и прикладных задач для  $nD$ -МДС основывается на уравнении, описывающем их поведение в пространстве состояний, или на представлении их полной реакции. В работах [3–6] приведены уравнения в пространстве состояний линейных  $nD$ -МДС в общем виде. В случае нелинейных  $nD$ -МДС целесообразно получить уравнения в пространстве состояний или представлений полной реакции при конкретных значениях  $n$ .

К настоящему времени для описания полной реакции однопараметрических и двухпараметрических нелинейных МДС получено представление в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры [5, 6, 17]. Отметим, что МДС со скалярными входными и выходными последовательностями и МДС с векторными входными и выходными последовательностями имеют разные представления.

В работах [5, 13] двоичные 2D-нелинейные МДС (2D-НМДС), заданные в виде двухзначных аналогов полинома Вольтерры, применены при моделировании некоторых двухпараметрических объектов с распределенными параметрами. Во многих отраслях (нефтегазовая, нефтехимическая, энергетическая и т.д.) объекты управления имеют более двух параметров. Для их моделирования требуется применение  $nD$ -НМДС, где  $n \geq 3$ . В работе [7] получено представление полной реакции 3D-НМДС в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры, где входные и выходные последовательности суть скалярные. А 3D-НМДС с векторными, т.е. многомерными, входными и выходными последовательностями к настоящему времени не исследованы. Несомненный интерес представляет исследование различных задач теории и приложение классов многомерных 3D-НМДС (3D-МНМДС). Поэтому в данной работе рассматривается вопрос вывода формулы аналитического представления полной реакции 3D-МНМДС, заданных входно-выходными соотношениями.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим 3D-МНМДС с фиксированной памятью  $n_0$  и ограниченной связью  $P = P_1 \times P_2$ , полная реакция которых характеризуется следующим функциональным соотношением:

$$y[n, c] = G\{u[\tau, c + p] \mid n - n_0 \leq \tau \leq n, p \in P\}. \quad (1)$$

Здесь  $n \in Z_0$ ,  $c = (c_1, c_2)$ ,  $c_i \in Z$ ,  $i = \overline{1, 2}$ ,  $p = (p_1, p_2) \in P = P_1 \times P_2$ ,  $P_i \subset Z$ ,  $i = \overline{1, 2}$ , где  $Z$  и  $Z_0$  есть множество целых и неотрицательных целых чисел соответственно;  $y[n, c] \in GF^k(2)$  и  $u[n, c] \in GF^r(2)$  – выходная и входная последовательности 3D-МНМДС,  $G\{\dots\} = (G_1\{\dots\}, \dots, G_k\{\dots\})^T$ ,  $GF(2)$  – конечное поле, а  $GF^k(2)$  и  $GF^r(2)$  есть  $k$  и  $r$ -мерные линейные пространства над полем  $GF(2)$ . Выражение  $P_1 \times P_2$  суть декартового произведения множества  $P_1$  и  $P_2$ .

Пусть  $P_i = \{p_i(1), \dots, p_i(r_i)\}$ ,  $p_i(1) < \dots < p_i(r_i)$ ,  $p_i(j) \in \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ ,  $j = \overline{1, r_i}$ ,  $i = \overline{1, 2}$ , и, кроме того,  $p_i(1)$  и  $p_i(r_i)$  конечные целые числа ( $i = \overline{1, 2}$ ). Тогда соотношение (1) можно записать в виде:

$$y_v[n, c_1, c_2] = G_v\{u_j[\tau, c_1 + \rho_1, c_2 + \rho_2] \mid n - n_0 \leq \tau \leq n, \rho_1 \in P_1, \rho_2 \in P_2, j = \overline{1, \dots, r}, v = \overline{1, \dots, k}\}. \quad (2)$$

Задача аналитического представления полной реакции 3D-МНМДС (1) или (2) состоит в представлении отображение  $G\{\dots\}$  в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры и определении неизвестных коэффициентов этого полинома при известных входной и выходной последовательностях 3D-МНМДС.

## 2. Полиномиальное соотношение для представления полной реакции 3D-МНМДС

В (1) для каждой  $v \in \{1, \dots, k\}$  отображение  $G_v\{\dots\}$  можно записать в виде функций  $f_v$ , зависящих от  $(n_0 + 1)r \cdot r_0$  аргументов, и эти аргументы суть элементы множества

$$U = \{u_j[\tau, c + p(\sigma)] \mid n - n_0 \leq \tau \leq n, j \in \{1, \dots, r\}, \sigma \in \{1, \dots, r_0\}\}. \quad (3)$$

Здесь  $r_0 = |P| = r_1 r_2$ , а  $p(\sigma)$  есть  $\sigma$ -й элемент множества  $P$ .

В каждой точке  $(n, c)$  модулярную функцию  $f_v(\dots)$  можно представить в виде полинома над конечным полем  $GF(2)$  с помощью произведения элементов множества  $U$  в различных возможных комбинациях. В возможных разных комбинациях произведений элементов из  $U$  число множителей (степень) может быть от нуля до  $(n_0 + 1)rr_0$  и количество таких произведений суть  $2^{(n_0 + 1)r \cdot r_0}$ . Каждое такое произведение имеет коэффициенты из поля  $GF(2)$ .

Выберем произвольное  $i \in \{0, \dots, (n_0 + 1)rr_0\}$  и рассмотрим произведения элементов из (3) в различных комбинациях, количество множителей которых равна  $i$ . Пусть в произвольно выбранном произведении для каждого  $j \in \{1, \dots, r\}$  и  $p(\sigma) \in P$  из множества  $U_{j, \sigma} = \{u_j[\xi, c + p(\sigma)] \mid \xi = 0, 1, \dots, n_0\}$  участвуют множители, число которых суть  $m_{j, \sigma}$ . Тогда должно быть удовлетворено равенство  $m_{1,1} + \dots + m_{1,n_0} + \dots + m_{r,1} + \dots + m_{r,n_0} = i$ . Пусть

$$\Phi(i) = \{\bar{m} = (m_{1,1}, \dots, m_{1,n_0}, \dots, m_{r,n_0}) \mid m_{j, \sigma} \in \{0, \dots, n_0 + 1\}, j = \overline{1, r}, \sigma = \overline{1, r_0}, m_{1,1} + \dots + m_{1,n_0} + \dots + m_{r,n_0} = i\}, \quad (4)$$

$$Q(i, \bar{m}) = \{\ell \mid \ell \in \{1, \dots, r\} \text{ и } m_{\ell,1} + \dots + m_{\ell,n_0} \neq 0\}, Q_1(i, \bar{m}, j) = \{\sigma_j \mid \sigma_j \in \{1, \dots, r_0\} \text{ и } m_{j, \sigma_j} \neq 0\}. \quad (5)$$

Для каждого набора  $\bar{m} \in \Phi(i)$  произведение со степенью  $i$  в общем виде можно записать следующим образом:

$$\prod_{j \in Q(i, \bar{m})} \prod_{\sigma_j \in Q_1(i, \bar{m}, j)} \prod_{\xi_{j, \sigma_j} = 1}^{m_{j, \sigma_j}} u_j[n - \tau(j, \sigma_j, \xi_{j, \sigma_j}), c + p(\sigma_j)]. \quad (6)$$

Фиксируем  $i \in \{0, \dots, (n_0 + 1)r \cdot r_0\}$  и  $\bar{m} \in \Phi(i)$ . Для всех  $(j, \sigma_j)$ , где  $j \in Q(i, \bar{m})$ ,  $\sigma_j \in \{1, \dots, r_0\}$ , введем обозначения

$$\Gamma_1(m_{j, \sigma_j}) = \{\bar{\tau}_{j, \sigma_j} = (\tau(j, \sigma_j, 1), \dots, \tau(j, \sigma_j, m_{j, \sigma_j})) \mid 0 \leq \tau(j, \sigma_j, 1) < \dots < \tau(j, \sigma_j, m_{j, \sigma_j}) \leq n_0\}. \quad (7)$$

При  $i \in \{0, \dots, (n_0 + 1)r \cdot r_0\}$  и  $\bar{m} \in \Phi(i)$  для всех  $(j, \sigma_j)$ , где  $j \in Q(i, \bar{m})$ ,  $\sigma_j \in \{1, \dots, r_0\}$ , образуем из векторов  $\bar{\tau}_{j, \sigma_j}$  блочный вектор  $\bar{\tau}$ . Множество всех блочных векторов (наборов)  $\bar{\tau}$  обозначим  $\Gamma(i, \bar{m})$ :

$$\Gamma(i, \bar{m}) = \prod_{j \in Q(i, \bar{m})} \Gamma_1(m_{j, \sigma_j}). \quad (8)$$

Очевидно, каждому  $\bar{\tau} \in \Gamma(i, \bar{m})$  соответствует произведение вида (6). Таким образом, справедлива следующая теорема:

**Теорема 1.** Пусть имеют место соотношения (4)–(8). Тогда полная реакция 3D-МНМДС с фиксированной памятью  $n_0$  и ограниченной связью  $P = P_1 \times P_2$ , характеризующаяся соотношением (1), может быть представлена в виде двузначного аналога полинома Вольтерры:

$$y_{\nu}[n, c] = K_{0, \nu} + \sum_{i=1}^{(n_0+1)r \cdot r_0} \sum_{\bar{m} \in \Phi(i)} \sum_{\bar{\tau} \in \Gamma(i, \bar{m})} K_{i, \nu, \bar{m}}[\bar{n}_2] \prod_{j \in Q(i, \bar{m})} \prod_{\sigma_j \in Q_1(i, \bar{m}, j)} \prod_{\xi_{j, \sigma_j}=1}^{m_{j, \sigma_j}} u_j[n - \tau(j, \sigma_j, \xi_{j, \sigma_j}), c + p(\sigma_j)], \quad (9)$$

$$GF(2), \quad \nu = 1, \dots, k.$$

Здесь  $K_{0, \nu}, K_{i, \nu, \bar{m}}[\bar{\tau}]$  – коэффициенты этого полинома, где  $\bar{\tau} \in \Gamma(i, \bar{m})$ ,  $\bar{m} \in \Phi(i)$ ,  $i \in \{1, \dots, (n_0 + 1)rr_0\}$ ,  $\nu \in \{1, \dots, k\}$ .

Теперь рассмотрим построение полиномиального представления для функционального соотношения (2). Для каждого  $\nu \in \{1, \dots, k\}$  отображение  $G_{\nu}\{\dots\}$  можно представить в виде модулярной функций  $f_{\nu}$  от аргументов из множества

$$U = \{u_{\ell}[\sigma, c_1 + p_1, c_2 + p_2] \mid n - n_0 \leq \sigma \leq n, \ell \in \{1, \dots, r\}, p_1 \in P_1, p_2 \in P_2\}.$$

Функции  $f_{\nu}$ ,  $\nu \in \{1, \dots, k\}$  можно представить в виде полинома над полем  $GF(2)$  с помощью произведения элементов  $U$  в разных комбинациях, в которых количество множителей (степень слагаемой) может быть от 0 до  $(n_0 + 1)rr_1r_2$ .

Пусть  $i \in \{1, \dots, (n_0 + 1)rr_1r_2\}$ . Рассмотрим те произведения элементов из множества  $U$  в разных комбинациях, которых степень равна  $i$ . Пусть в произвольно выбранном произведении для каждого  $\ell \in \{1, \dots, r\}$  из множества  $U_{\ell} = \{u_{\ell}[n - \xi, c_1 + p_1(\alpha), c_2 + p_2(\beta)] \mid 0 \leq \xi \leq n_0, 1 \leq \alpha \leq r_1, 1 \leq \beta \leq r_2\}$  участвуют множители количеством  $\eta_{\ell}$ , где  $\eta_1 + \dots + \eta_r = i$ . Ясно, что для некоторых  $\ell \in \{1, \dots, r\}$  может быть  $\eta_{\ell} = 0$ . Введем обозначение:  $\bar{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_r)$ . Пусть

$$\Lambda(i) = \{\bar{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_r) \mid \eta_1 + \dots + \eta_r = i, \eta_{\alpha} \in \{0, 1, \dots, (n_0 + 1)r_1r_2\}, \alpha = \overline{1, r}\}, \quad (10)$$

$$Q_0(\bar{\eta}) = \{\ell \mid j \in \{1, \dots, r\} \text{ и } \eta_{\ell} \neq 0; \eta_{\ell} \text{ есть компонент вектора } \bar{\eta}\}, \quad (11)$$

$$\Phi_{\ell}(\eta_{\ell}) = \{\bar{m}_{\ell} = (m_{\ell, 1, 1}, \dots, m_{\ell, \eta_{\ell}, r_2}) \mid \sum_{\alpha=1}^{\eta_{\ell}} \sum_{\beta=1}^{r_2} m_{\ell, \alpha, \beta} = \eta_{\ell}, m_{\ell, \alpha, \beta} \in \{0, \dots, n_0 + 1\}, \alpha = \overline{1, r_1}, \beta = \overline{1, r_2}\}, \quad (12)$$

$$Q_{\ell}(\eta_{\ell}, \bar{m}_{\ell}) = \{(\alpha, \beta) \mid m_{\ell, \alpha, \beta} \text{ есть компонента } \bar{m}_{\ell} \text{ и } m_{\ell, \alpha, \beta} \neq 0, \alpha = \overline{1, r_1}, \beta = \overline{1, r_2}\}. \quad (13)$$

С этими обозначениями, рассмотренное произведение можно записать в виде:

$$\prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} \prod_{(\alpha_{\ell}, \beta_{\ell}) \in Q_{\ell}(\eta_{\ell}, \bar{m}_{\ell})} \prod_{\sigma=1}^{m_{\ell, \alpha_{\ell}, \beta_{\ell}}} u_{\ell}[n - \tau(\alpha_{\ell}, \beta_{\ell}, \sigma), c_1 + p_1(\alpha_{\ell}), c_2 + p_2(\beta_{\ell})]. \quad (14)$$

Введем следующие множества:

$$\Phi(\bar{\eta}) = \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} \Phi_{\ell}(\eta_{\ell}), \quad Q(\bar{\eta}, \bar{m}) = \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} Q_{\ell}(\eta_{\ell}, \bar{m}_{\ell}), \quad \bar{m} = (\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_r), \quad (15)$$

$$\Gamma_{\ell, \alpha, \beta}(m_{\ell, \alpha, \beta}) = \{\bar{\tau}_{\ell, \alpha, \beta} = (\tau_{\ell}(\alpha, \beta, 1), \dots, \tau_{\ell}(\alpha, \beta, m_{\ell, \alpha, \beta})) \mid 0 \leq \tau_{\ell}(\alpha, \beta, 1) < \dots < \tau_{\ell}(\alpha, \beta, m_{\ell, \alpha, \beta}) \leq n_0\}. \quad (16)$$

Для всех  $(\alpha, \beta) \in Q_\ell(\eta_\ell, \bar{m}_\ell)$  образуем из векторов  $\bar{\tau}_{\ell, \alpha, \beta}$  блочный вектор  $\bar{\bar{\tau}}$ . Множество всех блочных векторов (наборов)  $\bar{\bar{\tau}}$  обозначим через  $\Gamma_\ell(\eta_\ell, \bar{m}_\ell)$ :

$$\Gamma_\ell(\eta_\ell, \bar{m}_\ell) = \prod_{(\alpha, \beta) \in Q_\ell(\eta_\ell, \bar{m}_\ell)} \Gamma_{\ell, \alpha, \beta}(m_{\ell, \alpha, \beta}). \quad (17)$$

Пусть

$$\Gamma(\bar{\eta}, \bar{\bar{m}}) = \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} \Gamma_\ell(\eta_\ell, \bar{m}_\ell). \quad (18)$$

Элементы множества  $\Gamma(\bar{\eta}, \bar{\bar{m}})$  обозначим через  $\bar{\bar{\tau}}$ . Ясно, что каждому  $\bar{\bar{\tau}} \in \Gamma(i, \bar{\bar{m}})$  соответствует произведение вида (13). Используя (10)–(18) можем записать:

$$y_v[n, c_1, c_2] = K_{0, v} + \sum_{i=1}^{(n_0+1)r_1r_2} \sum_{\bar{\eta} \in \Lambda(i)} \sum_{\bar{m} \in \Phi(\bar{\eta})} \sum_{\bar{\bar{\tau}} \in \Gamma(\bar{\eta}, \bar{\bar{m}})} K_{i, v, \bar{\eta}, \bar{\bar{m}}}[\bar{\bar{\tau}}] \times \\ \times \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} \prod_{(\alpha, \beta) \in Q_\ell(\eta_\ell, \bar{m}_\ell)} \prod_{\sigma=1}^{m_{\ell, \alpha, \beta}} u_\ell[n - \tau_\ell(\alpha, \beta, \sigma), c_1 + p_1(\alpha, \beta), c_2 + p_2(\alpha, \beta)], GF(2), v = \overline{1, k}. \quad (19)$$

Пусть  $i \in \{1, \dots, r_1r_2(n_0+1)\}$ ,  $\bar{\eta} \in \Lambda(i)$ ,  $\ell \in Q_0(\bar{\eta})$ ,  $\bar{m}_\ell \in \Phi_\ell(\eta_\ell)$ ,  $A_\ell(\bar{m}_\ell) = (m_{\ell, \alpha, \beta})$ ,  $\alpha = \overline{1, r_1}$ ,  $\beta = \overline{1, r_2}$ . Удаляя нулевые столбцы и строки матрицы  $A_\ell(\bar{m}_\ell)$ , построим матрицу  $B_\ell(\bar{m}_\ell)$ . Для всех элементов множества  $\Phi_\ell(\eta_\ell)$  вышеуказанным путем построим соответствующую матрицу  $B(\bar{m}_\ell)$ . Из элементов множества  $\Phi_\ell(\eta_\ell)$  построим специальные подмножества следующим образом: 1) любой элемент из множества  $\Phi_\ell(\eta_\ell)$  входит в одно и только в одно специальное подмножество; 2) если для элементов  $\bar{m}'_\ell$  и  $\bar{m}''_\ell$  из множества  $\Phi_\ell(\eta_\ell)$ , соответствующие матрицы  $B(\bar{m}'_\ell)$  и  $B(\bar{m}''_\ell)$  совпадают, тогда оба элемента входят в одно и то же специальное подмножество. Обозначим через  $\lambda(\eta_\ell)$  количество специальных подмножеств множества  $\Phi_\ell(\eta_\ell)$ .  $i_\ell$ -е специальное подмножество обозначим через  $\Phi'_\ell(\eta_\ell, i_\ell)$ . Рассмотрим какое-либо подмножество  $\Phi'_\ell(\eta_\ell, i_\ell)$  множества  $\Phi_\ell(\eta_\ell)$ . Пусть этому подмножеству соответствует матрица  $B$  размерностью  $\gamma_1(\ell) \times \gamma_2(\ell)$ :

$$B = (m'_{\alpha, \beta}), \quad \alpha = \overline{1, \gamma_1(\ell)}, \quad \beta = \overline{1, \gamma_2(\ell)}.$$

Тогда элементы множества  $\Phi'_\ell(\eta_\ell, i_\ell)$  можно представить в следующем виде

$$m_{j_{\alpha}(\ell), \tau_{\beta}(\ell)} = m'_{\alpha, \beta}, \quad \alpha = \overline{1, \gamma_1(\ell)}, \quad \beta = \overline{1, \gamma_2(\ell)}, \quad m_{\sigma, \gamma} = 0, \quad (\sigma, \gamma) \notin \{j_1, j_2, \dots, j_{\gamma_1}(\ell)\} \times \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{\gamma_2}(\ell)\}.$$

Каждой паре  $(\bar{j}(\ell), \bar{\mu}(\ell))$  соответствует элемент из множества  $\Phi'_\ell(\eta_\ell, i_\ell)$ . Здесь  $\bar{j}(\ell) = (j_1(\ell), \dots, j_{\gamma_1(\ell)}(\ell))$  и  $\bar{\tau}(\ell) = (\tau_1(\ell), \dots, \tau_{\gamma_2(\ell)}(\ell))$  являются наборами соответственно в  $L_{\ell, 1}(\gamma_1(\ell))$  и  $L_{\ell, 2}(\gamma_2(\ell))$ , где

$$L_{\ell, 1}(\gamma_1(\ell)) = \{\bar{j}(\ell) = (j_1(\ell), \dots, j_{\gamma_1(\ell)}(\ell)) \mid 1 \leq j_1(\ell) < \dots < j_{\gamma_1(\ell)}(\ell) \leq r_1\}, \\ L_{\ell, 2}(\gamma_2(\ell)) = \{\bar{\mu}(\ell) = (\mu_1(\ell), \dots, \mu_{\gamma_2(\ell)}(\ell)) \mid 1 \leq \mu_1(\ell) < \dots < \mu_{\gamma_2(\ell)}(\ell) \leq r_2\}. \quad (20)$$

Введем следующее обозначение

$$F_\ell(\eta_\ell) = \left\{ (\gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_\ell) \mid \bar{m}_\ell = (m_{\ell, 1, 1}, \dots, m_{\ell, 1, \gamma_2(\ell)}, \dots, m_{\ell, \gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell)}), \sum_{\alpha=1}^{\gamma_1(\ell)} \sum_{\beta=1}^{\gamma_2(\ell)} m_{\ell, \alpha, \beta} = \eta_\ell; \right. \\ \left. m_{\ell, \alpha, \beta} \in \{0, \dots, n_0 + 1\}, \alpha = \overline{1, \gamma_1(\ell)}, \beta = \overline{1, \gamma_2(\ell)}; (\forall \alpha \in \{1, \dots, \gamma_1(\ell)\}) (\exists \beta \in \{1, \dots, \gamma_2(\ell)\}) \Rightarrow (m_{\ell, \alpha, \beta} \neq 0); \right. \\ \left. (\forall \beta \in \{1, \dots, \gamma_2(\ell)\}) (\exists \alpha \in \{1, \dots, \gamma_1(\ell)\}) \Rightarrow (m_{\ell, \alpha, \beta} \neq 0); \gamma_\sigma(\ell) \in \{1, \dots, r_\sigma\}, \sigma = \overline{1, 2} \right\}; \quad (21)$$

$$Q'_\ell(\eta_\ell, \gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_\ell) = \{(\alpha, \beta) \mid m_{\ell, \alpha, \beta} \text{ есть компонента } \bar{m}_\ell \text{ и } m_{\ell, \alpha, \beta} \neq 0, \alpha = \overline{1, \gamma_1(\ell)}, \beta = \overline{1, \gamma_2(\ell)}\},$$

$$F(\bar{\eta}) = \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} F_\ell(\eta_\ell), \quad L_1 = \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} L_{\ell, 1}(\gamma_1(\ell)), \quad L_2 = \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} L_{\ell, 2}(\gamma_2(\ell)), \quad (22)$$

$$\gamma_1 = (\gamma_1(1), \dots, \gamma_1(r)), \quad \gamma_2 = (\gamma_2(1), \dots, \gamma_2(r)), \quad \bar{j} = (\bar{j}(1), \dots, \bar{j}(r)), \quad \bar{\mu} = (\bar{\mu}(1), \dots, \bar{\mu}(r)), \quad \bar{\bar{m}} = (\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_r).$$

Ясно, что элементы множества  $F(\bar{\eta})$  суть набор в виде  $(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})$  и  $(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m}) = ((\gamma_1(\ell_1), \gamma_2(\ell_1), \bar{m}_{\ell_1}), \dots, (\gamma_1(\ell_R), \gamma_2(\ell_R), \bar{m}_{\ell_R}))$ , где  $R = |Q_0(\bar{\eta})|$ , а  $\ell_1, \dots, \ell_R$  суть номера ненулевых компонентов  $\bar{\eta} \in \Lambda(i)$ . Каждому  $(\gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_{\ell}) \in F_{\ell}(\eta_{\ell})$  соответствует одно специальное подмножество множества  $\Phi_{\ell}(\eta_{\ell})$ . Поэтому  $\lambda(\eta_{\ell}) = |F_{\ell}(\eta_{\ell})|$  и  $|F(\bar{\eta})| = \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} \lambda_{\ell}(\eta_{\ell})$ .

При  $\bar{\tau}_{\ell, \alpha, \beta} \in \Gamma_{\ell, \alpha, \beta}(m_{\ell, \alpha, \beta})$ ,  $(\alpha, \beta) \in Q'_{\ell}(\eta_{\ell}, \gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_{\ell})$ ,  $\alpha = \overline{1, \gamma_1(\ell)}$ ,  $\beta = \overline{1, \gamma_2(\ell)}$ , множество всех блочных векторов (наборов)  $\bar{\tau}_{\ell}$  обозначим через  $\Gamma_{\ell}(\gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_{\ell})$ . Пусть

$$\Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m}) = \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} \Gamma_{\ell}(\gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_{\ell}) \quad (23)$$

и элементы множества  $\Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})$  обозначим через  $\bar{\tau}$ .

**Теорема 2.** Пусть имеют место соотношения (10)–(18) и (20)–(23). Тогда полная реакция 3D-МНМДС с фиксированной памятью  $n_0$  и ограниченной связью  $P = P_1 \times P_2$ , характеризующаяся соотношением (2), может быть представлена в виде следующего двухзначного аналога полинома Вольтерры:

$$y_{\nu}[n, c_1, c_2] = K_{0, \nu} + \sum_{i=1}^{(n_0+1)rr_2} \sum_{\bar{\eta} \in \Lambda(i)} \sum_{(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m}) \in F(\bar{\eta})} \sum_{(\bar{j}, \bar{\mu}) \in L_1 \times L_2} \sum_{\bar{\tau} \in \Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})} h_{i, \nu, \bar{\eta}, (\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})}[\bar{j}, \bar{\mu}, \bar{\tau}] \times \\ \times \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} \prod_{(\alpha_{\ell}, \beta_{\ell}) \in Q'_{\ell}(\eta_{\ell}, \gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_{\ell})} \prod_{\sigma=1}^{m_{\ell, \alpha_{\ell}, \beta_{\ell}}} u_{\ell}[n - \tau(\alpha_{\ell}, \beta_{\ell}, \sigma), c_1 + p_1(j_{\alpha_{\ell}}(\ell)), c_2 + p_2(\mu_{\beta_{\ell}}(\ell))], GF(2), \nu = \overline{1, k}. \quad (24)$$

### 3. Нахождение неизвестных коэффициентов полиномиальных представлений для полной реакции 3D-МНМДС

Пусть при заданных значениях входной последовательности  $u_j[\gamma, c + p]$ ,  $n - n_0 \leq \gamma \leq n$ ,  $p \in P$ ,  $j = \overline{1, r}$ , известны значения выходной последовательности. Найдём в полиноме (9) коэффициенты  $K_{0, \nu}$ ,  $K_{i, \nu, \bar{m}}[\bar{n}_2]$ ,  $\nu = \overline{1, k}$ , для всех  $\bar{n}_2 \in \Gamma(i, \bar{m})$ ,  $\bar{m} \in \Phi(i)$ ,  $i \in \{1, \dots, (n_0 + 1)rr_0\}$  соответствующие известным входной и выходной последовательностям.

Число неизвестных коэффициентов в полиноме (9) составляет  $2^{(n_0+1)r \cdot r_0}$ . Число всевозможных различных наборов значений  $u_j[\gamma, c + p]$ ,  $n - n_0 \leq \gamma \leq n$ ,  $p \in P$ ,  $j = \overline{1, r}$ , также равно  $2^{(n_0+1)r \cdot r_0}$ . Учитывая в правой части полинома (9) всевозможные различные наборы значений  $u_j[\gamma, c + p]$ ,  $n - n_0 \leq \gamma \leq n$ ,  $p \in P$ ,  $j = \overline{1, r}$ , можно получить систему над  $GF(2)$  из  $2^{(n_0+1)r \cdot r_0}$  линейных алгебраических уравнений с  $2^{(n_0+1)r \cdot r_0}$  неизвестными. Коэффициенты неизвестных в этой системе образуются из произведений известных значений  $u_j[\gamma, c + p]$ ,  $n - n_0 \leq \gamma \leq n$ ,  $p \in P$ ,  $j = \overline{1, r}$ . Ясно, что эта система имеет единственное решение. Структура полученной системы алгебраических уравнений такова, что для ее решения можно построить рекуррентные соотношения.

Ясно, что для каждого  $k \in \{1, \dots, r\}$

$$y_{\nu}[n, c] = f_{\nu}(u_1[n, c + p(1)], \dots, u_1[n - n_0, c + p(1)], \dots, u_1[n - n_0, c + p(r_0)], \dots, u_r[n - n_0, c + p(r_0)]).$$

Из (9) видно, что

$$K_{0, \nu} = f_{\nu}(0, \dots, 0, \dots, 0, \dots, 0). \quad (25)$$

Положим

$$X = \{u_j[n - \tau, c + p(\sigma)] \mid \tau = 0, \dots, n_0; \sigma = 1, \dots, r_0; j = 1, \dots, r\}. \quad (26)$$

Пусть  $u_j[n-\tau, c+p(\sigma)]=1$ , а остальные переменные из  $X$  принимают значения 0, где  $\tau \in \{0, \dots, n_0\}$ ,  $\sigma \in \{1, \dots, r_0\}$ ,  $j \in \{1, \dots, r\}$ . В этом случае обозначим значение функции  $f_v(\dots)$  через  $f_v(u_j[n-\tau, c+p(\sigma)]=1)$ . Учитывая значения переменных множества  $X$ , из (9) получаем

$$K_{1,v,(1_{j,\sigma})}((\tau)) = K_{0,v} + f_v(u_j[n-\tau, c+p(\sigma)]=1), \quad GF(2), \quad (27)$$

где здесь через  $(1_{j,\sigma})$  обозначен элемент  $\bar{m} \in \Phi(1)$ , в котором  $m_{j,\sigma} = 1$ , а остальные компоненты этого элемента суть 0.

Пусть  $u_{j_\lambda}[n-\tau_{\lambda,\alpha,\xi}, c+p(\sigma_{\lambda,\alpha})]=1$ ,  $\xi = \overline{1, \ell_{\lambda,\alpha}}$ ,  $\alpha = \overline{1, \theta_\lambda}$ ,  $\lambda = \overline{1, g}$ , где  $j_\lambda \in \{1, \dots, r\}$ ,  $\sigma_{\lambda,\alpha} \in \{1, \dots, r_0\}$ ,  $\tau_{\lambda,\alpha,\xi} \in \{0, \dots, n_0\}$ , а остальные переменные из множества  $X$  принимают значения 0. При этом через  $f_v(u_{j_\lambda}[n-\tau_{\lambda,\alpha,\xi}, c+p(\sigma_{\lambda,\alpha})]=1 | \xi = \overline{1, \ell_{\lambda,\alpha}}, \alpha = \overline{1, \theta_\lambda}, \lambda = \overline{1, g})$  обозначено значение функции  $f_v(\dots)$ . Введем обозначения:

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_g), \quad \bar{\ell} = ((\ell_{1,1}, \dots, \ell_{1,\theta_1}), \dots, (\ell_{g,1}, \dots, \ell_{g,\theta_g})), \quad S = \ell_{1,1} + \dots + \ell_{1,\theta_1} + \dots + \ell_{g,1} + \dots + \ell_{g,\theta_g}. \quad (28)$$

Тогда полином, образованный из элементов множества

$$\{u_{j_\lambda}[n-\tau_{\lambda,\alpha,\xi}, c+p(\sigma_{\lambda,\alpha})] | \xi = \overline{1, \ell_{\lambda,\alpha}}, \alpha = \overline{1, \theta_\lambda}, \lambda = \overline{1, g}\}$$

можно записать следующим виде:

$$\begin{aligned} & f_v(u_{j_\lambda}[n-\tau_{\lambda,\alpha,\xi}, c+p(\sigma_{\lambda,\alpha})]=1 | \xi = \overline{1, \ell_{\lambda,\alpha}}, \alpha = \overline{1, \theta_\lambda}, \lambda = \overline{1, g}) = \\ & = K_{0,v} + \sum_{\omega=1}^S \sum_{(\mu, \bar{\eta}, \bar{\beta}, \bar{\rho}) \in F_2(\omega, g, \bar{\theta}, \bar{\ell})} \sum_{\bar{\pi} \in \Omega_{\mu, \bar{\eta}, \bar{\beta}, \bar{\rho}}(\bar{\ell})} K_{\omega, v, A} [B] \prod_{\nu=1}^{\mu} \prod_{\alpha=1}^{\eta_{\chi_\nu}} \prod_{\xi=1}^{\beta_{\chi_\nu, \rho_{\chi_\nu, \alpha}}} x(j_{\chi_\nu}, \sigma_{\chi_\nu, \rho_{\chi_\nu, \alpha}}, \tau_{\rho_{\chi_\nu, \alpha}}, \pi_{\chi_\nu, \rho_{\chi_\nu, \alpha}, \xi}), \end{aligned} \quad (29)$$

$GF(2), v = 1, \dots, k,$

где  $A$  и  $B$  есть следующие наборы:

$$A = ((\beta_{\chi_1, \sigma_{\rho_{\chi_1, 1}}}, \dots, \beta_{\chi_1, \sigma_{\rho_{\chi_1, \eta_{\chi_1}}}}), \dots, (\beta_{\chi_\mu, \sigma_{\rho_{\chi_\mu, 1}}}, \dots, \beta_{\chi_\mu, \sigma_{\rho_{\chi_\mu, \eta_{\chi_\mu}}}})), \quad (30)$$

$$\begin{aligned} B = & ((\tau_{\rho_{\chi_1, 1}}, \pi_{\chi_1, \rho_{\chi_1, 1}}, \dots, \tau_{\rho_{\chi_1, 1}, \beta_{\chi_1, \rho_{\chi_1, 1}}}, \dots, (\tau_{\rho_{\chi_1, \eta_{\chi_1}}}, \pi_{\chi_1, \rho_{\chi_1, \eta_{\chi_1}}}, \dots, \tau_{\rho_{\chi_1, \eta_{\chi_1}}, \beta_{\chi_1, \rho_{\chi_1, \eta_{\chi_1}}}}), \dots, \\ & (\tau_{\rho_{\chi_\mu, \eta_{\chi_\mu}}}, \pi_{\chi_\mu, \rho_{\chi_\mu, \eta_{\chi_\mu}}}, \dots, \tau_{\rho_{\chi_\mu, \eta_{\chi_\mu}}, \beta_{\chi_\mu, \rho_{\chi_\mu, \eta_{\chi_\mu}}}})). \end{aligned} \quad (31)$$

В (29) множества  $F_2(\omega, g, \bar{\theta}, \bar{\ell})$  и  $\Omega_{\mu, \bar{\eta}, \bar{\beta}, \bar{\rho}}(\bar{\ell})$  есть следующие множества:

$$\begin{aligned} F_2(\omega, g, \bar{\theta}, \bar{\ell}) = & \{(\mu, \bar{\eta}, \bar{\beta}, \bar{\rho}) | 1 \leq \mu \leq g, \bar{\eta} = (\eta_{\chi_1}, \dots, \eta_{\chi_\mu}), 1 \leq \eta_{\chi_\nu} \leq \theta_{\chi_\nu}, \bar{\chi} = (\chi_1, \dots, \chi_\mu) \in V_\mu(g), \\ & \bar{\beta} = (\beta_{\chi_1}, \dots, \beta_{\chi_\mu}), \bar{\beta}_{\chi_\nu} = (\beta_{\chi_\nu, \rho_{\chi_\nu, 1}}, \dots, \beta_{\chi_\nu, \rho_{\chi_\nu, \eta_{\chi_\nu}}}), 1 \leq \beta_{\chi_\nu, \rho_{\chi_\nu, \alpha}} \leq \ell_{\chi_\nu, \rho_{\chi_\nu, \alpha}}, \nu = \overline{1, \mu}, \alpha = \overline{1, \eta_{\chi_\nu}}, \\ & \bar{\rho} = (\rho_{\chi_1}, \dots, \rho_{\chi_\mu}), \bar{\rho}_{\chi_\nu} = (\rho_{\chi_\nu, 1}, \dots, \rho_{\chi_\nu, \eta_{\chi_\nu}}) \in N_{\eta_{\chi_\nu}}(\theta_{\chi_\nu}), \nu = \overline{1, \mu}, \sum_{\nu=1}^{\mu} \sum_{\alpha=1}^{\eta_{\chi_\nu}} \beta_{\chi_\nu, \rho_{\chi_\nu, \alpha}} = \omega\}. \end{aligned} \quad (32)$$

$$\Omega_{\mu, \bar{\eta}, \bar{\beta}, \bar{\rho}}(\bar{\ell}) = \prod_{\nu=1}^{\mu} \prod_{\alpha=1}^{\eta_{\chi_\nu}} \Omega_{\chi_\nu, \rho_{\chi_\nu, \alpha}}(\ell_{\chi_\nu, \rho_{\chi_\nu, \alpha}}), \quad (33)$$

где

$$V_\mu(g) = \{\bar{\chi} = (\chi_1, \dots, \chi_\mu) | 1 \leq \chi_1 < \dots < \chi_\mu \leq g\}, \quad (34)$$

$$N_{\eta_{\chi_\nu}}(\theta_{\chi_\nu}) = \{\bar{\rho}_{\chi_\nu} = (\rho_{\chi_\nu, 1}, \dots, \rho_{\chi_\nu, \eta_{\chi_\nu}}) | 1 \leq \rho_{\chi_\nu, 1} < \dots < \rho_{\chi_\nu, \eta_{\chi_\nu}} \leq \theta_{\chi_\nu}\}, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{\chi_\nu, \rho_{\chi_\nu, \alpha}}(\ell_{\chi_\nu, \rho_{\chi_\nu, \alpha}}) = & \{\bar{\pi}_{\chi_\nu, \rho_{\chi_\nu, \alpha}} = (\pi_{\chi_\nu, \rho_{\chi_\nu, \alpha}, 1}, \dots, \pi_{\chi_\nu, \rho_{\chi_\nu, \alpha}, \beta_{\chi_\nu, \rho_{\chi_\nu, \alpha}}}) | 1 \leq \pi_{\chi_\nu, \rho_{\chi_\nu, \alpha}, 1} < \dots \\ & \dots < \pi_{\chi_\nu, \rho_{\chi_\nu, \alpha}, \beta_{\chi_\nu, \rho_{\chi_\nu, \alpha}}} \leq \ell_{\chi_\nu, \rho_{\chi_\nu, \alpha}}\}. \end{aligned} \quad (36)$$

Ясно, что в правой части формулы слагаемое, соответствующее степени  $S$  имеет коэффициент

$$K_{S, v, ((\ell_{1,1}, \dots, \ell_{1,\theta_1}), \dots, (\ell_{g,1}, \dots, \ell_{g,\theta_g}))}(((\tau_{1,1,1}, \dots, \tau_{1,1,\ell_{1,1}}), \dots, (\tau_{1,\theta_1,1}, \dots, \tau_{1,\theta_1,\ell_{1,\theta_1}}), \dots, (\tau_{g,\theta_g,1}, \dots, \tau_{g,\theta_g,\ell_{g,\theta_g}}))).$$

Поэтому из-за  $u_{j_\lambda} [n - \tau_{\lambda,\alpha,\xi}, c + p(\sigma_{\lambda,\alpha})] = 1$ ,  $\xi = \overline{1, \ell_{\lambda,\alpha}}$ ,  $\alpha = \overline{1, \theta_\lambda}$ ,  $\lambda = \overline{1, g}$ , из формулы (29) получим

$$\begin{aligned} & K_{S,v,((\ell_{1,1}, \dots, \ell_{1,\theta_1}), \dots, (\ell_{g,1}, \dots, \ell_{g,\theta_g}))} [((\tau_{1,1,1}, \dots, \tau_{1,1,\ell_{1,1}}), \dots, (\tau_{1,\theta_1,1}, \dots, \tau_{1,\theta_1,\ell_{1,\theta_1}}), \dots, (\tau_{g,\theta_g,1}, \dots, \tau_{g,\theta_g,\ell_{g,\theta_g}}))] = \\ & = f_v(u_{j_\lambda} [n - \tau_{\lambda,\alpha,\xi}, c + p(\sigma_{\lambda,\alpha})] = 1 \mid \xi = \overline{1, \ell_{\lambda,\alpha}}, \alpha = \overline{1, \theta_\lambda}) + K_{0,v} + \sum_{\omega=1}^{S-1} \sum_{(\mu, \bar{\eta}, \bar{\beta}, \bar{\rho}) \in F_2(\omega, g, \bar{\theta}, \bar{\ell})} \sum_{\bar{\pi} \in \Omega_{\mu, \bar{\eta}, \bar{\beta}, \bar{\rho}}(\bar{\ell})} K_{\omega,v,A}[B] \times \\ & \quad \times \prod_{v=1}^{\mu} \prod_{\alpha=1}^{\eta_{\lambda v}} \prod_{\xi=1}^{\beta_{\lambda v, \rho_{\lambda v, \alpha}}} x(j_{\lambda v}, \sigma_{\lambda v, \rho_{\lambda v, \alpha}}, \tau_{\rho_{\lambda v, \alpha}, \pi_{\lambda v, \rho_{\lambda v, \alpha}, \xi}}, GF(2), v = 1, \dots, k). \end{aligned} \quad (37)$$

Таким образом, получаем доказательства следующей леммы:

Лемма 1. Пусть  $u_{j_\lambda} [n - \tau_{\lambda,\alpha,\xi}, c + p(\sigma_{\lambda,\alpha})] = 1$ ,  $\xi = \overline{1, \ell_{\lambda,\alpha}}$ ,  $\alpha = \overline{1, \theta_\lambda}$ ,  $\lambda = \overline{1, g}$ , где  $j_\lambda \in \{1, \dots, r\}$ ,  $\sigma_{\lambda,\alpha} \in \{1, \dots, r_0\}$ ,  $\tau_{\lambda,\alpha,\xi} \in \{0, \dots, n_0\}$ , а остальные переменные из множества  $X$  принимают значения 0. При этом через  $f_v(u_{j_\lambda} [n - \tau_{\lambda,\alpha,\xi}, c + p(\sigma_{\lambda,\alpha})] = 1 \mid \xi = \overline{1, \ell_{\lambda,\alpha}}, \alpha = \overline{1, \theta_\lambda}, \lambda = \overline{1, g})$  обозначено значение функции  $f_v(\dots)$ . Пусть имеет место (28)–(36). Тогда справедливо формула (37).

При произвольных  $\bar{\tau} \in \Gamma(i, \bar{m})$ ,  $\bar{m} \in \Phi(i)$ ,  $v \in \{1, \dots, k\}$  и  $i \in \{1, \dots, (n_0 + 1)r \cdot r_0\}$  коэффициента  $K_{i,v,\bar{m}}[\bar{\tau}]$  определяется на основе следующей теоремы:

Теорема 3. Пусть: 1<sup>0</sup>.  $\bar{m} \in \Phi(i)$ , где  $i \in \{1, \dots, (n_0 + 1)rR\}$ ; 2<sup>0</sup>. Ненулевые элементы набора  $\bar{m}$  есть  $m_{j,\sigma_j}$ , где  $\sigma_j \in Q_1(i, \bar{m}, j)$ ,  $j \in Q(i, \bar{m})$ ; 3<sup>0</sup>.  $Q(i, \bar{m}) = \{j_1, \dots, j_g\}$ ,  $Q_1(i, \bar{m}, j_\lambda) = \{\sigma_{\lambda,1}, \dots, \sigma_{\lambda,\theta_\lambda}\}$ , где  $j_\lambda = \overline{1, r}$ ,  $\sigma_{\lambda,\alpha} = \overline{1, r_0}$ ,  $\alpha = \overline{1, \theta_\lambda}$ ,  $\lambda = \overline{1, g}$ ; 4<sup>0</sup>. Множества  $\Gamma_1(m_{j_\lambda, \sigma_{\lambda,\alpha}})$ ,  $\alpha = \overline{1, \theta_\lambda}$ ,  $\lambda = \overline{1, g}$ , есть следующие множества

$$\begin{aligned} \Gamma_1(m_{j_\lambda, \sigma_{\lambda,\alpha}}) &= \{ \bar{\tau}(j_\lambda, \sigma_{\lambda,\alpha}) = (\tau(j_\lambda, \sigma_{\lambda,\alpha}, 1), \dots, \tau(j_\lambda, \sigma_{\lambda,\alpha}, m_{j_\lambda, \sigma_{\lambda,\alpha}})) \mid 0 \leq \\ & \leq \tau(j_\lambda, \sigma_{\lambda,\alpha}, 1) < \dots < \tau(j_\lambda, \sigma_{\lambda,\alpha}, m_{j_\lambda, \sigma_{\lambda,\alpha}}) \leq n_0 \}; \end{aligned}$$

5<sup>0</sup>.  $\ell_{\lambda,\alpha} = m_{j_\lambda, \sigma_{\lambda,\alpha}}$ ,  $\alpha = \overline{1, \theta_\lambda}$ ,  $\lambda = \overline{1, g}$ ; 6<sup>0</sup>. В случае, когда  $u_{j_\lambda} [n - \tau(\lambda, \alpha, \xi), c + p(\sigma_{\lambda,\alpha})] = 1$ ,  $\xi = \overline{1, \ell_{\lambda,\alpha}}$ ,  $\alpha = \overline{1, \theta_\lambda}$ ,  $\lambda = \overline{1, g}$ , где  $\theta_\lambda \leq r$ ,  $\ell_{\lambda,\alpha} \leq n_0 + 1$ ,  $g \leq k$ ,  $j_\lambda \in \{1, \dots, r\}$ ,  $\sigma_{\lambda,\alpha} \in \{1, \dots, R\}$ ,  $\tau(\lambda, \alpha, \xi) \in \{0, \dots, n_0\}$ , а остальные переменные из множества  $X$  принимают значения 0, для каждого  $v \in \{1, \dots, k\}$  через  $f_v(u_{j_\lambda} [n - \tau(\lambda, \alpha, \xi), c + p(\sigma_{\lambda,\alpha})] = 1 \mid \xi = \overline{1, \ell_{\lambda,\alpha}}, \alpha = \overline{1, \theta_\lambda}, \lambda = \overline{1, g})$  обозначено значение функции  $f_v(\dots)$ ; 7<sup>0</sup>. Имеют место соотношения (30)–(36). Тогда множества  $\Gamma(i, \bar{m})$  содержит следующий единственный элемент

$$\bar{\tau} = ( (\tau(1,1,1), \dots, \tau(1,1,\ell_{1,1})), \dots, (\tau(1,\theta_1,1), \dots, \tau(1,\theta_1,\ell_{1,\theta_1})), \dots, (\tau(g,\theta_g,1), \dots, \tau(g,\theta_g,\ell_{g,\theta_g})) )$$

и для коэффициента  $K_{i,v,\bar{m}}[\bar{\tau}]$  полинома (9) справедлива следующая формула:

$$\begin{aligned} K_{i,v,\bar{m}}[\bar{\tau}] &= f_v(u_{j_\lambda} [n - \tau(\lambda, \alpha, \xi), c + p(\sigma_{\lambda,\alpha})] = 1 \mid \xi = \overline{1, \ell_{\lambda,\alpha}}, \alpha = \overline{1, \theta_\lambda}, \lambda = \overline{1, g}) + \\ & + K_{0,v} + \sum_{\omega=0}^{i-1} \sum_{(\mu, \bar{b}, \bar{\beta}, \bar{\rho}) \in F_2(\omega, g, \bar{\theta}, \bar{\ell})} \sum_{\bar{\pi} \in \Omega_{\mu, \bar{b}, \bar{\beta}, \bar{\rho}}(\bar{\ell})} K_{\omega,v,A}[B], GF(2), v = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (38)$$

Доказательство теоремы 3 можно проводить на основе леммы 1.

Формула (38) вместе с формулами (25), (27) определяют рекуррентное соотношение для нахождения коэффициентов полинома (9) при известных значениях входных и выходных последовательностей 3D-МНМДС.

*Замечание.* 1) В формулах (8), (15), (17), (18), (22), (23) и (33) знак  $\prod$  есть знак операции декартового произведения множеств; 2) Присутствие записи  $GF(2)$  в формулах (9), (19), (24), (27), (29), (37) и (38) указывает, что эти формулы выполняются над полем  $GF(2)$ , т.е. операция сложения и умножения есть сложение и умножение по mod 2.



## Заключение

Двухзначные аналоги полинома Вольтерры в виде (9), (19), (24), являются общим функциональным соотношением для некоторых классов 3D-МНМДС с фиксированной памятью  $n_0$  и ограниченной связью  $P = P_1 \times P_2$  и могут быть использованы при исследовании их различных свойств, при постановке и решении для них различных математических и прикладных задач и т.д. Полученное рекуррентное соотношение для определения коэффициентов полиномиальных представлений может быть использовано при разработке алгоритмов и программ для вычисления значений этих коэффициентов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гилл А. Линейные последовательностные машины. М. : Наука, 1974. 288 с.
2. Фараджев Р.Г. Линейные последовательностные машины. М. : Сов.радио, 1975. 248 с.
3. Блюмин С.Л., Фараджев Р.Г. Анализ и синтез конечных линейных последовательностно-клеточных машин // Автоматика и телемеханика. 1981. № 6. С. 57–66.
4. Блюмин С.Л., Фараджев Р.Г. Линейные клеточные машины: подход пространства состояний (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1982. № 2. С. 125–163.
5. Фараджев Р.Г., Фейзиев Ф.Г. Методы и алгоритмы решения задачи квадратичной оптимизации для двоичных последовательностных машин. Баку : Элм, 1996. 180 с.
6. Фейзиев Ф.Г., Фараджева М.Р. Модулярные последовательностные машины: основные результаты по теории и приложению. Баку : Элм, 2006. 234 с.
7. Фейзиев Ф.Г., Самедова З.А. Полиномиальное соотношение для представления полной реакции 3D-нелинейных модулярных динамических систем // Электронное моделирование. 2011. Т. 33, № 2. С. 33–50.
8. Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки. М. : Мир, 1986. 576 с.
9. Латыпов Р.Х., Нуруддинов Ш.Р., Столов Е.Л., Фараджев Р.Г. Применение теории линейных последовательностных машин в системах диагностирования // Автоматика и телемеханика. 1988. № 8. С. 3–27.
10. Иванов М.А. Криптографические методы защиты информации в компьютерных системах и сетях. М. : Кудиц-образ, 2001. 368 с.
11. Байбатшаев М.Ш. Синтез одного класса систем с двоичной нелинейной последовательностной машиной для управления непрерывным объектом // Сборник трудов ВНИИСИ. 1978. Вып. 1. С. 48–58.
12. Блюмин С.Л., Корнеев А.М. Дискретное моделирование систем автоматизации и управления. Липецк : Липецкий эколого-гуманитар. ин-т, 2005. 124 с.
13. Nagiyev A.T., Fejziyev F.G. The sequential cellular-machining model of the continuous objects with distributing parameters // Seminarberichte, Fachbereich Mathematic. 2001. Bd. 71. S. 31–43.
14. Hacı Y. Optimal control problem for processes with multiparametric binary linear difference equation system // Applied and computational mathematics. 2009. V. 8, No. 2. P. 263–269.
15. Hacı Y., Özen K. Terminal optimal control problem for processes represented by nonlinear multi-parametric binary dynamical system // Control and cybernetics. 2009. V. 38, No. 3. P. 625–633.
16. Hacı Y., Candan M., Or A. On the Principle of Optimality for Linear Stochastic Dynamical System // International Journal in Foundations of Computer Science and Technology. 2016. V. 6, No. 1. P. 57–63.
17. Фейзиев Ф.Г., Мехтиева М.Р., Гусейнова А.Дж. Двухзначный аналог полинома Вольтерры для описания полной реакции двоичных многомерных нелинейных модулярных динамических систем // Электронное моделирование. 2017. Т. 39, № 3. С. 3–15.

Поступила в редакцию 21 февраля 2019 г.

Fejziyev F.G., Mekhtiyeva M.R. (2019) ANALYTICAL DESCRIPTION OF FULL REACTION OF ONE CLASSES BINARY 3D-MULTIDIMENSIONAL NONLINEAR MODULAR DYNAMIC SYSTEMS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 49. pp. 82–91

DOI: 10.17223/19988605/49/10

Binary 3D-multidimensional modular dynamic system with fixed memory  $n_0$  and limited connection  $P = P_1 \times P_2$ , which the full reaction characterized by the following functional ratio, is considered:

$$y[n, c] = G\{u[\tau, c + p] | n - n_0 \leq \tau \leq n, \quad p \in P\}. \quad (1)$$

Here  $n \in Z_0$ ;  $c = (c_1, c_2)$ ,  $c_i \in Z$ ,  $i = \overline{1, 2}$ ;  $p = (p_1, p_2) \in P = P_1 \times P_2$ ,  $P_i \subset Z$ ,  $i = \overline{1, 2}$ ;  $y[n, c] \in GF^k(2)$  and  $u[n, c] \in GF^r(2)$ ;  $G\{\dots\} = (G_1\{\dots\}, \dots, G_k\{\dots\})^T$ ;  $GF(2)$  is finite field,  $GF^k(2)$  and  $GF^r(2)$  are  $k$ -dimensional and  $r$ -dimensional linear spaces respectively over the field  $GF(2)$ .

When  $P_i = \{p_i(1), \dots, p_i(r_i)\}$ ,  $p_i(1) < \dots < p_i(r_i)$ ,  $p_i(j) \in \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ ,  $j = \overline{1, r_i}$ ,  $i = \overline{1, 2}$  formula (1) is written in the form:

$$y_v[n, c_1, c_2] = G_v[u_j[\tau, c_1 + \rho_1, c_2 + \rho_2]] | n - n_0 \leq \tau \leq n, \rho_1 \in P_1, \rho_2 \in P_2, j = 1, \dots, r, GF(2), v = 1, \dots, k. \quad (2)$$

Let's

$$\Phi(i) = \{\bar{m} = (m_{1,1}, \dots, m_{1,r_0}, \dots, m_{r,1}, \dots, m_{r,r_0}) \mid m_{j,\sigma} \in \{0, \dots, n_0 + 1\}, j = \overline{1, r}, \sigma = \overline{1, r_0}, m_{1,1} + \dots + m_{1,r_0} + \dots + m_{r,1} + \dots + m_{r,r_0} = i\}, \quad (3)$$

$$Q(i, \bar{m}) = \{\ell \mid \ell \in \{1, \dots, r\} \text{ и } m_{\ell,1} + \dots + m_{\ell,r_0} \neq 0\}, Q_1(i, \bar{m}, j) = \{\sigma_j \mid \sigma_j \in \{1, \dots, r_0\} \text{ и } m_{j,\sigma_j} \neq 0\}. \quad (4)$$

$$\Gamma_1(m_{j,\sigma_j}) = \{\bar{\tau}_{j,\sigma_j} = (\tau(j, \sigma_j, 1), \dots, \tau(j, \sigma_j, m_{j,\sigma_j})) \mid 0 \leq \tau(j, \sigma_j, 1) < \dots < \tau(j, \sigma_j, m_{j,\sigma_j}) \leq n_0\}. \quad (5)$$

$$\Gamma(i, \bar{m}) = \prod_{j \in Q(i, \bar{m})} \Gamma_1(m_{j,\sigma_j}). \quad (6)$$

Using the formulas (3)–(6) for the functional relation (1), it is obtained representation in the form of the following two-valued analogue of the Volterra's polynomial:

$$y_v[n, c] = K_{0,v} + \sum_{i=1}^{(n_0+1)r_0} \sum_{\bar{m} \in \Phi(i)} \sum_{\bar{\tau} \in \Gamma(i, \bar{m})} K_{i,v,\bar{m}}[\bar{n}_2] \prod_{j \in Q(i, \bar{m})} \prod_{\sigma_j \in Q_1(i, \bar{m}, j)} \prod_{\xi_{j,\sigma_j}=1}^{m_{j,\sigma_j}} u_j[n - \tau(j, \sigma_j, \xi_{j,\sigma_j}), c + p(\sigma_j)], \quad (7)$$

$GF(2), v = 1, \dots, k.$

For the functional relation (2) also representations in the form of a two-valued analogue of Volterra's polynomial are given. In the work with known values of the input and output sequences, the recurrence relations for finding the unknown coefficients in (7) are obtained.

Keywords: 3D-multidimensional nonlinear modular dynamic system; multiparameterical systems; fixed memory; limited connection; two-valued analogue of Volterra's polynomial; unknown coefficients; recurrence ratio.

FEYZIYEV Fikrat Gulali (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Sumgait State University, Sumgait, Azerbaijan).  
E-mail: FeyziyevFG@mail.ru

MEKHITIYEVA Maral Rzabala (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Baku State University, Baku, Azerbaijan).  
E-mail: mehdiyevamaral71@gmail.com

#### REFERENCES

1. Gill, A. (1974) *Lineynye posledovatel'nostnye mashiny* [Linear sequential machines]. Moscow: Nauka.
2. Faradzhev, R.G. (1975) *Lineynye posledovatel'nostnye mashiny* [Linear sequential machines]. Moscow: Sovetskoe radio.
3. Blyumin, S.L. & Faradzhev, R.G. (1981). Analysis and design of finite linear sequential cellular machines. *Automation and Remote Control*. 42(6). pp. 746–754.
4. Blyumin, S.L. & Faradzhev, R.G. (1982) Linear cellular machine: The approach of the state space (review). *Automation and Remote Control*. 43(2). pp. 238–268.
5. Faradzhev, R.G. & Feyziev, F.G. (1996) *Metody i algoritmy resheniya zadachi kvadrachnoy optimizatsii dlya dvoichnykh posledova-tel'nostnykh mashin* [Methods and algorithms for solving quadratic optimization problem for binary sequential machines]. Baku: Elm.
6. Feyziev, F.G. & Faradzheva, M.R. (2006) *Modulyarnye posledovatel'nostnye mashiny: osnovnye rezul'taty po teorii i prilozheniyu* [Modular sequential machine: The main results in the theory and application]. Baku: Elm.
7. Feyziev, F.G. & Samedova, Z.A. (2011) *Polinomial'noe sootnoshenie dlya predstavleniya polnoy reaksii 3D-nelineynykh modulyarnykh dinamicheskikh sistem* [Polynomial ratio to represent the full reaction 3D-nonlinear modular dynamical systems]. *Elektronnoe modelirovanie*. 33(2). pp. 33–50.
8. Blahut, R. (1986) *Teoriya i praktika kodov, kontroliruyushchikh oshibki* [Theory and Practice of Error Control Codes]. Translated from English by I.I. Grushko, V.M. Blinovskiy. Moscow: Mir.
9. Latypov, R.Kh., Nurutdinov, Sh.R., Stolov, E.L. & Faradzev, R.G. (1988) Application of theory of linear sequential machines to diagnosing systems. *Automation and Remote Control*. 8. pp. 3–27.
10. Ivanov, M.A. (2001) *Kriptograficheskie metody zashchity informatsii v komp'yuternykh sistemakh i setyakh* [Cryptographic Methods of Information Protection in Computer Systems and Networks]. Moscow: Kudits-obraz.
11. Baybatshaev, M.Sh. (1978) *Sintez odnogo klassa sistem s dvoichnoy nelineynoy posledovatel'nostnoy mashinoy dlya upravleniya nepreryvnym ob'ektom* [Design of one class of systems with a binary non-linear sequential machine for controlling a continuous object]. *Sbornik trudov VNIISI*. 1. pp. 48–58.

12. Blyumin, S.L. & Korneev, A.M. (2005) *Diskretnoe modelirovanie sistem avtomatizatsii i upravleniya* [Discrete modeling automation and control systems]. Lipetsk: Lipetskiy ekologo-gumanitar. in-t.
13. Nagiev, A.T. & Feyziev, F.G. (2001) The sequential cellular-machining model of the continuous objects with distributing parameters. *Seminarberichte, Fachbereich Mathematic*. 71. pp. 31–43.
14. Hacı, Y. (2009) Optimal control problem for processes with multiparametric binary linear difference equation system. *Applied and Computational Mathematics*. 8(2). pp. 263–269.
15. Hacı, H. & Özen, K. (2009) Terminal optimal control problem for processes represented by nonlinear multi-parametric binary dynamical system. *Control and Cybernetics*. 38(3). pp. 625–633.
16. Hacı, Y., Candan, M. & Or, A. (2016) On the Principle of Optimality for Linear Stochastic Dynamical System. *International Journal in Foundations of Computer Science and Technology*. 6(1). pp. 57–63. DOI: 10.5121/ijfcst.2016.6105
17. Feyziev, F.G., Mekhtieva, M.R. & Huseynova, A.J. (2017) Dvukhznachnyy analog polinoma Vol'terry dlya opisaniya polnoy reaktsii dvoichnykh mnogomernykh nelineynykh modulyarnykh dinamicheskikh sistem [The two-valued analogue of Volterra polynomial for description of full reaction of binary multidimensional nonlinear modular dynamic systems]. *Elektronnoe modelirovaniye*. 39(3). pp. 3–15.

УДК 519.2

DOI: 10.17223/19988605/49/11

**E.S. Chetvertakova, E.V. Chimitova****TESTING SIGNIFICANCE OF RANDOM EFFECTS  
FOR THE GAMMA DEGRADATION MODEL***This work is supported by the Russian Ministry of Education and Science (project № 1.1009.2017/4.6).*

Gamma degradation models with fixed or random effects are widely used for reliability analysis. In this paper, the problem of testing significance of random effects for the gamma degradation model is considered. We propose two statistical tests which enable to reveal the existence of random effects in degradation data corresponding to the gamma degradation model. The first test is the well known likelihood ratio test and the second one is based on the variance estimate of the random parameter of the “random-effect” gamma degradation model. These tests have been compared in terms of power with Monte-Carlo simulation method. Moreover, the example of GaAs lasers degradation analysis has been considered.

**Keywords:** gamma degradation model; fixed-effect model; model with random effects; reliability; GaAs lasers.

Statistical degradation models are used for the analysis of lifetime data of tested items in the cases when along with the failure time data there is the detailed information about the change of degradation index [1, 2]. Parametric models, which are distinguished by the distribution of increments of degradation index and the existence of random effects, are widely used in practice. In [3–5] and [6, 7], the authors consider the gamma degradation model with random effects, where the scale parameter is a random variable from the gamma distribution. Thus, considering the “random-effect” degradation model, we need to take into account the distribution of the random parameter and hence, the number of unknown parameters of the “random-effect” model is larger than the number of unknown parameters of the “fixed-effect” model. As a result, the accuracy of parameter estimation for the “random-effect” model may decrease. On the other hand, if the unit-to-unit variability is rather large, then the “fixed-effect” model is not appropriate, and in this case, the use of the “random-effect” model could provide more accurate estimates. By this reason, the use of the degradation model with random effects is not advisable when the random effect is insignificant or not observed at all. So, it is necessary to have the statistical test which can reveal the random effect influence and help with the choice between fixed- and random-effect degradation models.

In [8], the Hausman test is proposed for distinction between the “fixed-” and “random-effect” models. However, this statistical test is applied only for linear regression models where the estimates are calculated by the least square method that does not allow using the Hausman test for degradation models. Other criteria for comparison of statistical models are AIC and BIC information tests [9]. These tests are based on values of the maximum likelihood function and apply the penalty for test statistics value taking into account the number of estimated parameters. Such information criteria enable to compare statistical models, but they are not used for hypothesis testing. Hereby, it is necessary to develop a criterion which can test the hypothesis of absence of random effects in degradation data. So, the goal of this research is to develop a statistical test, which enables to reveal the existence of random effects in degradation data corresponding to the gamma degradation model.

In this paper, we propose two tests for the hypothesis of absence of random effects for the gamma degradation model: the likelihood ratio test and the test based on the variance estimate of the random parameter. Moreover, we use Monte Carlo simulations to investigate the power for the constructed tests for different pairs of competing hypotheses. Then, we illustrate testing significance of random effects for the gamma degradation model using the example of GaAs lasers data analysis, which is often considered in publications,

devoted to the investigation of degradation models [4, 6, 9, 10]. In [4], the “random-effect” gamma degradation model was fitted. In [6], these data have been analyzed using gamma and Wiener degradation models. Inverse Gaussian degradation model is described in [9] as another variant of the degradation model for the lasers data.

### 1. Gamma degradation models

Stochastic process  $Z(t)$  characterizing degradation process is referred to as the gamma degradation process, if

- $Z(0) = 0$ ;
- $Z(t)$  is a stochastic process with independent increments;
- increments  $\Delta Z(t) = Z(t + \Delta t) - Z(t)$  have the gamma distribution with probability density function:

$$f_{Gamma}(x; \sigma, \Delta v(t)) = \frac{x^{\Delta v(t)-1}}{\sigma^{\Delta v(t)} \Gamma(\Delta v(t))} e^{-\frac{x}{\sigma}},$$

where  $\Delta v(t) = v(t + \Delta t) - v(t)$  is the shape parameter and  $\sigma$  is the scale parameter,  $v(t)$  is a positive increasing function [7].

If random variables  $\xi_1$  and  $\xi_2$  follow the gamma distribution with scale parameter  $\sigma$  and shape parameters  $v_1$  and  $v_2$ , correspondingly, then  $\xi_1 + \xi_2$  follows the gamma distribution with scale parameter  $\sigma$  and shape parameter  $v_1 + v_2$ . This property explains the fact of using the gamma distribution as a distribution of increments.

Let the mathematical expectation of degradation process  $Z(t)$  is

$$M(Z(t)) = m(t),$$

where  $m(t) = m(t; \gamma)$ ,  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)^T$  is a trend function of the degradation index. Then, the shape parameter is equal to  $\Delta v(t) = \frac{\Delta m(t)}{\sigma}$ .

In this paper, we consider two types of trend functions:

- linear function  $m(t) = \gamma_1 t$ ,  $\gamma_1 > 0$ ;
- power function  $m(t) = \gamma_1 t^{\gamma_2}$ ,  $\gamma_1 > 0$ ,  $\gamma_2 > 0$ .

Taking into account the given assumptions, the stochastic process  $Z(t)$  at time moment  $t = t_k$  has the gamma distribution with the shape parameter equal to  $v(t_k) = \frac{m(t_k)}{\sigma}$ .

The time to failure is the random variable

$$T = \sup\{t : Z(t) < z_0\},$$

where  $z_0$  is the critical value of the degradation path. Then, the reliability function for the gamma degradation model is given by:

$$S(t) = P\{T > t\} = P\{Z(t) < z_0\} = F_{Gamma}(z_0; \sigma, v(t)). \quad (1)$$

As was noted in the introduction, if the unit-to-unit variability is rather large, then it is necessary to take into account the heterogeneity in degradation paths. In [3], the “random-effect” gamma degradation model is specified by considering parameter  $\sigma$  as a random effect. To obtain mathematically tractable distributions, it is assumed that the random parameter  $\eta = \sigma^{-1}$  has the gamma distribution with the density function  $f_{Gamma}(x; \delta^{-1}, \theta)$ , where  $\theta$  is the shape parameter and  $\delta^{-1}$  is the scale parameter. Here  $\eta$  has mathematical expectation  $M\eta = \theta/\delta$  and variance  $D\eta = \theta/\delta^2$ , and  $\sigma$  has finite mathematical expectation  $M\sigma = \delta/(\theta - 1)$  for  $\theta > 1$  and finite variance

$$D\sigma = \frac{\delta^2}{(\theta-1)^2(\theta-2)}$$

for  $\theta > 2$  [3]. Then the marginal density function for  $Z(t)$  in the case of gamma degradation model with random effects is equal to:

$$f_{Z(t)}(x; \delta, \theta, \nu(t)) = \int_0^\infty f_{Gamma}(x; \omega^{-1}, \nu(t)) f_{Gamma}(\omega; \delta^{-1}, \theta) d\omega = \frac{x^{\nu(t)-1} \delta^\theta}{(x + \delta)^{\nu(t)+\theta}} B^{-1}(\nu(t); \theta),$$

where  $B(\cdot, \cdot)$  is the Euler beta function. The shape parameter of the gamma degradation model with random effects is  $\nu(t) = \frac{(\theta-1) \cdot m(t)}{\delta}$ . It can be noted that  $\frac{\theta}{\delta \nu(t)} \cdot Z(t)$  has an F-distribution with parameters  $2\nu(t)$  and  $2\theta$ . In this case, the reliability function can be written as

$$S(t) = P\{T > t\} = P\{Z(t) < z_0\} = \int_0^{z_0} f_{Z(t)}(x; \delta, \theta, \nu(t)) dx = F\left(\frac{\theta \cdot z_0}{\delta \cdot \nu(t)}; 2\nu(t); 2\theta\right). \quad (2)$$

Let the realization of stochastic process  $Z(t)$  for the  $i$ -th item is denoted as

$$Z^i = \{(0, Z_0^i = 0), (t_1^i, Z_1^i), \dots, (t_{k_i}^i, Z_{k_i}^i)\}, \quad i = \overline{1, n},$$

where  $k_i$  is the number of time moments, in which the degradation index was measured. Then, the sample of independent degradation index increments can be written as:

$$\mathbf{X}_n = \{X_j^i = Z_j^i - Z_{j-1}^i, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, k_i}\}.$$

Maximum likelihood estimates (MLEs) of parameters  $\sigma$  and  $\gamma$  of the “fixed-effect” gamma degradation model are calculated by maximization of the likelihood function:

$$L(\mathbf{X}_n) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{k_i} \ln f_{Gamma}(X_j^i; \sigma, \nu_j^i), \quad (3)$$

where  $\nu_j^i = \nu(t_j^i) - \nu(t_{j-1}^i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, k_i}$  are the values of shape parameter.

If  $Z^i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  are the gamma degradation processes with random effects, then the likelihood function can be written as a multiplication of the joint density functions of increments  $X_j^i$  on the common random effect:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{X}_n) &= \prod_{i=1}^n f(X_1^i, X_2^i, \dots, X_{k_i}^i) = \prod_{i=1}^n \int_0^\infty \prod_{j=1}^{k_i} f_{Gamma}(X_j^i; \omega^{-1}, \Delta \nu(t_j^i)) f_{Gamma}(\omega, \delta^{-1}, \theta) d\omega = \\ &= \prod_{i=1}^n \left[ \frac{\delta^\theta}{\Gamma(\theta)} \cdot \frac{\Gamma(\nu(t_{k_i}^i))}{(Z_{k_i}^i + \delta)^{\nu(t_{k_i}^i)+\theta}} \cdot \prod_{j=1}^{k_i} \frac{(X_j^i)^{\Delta \nu(t_j^i)-1}}{\Gamma(\Delta \nu(t_j^i))} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

## 2. Testing hypothesis of absence of random effects

Let us assume that observed degradation paths are the realizations of the gamma degradation process. If the unit-to-unit variability is rather large, then random effects in these data can be significant and the “fixed-effect” model is not appropriate. So, it is necessary to test the hypothesis of absence of random effects, which means that the parameter  $\sigma$  in the gamma degradation model is not random:

$$H_0 : D\sigma = 0.$$

In fact, the acceptance of this hypothesis will imply that data correspond to the “fixed-effect” model.

The competing hypothesis  $H_1$  corresponding to the “random-effect” model is written as:

$$H_1 : D\sigma > 0.$$

Let consider two statistical tests for the null hypothesis: the likelihood ratio test and the test based on the variance estimate. The likelihood ratio test (LR test) is usually constructed for distinguishing between two competing statistical models. The LR test statistic value is calculated as follows:

$$\lambda_n = \ln \frac{L(\mathbf{X}_n | H_1)}{L(\mathbf{X}_n | H_0)}, \quad (5)$$

where  $L(\mathbf{X}_n | H_0)$  is the maximum value of the likelihood function (3) in the case of “fixed-effect” model,  $L(\mathbf{X}_n | H_1)$  is the maximum value of the likelihood function (4) in the case of “random-effect” model. The testing hypothesis  $H_0$  is rejected for large values of  $\lambda_n$ . According to the Neyman-Pearson lemma, the LR test is the most powerful criterion, when testing a simple hypothesis. However, the hypothesis is composite, so this test cannot be the best one.

As an alternative approach, we consider the variance estimate of the random parameter (VERP):

$$d_n = \frac{\hat{\delta}_n^2}{(\hat{\theta}_n - 1)^2 (\hat{\theta}_n - 2)}, \quad (6)$$

where  $\hat{\theta}_n$  and  $\hat{\delta}_n$  are the maximum likelihood estimates of the shape and scale parameters of the “random-effect” model (2), correspondingly. In Table 1, there are the means and standard deviations of estimates  $d_n$ , obtained by  $N = 10000$  simulated samples from the “fixed-effect” and “random-effect” models. The true values of parameters for the “random-effect” model are  $\theta = 10$ ,  $\delta = 1,5$ ,  $\gamma_1 = 0,002$ , and for the “fixed-effect” model are  $\sigma = 14$ ,  $\gamma_1 = 0,002$ . The time moments for measuring degradation were chosen as follows:  $t_j^i = t_{j-1}^i + 250$ , where  $t_0^i = 0$ ,  $j = \overline{1, k_i}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $k_i = 16$ .

Table 1

Means (M) and standard deviations (SD) of estimates  $d_n$

True model	Descriptive statistic	$n = 5$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 50$
“Fixed-effect” model	M	$2,55 \cdot 10^{-6}$	$2,23 \cdot 10^{-6}$	$1,95 \cdot 10^{-6}$	$1,79 \cdot 10^{-6}$	$1,12 \cdot 10^{-6}$
	SD	$4,08 \cdot 10^{-11}$	$2,19 \cdot 10^{-11}$	$1,36 \cdot 10^{-11}$	$1,02 \cdot 10^{-11}$	$7,53 \cdot 10^{-12}$
“Random-effect” model	M	$4,01 \cdot 10^{-3}$	$3,63 \cdot 10^{-3}$	$3,61 \cdot 10^{-3}$	$3,56 \cdot 10^{-3}$	$3,54 \cdot 10^{-3}$
	SD	$1,08 \cdot 10^{-2}$	$4,28 \cdot 10^{-3}$	$6,88 \cdot 10^{-3}$	$5,49 \cdot 10^{-3}$	$2,86 \cdot 10^{-3}$

As can be seen from Table 1, the means of variance estimate  $d_n$  obtained for the “fixed-effect” model tend to 0 with the sample size growth in contrast to the means obtained for the “random-effect” model, which tend to the true value of  $D\sigma = 3,49 \cdot 10^{-3}$ . Thus, the variance estimate  $d_n$  of the random parameter can be used as a test statistic for testing the hypothesis of absence of random effect. Let us refer this test to as the VERP test. Similar to the LR test, the hypothesis  $H_0$  is rejected for large values of  $d_n$ .

The theoretical statistics distributions for the proposed tests are not known as there are a number of factors influencing the form of the statistics distributions: the method of model parameters estimation, the type of trend function, the values and the number of time moments of measuring degradation, the sample size and others. So, to apply the LR and VERP tests we use the parametric bootstrap method according to the following algorithm:

1. Generate a sample of increments from the “fixed-effect” model with parameters  $\hat{\sigma}_n$  and  $\hat{\gamma}_n$  according to the given time moments  $t_j^i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, k_i}$ ; here  $\hat{\sigma}_n$  and  $\hat{\gamma}_n$  are the MLEs obtained from the source data.
2. Determine the MLEs of parameters  $\sigma$  and  $\gamma$  of the “fixed-effect” model from the simulated sample of increments using the likelihood function (3).
3. Determine the MLEs of parameters  $\delta$ ,  $\theta$  and  $\gamma$  of the “random-effect” model from the simulated sample of increments using the likelihood function (4).

4. Calculate the test statistics, namely  $\lambda_n$  and  $d_n$ .
5. Repeat points 1–4  $N$  times to obtain the empirical distributions  $G_N(s | H_0)$  for each proposed test.
6. Calculate the  $p$ -values  $\alpha_n = 1 - G_N(S_n | H_0)$ , where  $S_n$  is a value of test statistic ( $\lambda_n$  or  $d_n$ ), calculated from the source sample.
7. If  $\alpha_n$  is less than the significance level  $\alpha$ , then hypothesis  $H_0$  is rejected.

### 3. Empirical power study of the LR and VERP tests

The test power  $1 - \beta$  is the probability to reject the null hypothesis  $H_0$  with the significance level  $\alpha$  when the competing hypothesis  $H_1$  is true:

$$1 - \beta = 1 - G(S_a | H_1).$$

Actually, the more powerful test is, the higher its ability to distinguish close competing hypotheses. We have carried out the investigation of the LR and VERP test power for various pairs of competing hypotheses through Monte Carlo simulations.

The estimates of test power have been obtained for different sample sizes, sets of time moments  $t_j$ ,  $j = \overline{1, k}$  and magnitudes of the random effect. The number of simulations used  $N = 10\,000$ . The estimates of tests power were calculated with the nominal significance level  $\alpha = 0,01$ .

In Table 2, the powers of the proposed tests are presented for different sets of time moments for measuring degradation:

$$T_1 : t_j = t_{j-1} + 400, \text{ where } t_0^i = 0, j = \overline{1, 10},$$

$$T_2 : t_j = t_{j-1} + 250, \text{ where } t_0^i = 0, j = \overline{1, 16},$$

$$T_3 : t_j = t_{j-1} + 125, \text{ where } t_0^i = 0, j = \overline{1, 32}.$$

Under hypothesis  $H_0$ , samples of increments were generated from the “fixed-effect” gamma degradation model with the scale parameter  $\sigma = 14$ ; and in the case of true hypothesis  $H_1$  samples were generated from the “random-effect” model with parameters  $\delta = 1.5, \theta = 28$ . The linear trend function with parameter  $\gamma_1 = 0.002$  was taken.

Table 2

The power estimates of the VERP and LR tests for different sets of time moments  $T$

Time frequency	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$
VERP test				
$T_1$	0,69	0,93	0,99	1,0
$T_2$	0,70	0,94	0,99	1,0
$T_3$	0,71	0,94	0,99	1,0
LR test				
$T_1$	0,67	0,92	0,99	1,0
$T_2$	0,69	0,93	0,99	1,0
$T_3$	0,70	0,95	0,99	1,0

As can be seen from Table 2, the power of both tests increases with the growth of the number of items  $n$  and the frequency of measuring degradation.

The second experiment has been designed to show, how the power of proposed tests changes depending on the magnitude of the random effect under competing hypothesis  $H_1$ . For this research, we consider different values of the shape parameter:  $\theta_1 = 42, \theta_2 = 35, \theta_3 = 28$  with the scale parameter  $\delta = 1,5$ , which correspond to different magnitudes of the random effect, as the variance  $D\sigma$  decreases with the shape pa-



parameter growth. Time moments for measuring degradation index were taken corresponding to values of  $T_2$  from the first experiment. In Figures 1-4, there are the examples of generated degradation paths according to the “random-effect” gamma degradation model with different values of shape parameter and the “fixed-effect” gamma degradation model. As can be seen from Figures 3 and 4, in the case of the “random-effect” model with  $\theta = 42$  the unit-to-unit variability looks very similar to the case of the “fixed-effect” degradation model, and it is difficult to distinguish these cases without a special statistical test.

In Table 3, the estimates of power of the proposed tests are presented for different values of shape  $\theta$  of the random parameter  $\sigma$  and number of tested items  $n$ . The estimates of tests power were calculated with the nominal significance level  $\alpha = 0,01$ .

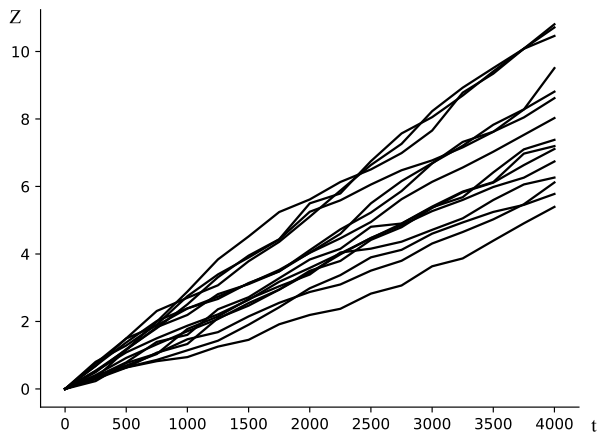


Fig. 1. The degradation path with the second experiment conditions and  $\theta = 28$

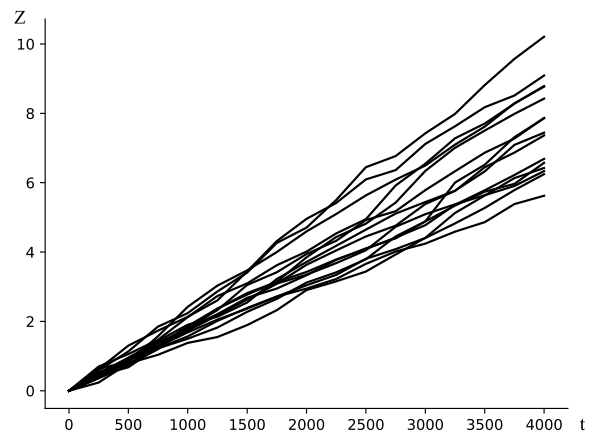


Fig. 2. The degradation path with the second experiment conditions and  $\theta = 35$

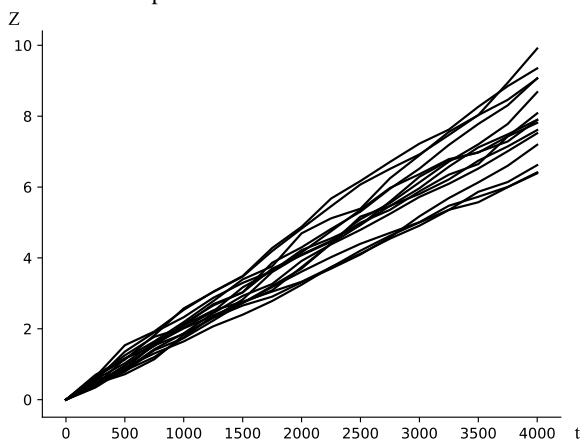


Fig. 3. The degradation path with the second experiment conditions and  $\theta = 42$

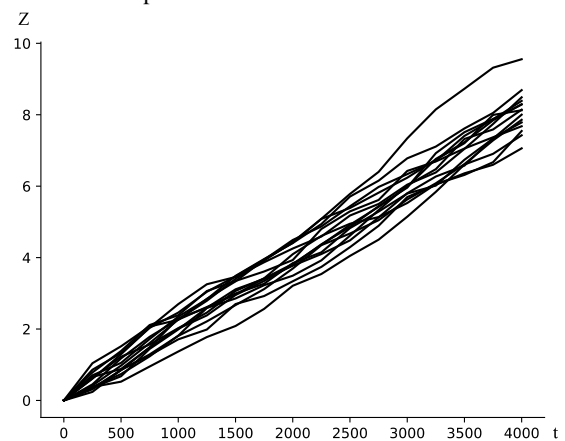


Fig. 4. The degradation path with the second experiment conditions for the “fixed-effect” model

Table 3

The power estimates of VERP and LR test for different values of shape  $\theta$  of the random parameter  $\sigma$  and number of tested items  $n$

Shape parameter	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$
VERP test				
$\theta_1 = 42$	0,69	0,94	0,99	1,0
$\theta_2 = 35$	0,69	0,94	0,99	1,0
$\theta_3 = 28$	0,70	0,94	0,99	1,0
LR test				
$\theta_1 = 42$	0,67	0,93	0,98	0,99
$\theta_2 = 35$	0,68	0,93	0,98	0,99
$\theta_3 = 28$	0,69	0,93	0,99	1,0

As can be seen from Table 3, the tests power slightly increases with the growth of random effect magnitude. Moreover, it can be seen from Tables 2 and 3, that VERP test is a bit more powerful than the LR test in the considered cases.

#### 4. The GaAs lasers data analysis using LR and VERP tests

In this section, we illustrate the analysis of the GaAs lasers data [10, 11] with the use of proposed LR and VERP tests. Gallium arsenide (GaAs) lasers are used in telecommunication systems, processing of materials, various fields of medicine. The aging process of some lasers leads to deterioration of light output throughout the whole life cycle. The lasers fail when the consumption current exceeds nominal value on 10%. Developing the lasers, engineers had some requirements: lasers have to work no less than 200000 hours under temperature of 20°C without failure. During the accelerated experiment 15 lasers were tested under the stress of 80°C for 40 000 hours. The degradation paths for tested lasers are shown in Figure 5.

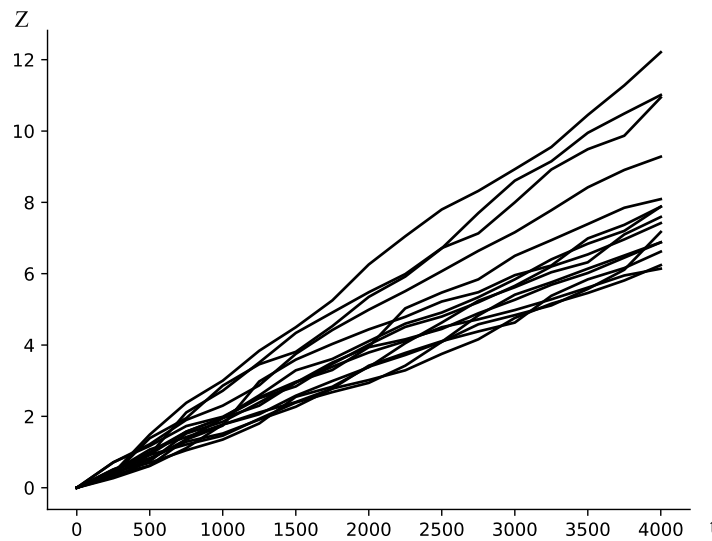


Fig. 5. The degradation paths for the GaAs lasers example

As can be seen from Figure 5, the degradation paths distinctly differ from each other. However, we cannot be sure that the random effect is significant here. Thereby, it is necessary to test the hypothesis of absence of random effect using proposed tests.

The results of the model parameters estimation, test statistics values and corresponding  $p$ -values for LR and VERP tests are presented in Table 4.

Table 4

MLEs of gamma degradation model parameters, test statistics values and  $p$ -values for LR and VERP tests

Gamma degradation model	MLEs of model parameters	LR test		VERP test	
		$\lambda_n$	$p$ -value	$d_n$	$p$ -value
“Fixed-effect” model	$\hat{\sigma}_n = 14.15, \hat{\gamma}_n = 0.002$	24,24	$< 10^{-4}$	0,0001	$< 10^{-4}$
“Random-effect” model	$\hat{\delta}_n = 1,45, \hat{\theta}_n = 28,86, \hat{\gamma}_n = 0,002$				

Considering the fact that  $p$ -value  $< \alpha = 0,05$  for both LR and VERP test, the hypothesis of absence of random effect is rejected. Therefore, the “random-effect” gamma degradation model is more appropriate model for the GaAs lasers data.

In Figure 6, the reliability functions of the “fixed-effect” and “random-effect” gamma degradation models (dashed and solid line correspondently) and the empirical reliability function of the interpolated lasers failures are presented. As can be seen from the figure, the reliability function of the “random-effect” model is closer to the observed failure distribution. So, this fact demonstrates that the gamma degradation model with random effects is more appropriate for describing considered GaAs lasers data.

## Conclusion

In this paper, we have considered the problems of testing the hypothesis of absence of random effects in degradation data. The likelihood ratio test (LR test) and based of the variance estimate of the random parameter  $\sigma$  (VERP test) were proposed to reveal the existence of random effects in degradation data corresponding to the gamma degradation model. The conducted research of the tests power showed that the VERP test is a bit more powerful criteria than the LR test for smaller sample sizes.

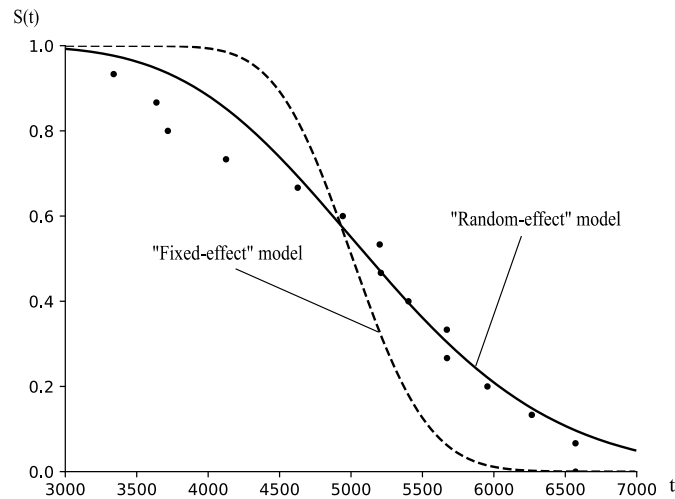


Fig. 6. The reliability functions of the “fixed-effect” and “random-effect” gamma degradation models and the empirical distribution of lasers failures

The example with the GaAs lasers data was considered. Based on the results of the investigations, we recommend to use the gamma degradation model with random effects for the further analysis of the lasers data because this model is more appropriate for describing the change of degradation index than the “fixed-effect” model.

## REFERENCES

1. Nikulin, M. & Bagdonavicius, V. (2001) *Accelerated Life Models: Modeling and Statistical Analysis*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.
2. Antonov, A.V. & Nikulin, M.S. (2012) *Statisticheskie modeli v teorii nadezhnosti* [Statistical models in reliability theory]. Moscow: Abris.
3. Lawless, J. & Crowder, M. (2004) Covariates and Random Effects in a Gamma Process Model with Application to Degradation and Failure. *Life Data Analysis*. 10. pp. 213–227. DOI: 10.1023/B:LIDA.0000036389.14073.dd.
4. Tsai, C.-C., Tseng, S.-T. & Balakrishnan, N. (2012) Optimal Design for Degradation Tests Based on Gamma Processes with Random Effects. *IEEE Trans. Reliab.* 61. pp. 604–613. DOI: 10.1109/TR.2012.2194351
5. Chimitova, E.V. & Chetvertakova, E.S. (2015) A comparison of the “fixed-effect” and “random-effect” gamma degradation models. *Applied methods of statistical analysis. Nonparametric approach, AMSA'2015, September 14–19, 2015: Proc. of the Int. Workshop*. Novosibirsk. pp. 161–169.
6. Tsai, C.-C., Tseng, S.-T. & Balakrishnan, N. (2011) Mis-specification analyses of gamma and Wiener degradation processes. *Journal of Statistical Planning and Inference*. 12. pp. 25–35. DOI: 10.1016/j.jspi.2011.06.008
7. Chimitova, E. & Chetvertakova, E. (2014) The construction of the gamma degradation model with covariates. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(29). pp. 51–60.
8. Hausman, J.A. (1978) Specification Tests in Econometrics. *Econometrica*. 46. pp. 1251–1271.
9. Chimitova, E., Chetvertakova, E., Sergeeva, S. & Osintseva, E. (2017) A comparative analysis of the Wiener, Gamma and Inverse Gaussian degradation models. *Applied Methods of Statistical Analysis. Nonparametric methods in cybernetics and system analysis. Krasnoyarsk, Russia, September 18–22, 2017: Proc. of the Int. Workshop*. Novosibirsk: NSTU. pp. 160–167.
10. Meeker, W.Q. & Escobar, L.A. (1998) *Statistical Methods for Reliability Data*. New York: John Wiley and Sons.
11. Meeker, W.Q., Doganaksoy, N. & Hahn, G.J. (2009) Ispolzovanie dannykh o degradatsii dlya analiza nadezhnosti izdeliy [Using degradation data to analyze product reliability]. *Metody menedzhmenta kachestva – Methods of Quality Management*. 4.

Received: April 28, 2019

Chetvertakova E.S., Chimitova E.V. (2019) TESTING SIGNIFICANCE OF RANDOM EFFECTS FOR THE GAMMA DEGRADATION MODEL. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 49. pp. 92–100

DOI: 10.17223/19988605/49/11

Четвертакова Е.С., Чимитова Е.В. ПРОВЕРКА ЗНАЧИМОСТИ СЛУЧАЙНОГО ЭФФЕКТА ДЛЯ ДЕГРАДАЦИОННОЙ ГАММА-МОДЕЛИ. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2019. № 49. С. 92–100

Деградационные гамма-модели широко используются для оценки функции надежности по данным об изменении показателя деградации во времени. В данной статье рассматриваются проблемы построения деградационной гамма-модели со случайным эффектом, которая учитывает разброс между деградационными процессами. Предложены два статистических критерия, которые позволяют выявить наличие случайного эффекта в данных, соответствующих рассматриваемой модели. Первый критерий представляет собой хорошо известный критерий отношения правдоподобия, а второй основан на оценке дисперсии случайного параметра. С использованием методов имитационного моделирования проведено исследование мощности данных критериев. Применение разработанных критериев рассмотрено на примере данных об исследовании арсенид-галлиевых (GaAs) лазеров.

Ключевые слова: деградационная гамма-модель; модель с фиксированным эффектом; модель со случайным эффектом; надежность; арсенид-галлиевые лазеры.

*CHETVERTAKOVA Evgeniia Sergeevna* (PhD Student of the Department of Theoretical and Applied Informatics of Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation).  
E-mail: evgenia.chetvertakova@gmail.com

*CHIMITOVA Ekaterina Vladimirovna* (Doctor of Technical Science, Professor of the Department of Theoretical and Applied Informatics of Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation).  
E-mail: ekaterina.chimitova@gmail.com

УДК 004.891

DOI: 10.17223/19988605/49/12

**A.E. Yankovskaya, I.S. Levin, I.L. Fuks****MIXED DIAGNOSTIC TESTS STRUCTURE FOR LEARNING AND TESTING SYSTEMS**

A new method of increasing the efficiency of students' educational activity is proposed. The method is based on the creation of learning trajectories, formed in the process of applying the mixed diagnostic tests. The learning trajectories are constructed by using specific mixed diagnostic tests, which are an integration of known unconditional and conditional tests. The mixed tests are used as in blended education and training, and in massive open online courses. The mixed testing provides the monitoring of the students' knowledge, professional and personal skills and abilities, as well as constructing learning trajectories for each student. The paper presents the innovative interdisciplinary technique for construction of the mixed diagnostic tests.

**Keywords:** blended education and training; massive open online courses; learning trajectory; tree of mixed diagnostic tests; interdisciplinary testing.

The search for ways to improve the effectiveness of teaching is a well-known educational problem. This task becomes even more important when the teacher disappears from the class at certain stages of the learning process. It is this problem that arose due to the emergence of blended education [1], which is an integration of the e-learning and the traditional learning [2]. Technologies of blended education very naturally fit into the concept of Mass Open Online Courses (MOOC) [3, 4], which is based on the maximum contribution of the teacher at the stage of course development and the almost complete exclusion of the teacher during the course. Today, the blended learning becomes popular both in education and in industry. The number of MOOCs implemented on the base of different educational platforms is growing. The number of people wishing to study at MOOC grows.

One of the known challengers in higher education is developing mechanisms for effective teaching of large groups of students [5]. A simple example of the blended training is a learning that uses various of resources and methods. It has to be noted that despite the wide integration of information and communication technologies (ICT) (including the technologies of artificial intelligent) the blended education are not used enough. Developing the software systems supporting the blended training is highly time and cost consuming task [6, 7].

Obviously, the students with different abilities have diverse preferences in learning and different achievements. A qualitative research [8] a specific questionnaire was used in order to study attitudes, priorities, preferences of university students. A number of the initial students' characteristics were taken into account. Among them: initial knowledge, skills, and learning experience. Taking into account the students' particular interests and capacities should make the learning process more effective. Any student of the high school, should be able to obtain the proper solution of his specific educational and industrial tasks. Moreover, he/she should understand very clearly why and how he/she will be able to utilize the obtained knowledge, professional and personal skills, and abilities to achieve personal goals.

In [1], Bliuc, et al. identify three different ways for defining the blended learning. The blended learning can be considered as a combination of: 1) web based technology models, 2) various pedagogical approaches, 3) emerging educational technologies with a face-to-face training. A comprehensive review of computer-based assessment methods including emergent blended learning is presented in [9].

The concept of the mixed diagnostic tests (MDT) was introduced in [10]. The mixed diagnostic testing is a compromise between unconditional and conditional components, which expediently to use in blended education and training. Today it is one of the popular and useful means of learning assessment. A number of innovative assessment technologies were developed on the base of the MDT [11, 12].

Our paper is a development of the classic MDT [Ibid.]. We propose to use MDT for creating various learning trajectories of the educational process. It provides a highly desirable flexibility in choosing different learning trajectories. Such property is highly appreciated by students.

A number of problems have to be solved in order to implement the MDT approach effectively: a) offering students the instrument for designing their own learning trajectories, b) providing interactions between the teacher and a student, and c) increasing accessibility of information. We believe that the proposed MDT based approach will result in growing efficiency of the educational process.

## 1. Scientific Background

Our society is a highly dynamic society. Its intensive transformation defines new challenges for peoples. Today students and graduates have to be ready to solve various technological and educational problems [5]. In such complicate situation, the blended learning seems to be a very appropriate since the blended learning enables developing the range of emerging skills and competences.

In [10] the MDT as a new approach of intelligent systems design has been proposed. The approach uses pattern recognition methods. An implementation of the MDT in intelligent learning and training systems was presented [11].

The main achievement of the MDT is its contribution to solving the problem of student motivation. The majority of the available testing methods doesn't motivate students sufficiently. The MDT approach provides high flexibility of the procedure of creating learning trajectories. According to our hypothesis, increasing flexibility in choosing leaning trajectories allows to motivate students more and, as the result, improve the efficiency of the learning process.

We assume that a curriculum of any academic discipline may be represented as a specific ontology's structure comprising a number of content blocks. We associate each of the content blocks with a specific didactic unit. A set of didactic units can be chosen either arbitrary, or depending on the students' abilities demonstrated in studying previous didactic units. In this way, a set of interrelated disciplines to be studied can be presented. Moreover, for each student, the study of specific didactic units can be represented as the sequence of independent content blocks. The essence of the proposed approach is the fact that the MDT is namely the structure comprising all the content blocks.

## 2. Basic Concepts and Definitions

The main concepts used in our paper are the following [11]:

*Respondent* (a person/student participating in a testing process).

*Diagnostic test* (a test, providing to define the level of the respondent's knowledge and skills in comparison with a predetermined level).

*Mixed diagnostic test* (a diagnostic test comprising both unconditional and conditional components).

*Unconditional component of mixed diagnostic test* (UCMDT) (a portion of the test that includes tasks undependable on previous test results. UCMDT allows the concurrent representation of constituent tasks).

*Conditional component of mixed diagnostic test* (CCMDT) (a portion of the test that includes tasks, sequence of which depends on previous test results. Tasks included in CCMDT are called conditional tasks).

*MDT tree* (a *structure* representing relationships between separate blocks (tasks) of the MDT. The root node is associated with the unconditional component of MDT. Each of the remaining nodes is associated with either unconditional or one of the conditional tasks. The MDT tree edges define connections between nodes).

## 3. Formulation of the Problem

In our paper, we demonstrate a method for constructing a mixed test, that can be used as a pretest which is run before the course. The pretest is based on a number of prerequisites. The main idea of such

a test is an assessing the initial level of the students' knowledge. The pretest is intended to clarify the level of understanding different disciplines, which are far away from each other. This fact makes the using of MDT unconditional components highly desirable. Such components, being isolated from each other during the testing, contribute their own weight into the total value of estimated knowledge. We call such a test as *MDT with extended structure of the unconditional component*.

### 3.1. Structure of the Test Tree

The structure of the mixed diagnostic tree is introduced in [12]. The tree comprises a set of unconditional and conditional components intended for using during the learning a specific subject of the course. As a continuation of the study [12], we extend the structure of the diagnostic tree by increasing a number of possible directions. Such extension enables to form the strategy of learning different disciplines.

Next, we introduce a concept of the basic structure and a conditional fragment of the structure in order to represent the MDT structure in compact form.

The basic MDT structure is shown in Fig. 1. The structure comprises one unconditional component and a number of conditional tasks connected with this component. *Conditional fragment of the MDT tree* is a conditional task with a number of other conditional tasks connected with the fragment.

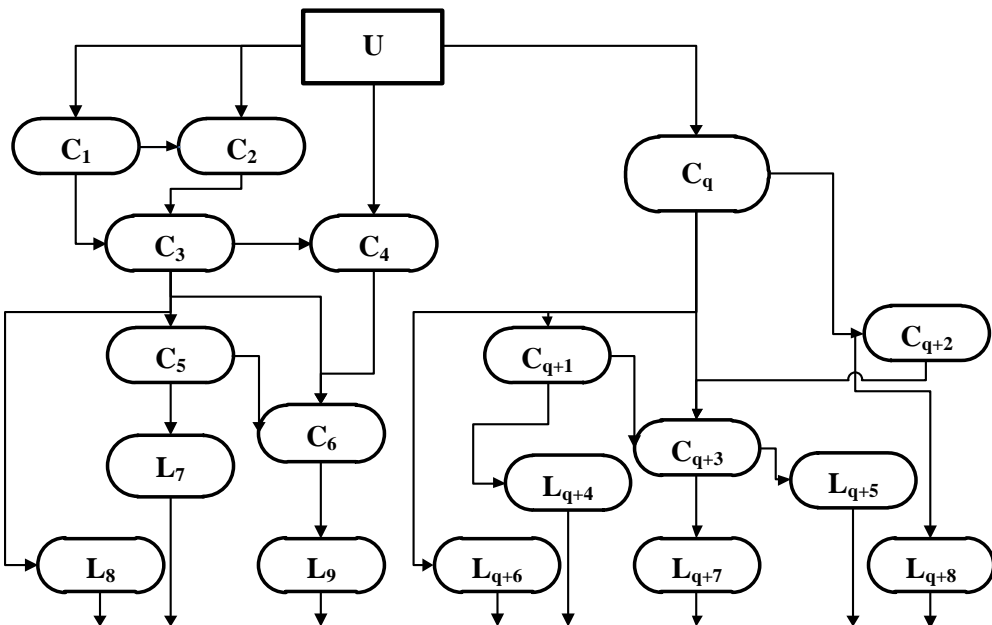


Fig. 1. Basic structure of MDT ( $U$  is unconditional component of the MDT;  $C_i$  is  $i$ -th conditional task, where  $i \in \{1, 2, \dots, 6, q, q + 1, q + 2, q + 3\}$ ;  $L_j$  is  $j$ -th conditional task being a leaf of the tree,  $j \in \{7, 8, 9, q + 4, \dots, q + 8\}$ )

We will use a minimized representation of the basic structure shown in Fig. 2a and a minimized representation of the conditional fragment shown in Fig. 2b.

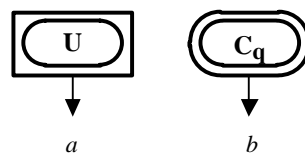


Fig. 2. Minimized representation:  
 $a$  – the basic MDT structure;  $b$  – the conditional fragment of the MDT tree

A number of extended MDT tree structures can be constructed.

I. An extended tree structure including a connection of the basic structure with  $t$  other basic structures, which are not interconnected as shown in Fig. 3a.

II. An extended tree structure including connections between  $t$  basic structures, which are not inter-connected, but have outputs connected with the input of another basic structure, as shown in Fig. 3b.

III. An extended tree structure including connections between  $t$  basic structures, which are not inter-connected, but have outputs connected with the input of conditional component of the structure, as shown in Fig. 3c.

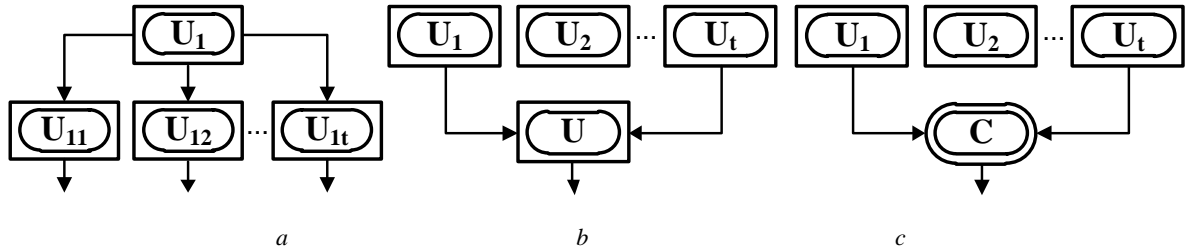


Fig. 3. The extended MDT tree structure:  
 a – the first type; b – the second type; c – the third type

Let us move to a number of examples of the using above extended structures of MDT trees in learning specific disciplines and assessment of student achievements.

1. The strong prerequisite for learning math is a certain level of knowledge of high school math (Fig. 4). The initial part of the MDT indicates whether student is ready for the perception and understanding the course content. In general, the MDT can be used for evaluating students’ achievements in learning math.

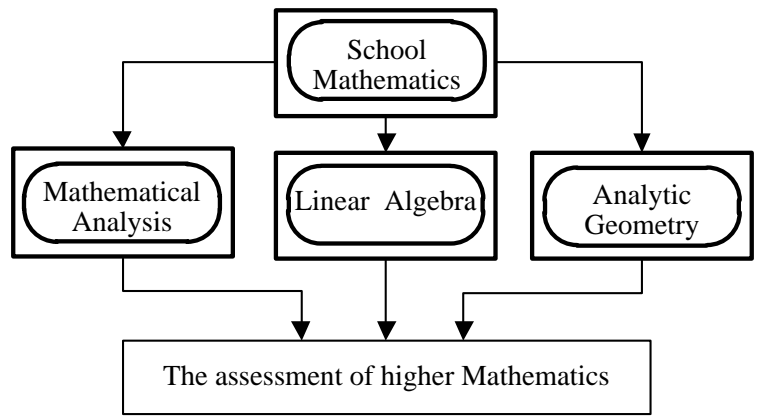


Fig. 4. The extended MDT tree structure for mathematical courses

2. Learning the BSc course “Introduction to Algorithms” depends on students’ prior knowledge of math models, discrete math and a number of initial programming skills (Fig. 5). Evaluating such requirements combined with formulating recommendations for learning additional topics enables decreasing the time required for learning a new subject.

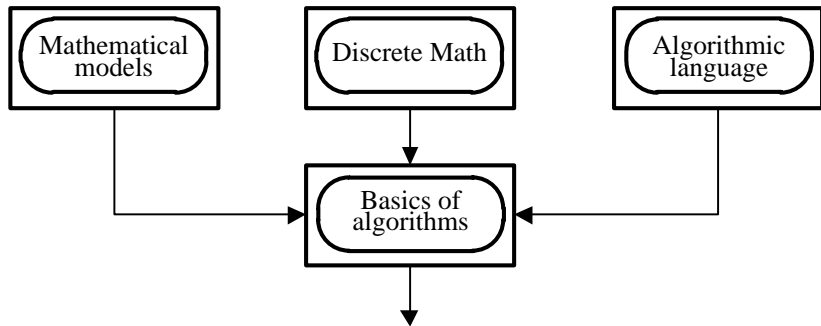


Fig. 5. The extended MDT tree structure for the courses “Introduction to Algorithms”



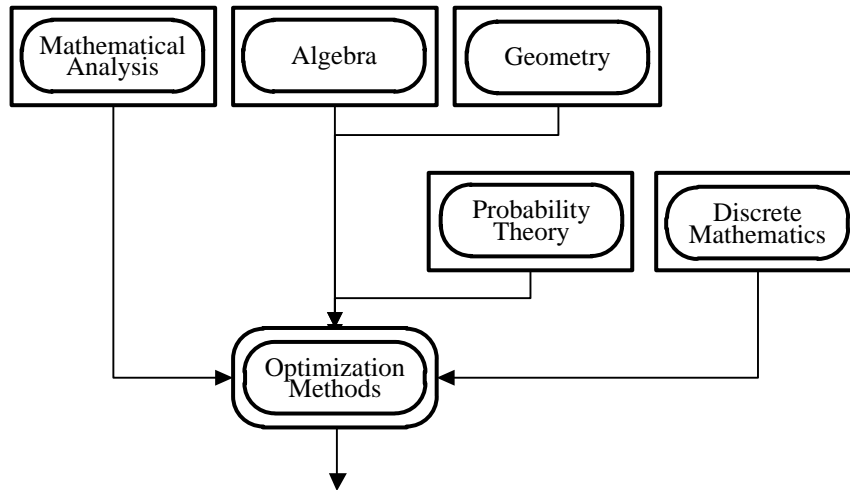


Fig. 6. The extended MDT tree structure for the courses “Optimization methods”

3. Course “Optimization methods” is the mandatory course for students studying disciplines connected to the applied math (Fig. 6). For the successful learning of the course, a deep knowledge in calculus, algebra, geometry, probability theory, discrete math is required. The MDT allows to detect the missing topics of content in students’ knowledge and, in the case the absence of such topics, to provide the permission to start learning a new course.

#### 4. Constructing Data Structures of the MDT Tree Nodes

##### 4.1. In this section, the data structures of the unconditional MDT component is discussed

4.1.1. For each unconditional test component, a coefficients matrix of the correct answers has to be constructed. The matrix comprises weighed coefficients of questions, for simplicity called *weights* (Table 1) [12].

Table 1

Matrix of coefficients for one of the unconditional test component

	1	2	...	$j$	...	$k$	weight
1	$a_{11}$	$a_{12}$	...	...	...	$a_{1k}$	$w_1$
2	$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2j}$	...	$a_{2k}$	$w_2$
...	...	...	...	...	...	...	...
$i$	$a_{i1}$	$a_{i2}$	...	$a_{ij}$	...	$a_{ik}$	$w_i$
...	...	...	...	...	...	...	...
$n$	$a_{n1}$	$a_{n2}$	...	$a_{nj}$	...	$a_{nk}$	$w_n$

Rows of the matrix are associated with test tasks proposed to the respondent while he passes a test component, columns of the matrix correspond to a number of respondent’s answers,  $n$  is the number of questions,  $k$  is the maximum number of possible answers. The weight  $w_i$  of the answer has to satisfy the condition  $0 < w_i \leq 1$  for any  $i$ .

For test tasks of so-called closed type, with the only possible answer,  $k$  is equal to the number of possible answers. For test tasks of the closed type with multiple answer  $k = \sum_{i=1}^m C_m^i$ ,  $m$  is the number answers,  $C_m^i$  is the number of combinations from  $m$  elements on  $i$ . For the test tasks comparing two lists:  $k = l!$ , where  $l$  – the length of the list. For the test tasks of recognition of the correct sequence:  $k = s!$ , where  $s$  is the number of the sequence elements.

A matrix element at the intersection of the  $i$ -th row and the  $j$ -th column specifies a weight of the  $j$ -th answer to the  $i$ -th question. Note that the total number of answers for different questions may be different. As the result, the matrix may contain a number of empty elements.

Complementary to the above matrix, a so-called threshold assessment of learning material  $p_t$ ,  $0 \leq p_t \leq 1$ ,  $p_t$  ( $t$  is a number of MDT tree nodes), has to be specified. The assessment is performed simultaneously with testing. After that, the result of the assessment is compared with a threshold.

4.1.2. The results of the testing according to the unconditional components are inserted into a table as a sequences of pairs. Each pair comprises: 1) a question number; 2) a corresponding response number.

**4.2. Let us consider a data structure for the conditional component of the test**

4.2.1. For each of the conditional fragment of the tree (see Fig. 3) the matrix of coefficients and weight of questions have to be constructed (Table 2).

Table 2

**Matrix of coefficients for one of the conditional fragment of the tree**

	1	2	...	$j$	...	$k$	weight
$q$	$a_{q1}$	$a_{q2}$	...	...	...	$a_{qk}$	$w_q$
$q + 1$	$a_{q+1,1}$	$a_{q+1,2}$	...	...	...	$a_{q+1,k}$	$w_{q+1}$
...	...	...	...	...	...	...	...
$i$	$a_{i1}$	$a_{i2}$	...	$a_{ij}$	...	$a_{ik}$	$w_i$
...	...	...	...	...	...	...	...
$r$	$a_{r1}$	$a_{r2}$	...	$a_{rj}$	...	$a_{rk}$	$w_r$

Rows of the matrix are associated with the test tasks given to the respondent while passing a test component, the columns is the index (number) of respondent's answers,  $n$  is the interval of numbers of questions,  $k$  is the maximum number of possible answers (both correct and incorrect answers). Answers weight  $w_i$  has to satisfy the condition  $0 < w_i \leq 1$  for any  $i$ .

Rules for defining  $k$ ,  $p$  and filling out the matrix of the coefficient are the same as in the above unconditional matrix of coefficients.

4.2.2. The results of the testing are included during the testing into a table in a form of the sequence of pairs containing: 1) the question number; 2) the answer number. The resulting table can be used for reconstructing the test trajectories.

**5. The Test Strategy**

**5.1. The test strategy for the unconditional component of the MDT**

An unconditional node is an initial node of any test (Fig. 2). A respondent receives all the tasks on this part. His answer is recorded in a form of a pair  $i, j(i)$ , where  $i$  is the number of the question,  $j(i)$  is the number of the selected answer to the  $i$ -th question. This information enables then to reconstruct the passing the test by each student. According to test results, intermediary assessment is calculated  $V_u = \left( \sum_{i=1}^n a_{i,j(i)} \times w_i \right) / n$ .

The score is compared with threshold value  $p_u$ , after which there is an appeal to any other unconditional test component determined on the MDT tree, moves to the conditional component of the test, or to the recommendations to return back for learning the corresponding topic [11]. The above step is based on methods of fuzzy and threshold logic.

Similarly, every other component of the unconditional test is tested. An appearance of a node of a conditional task changes this similarity.

### 5.2. The test strategy for the conditional component of the MDT

The concept of MDT assumes that only one conditional task is selected from the list of conditional components of the test (Fig. 4). The test tree can be determined on the base on its response. The respondent's answer is registered in a form of a pair  $i, j(i)$ , where  $i$  is the question number,  $j(i)$  is the number of the chosen question. An intermediary assessment is calculated  $V_{c_i} = a_{i, j(i)} \times w_i$  on the base of test results. Then this value is compared with the corresponding threshold  $p_{c_i}$ , where  $i$  is the number of a chosen conditional task. Thereafter, another component appears. The component can be determined by the MDT tree. Otherwise, it will be recommended to study a specific topic again. It should be noted that if there are several questions concerning the set of conditional components in the course material, they are supposed to be equal. Just one of them has to be chosen, for example, randomly.

### 5.3. The test strategy for the MDT tree first type traversing

The testing begins from a specific basic MDT structure  $U_1$  (Fig. 5). On this stage, table are filling out by the results described in 5.1 and 5.2. The received information may be widely used in order to form individual trajectories for each of students. The possible ways for future testing, first of all, depend on the calculated assessment (grade) of knowledge.

A. A certain portion of the test is passed successfully. Choosing one of the next basic structures from  $\{U_{11}, U_{12}, \dots, U_{1t}\}$  for testing is determined by the expert, the test developer:

- the sequential enumeration of all remaining basic structures;
- the random enumeration of all remaining basic structures;
- a certain order of running specific basic test structures.

B. A certain portion of the test is not passed. Some recommendations for repeated studying specific topics of the course are provided. Particularly, repeated staying that begins from the unconditional component can be recommended.

Every basic structure of  $\{U_{11}, U_{12}, \dots, U_{1t}\}$  is running independently, being isolated from other basic structures. The final result is forming gradually. It can be reported in a form of the set of results for each of the basic structures or as integrated test based assessment (grade).

### 5.4. The test strategy for the MDT tree second and third type traversing

The order for the testing of the basic MDT structures from  $\{U_1, U_2, \dots, U_t\}$  is determining by expert, test developer, as it is described in section 5.3.A. The final result is forming gradually. It can be reported in a form of the set of results for each of the basic structures or as integrated assessment (grade) for the considered block of the basic MDT structures. The concluding step of the testing can be presented as the basic MDT structure (Fig. 1) and as a conditional fragment of the MDT structure (Fig. 3).

Since the evaluation of test results is produced for each traversed node of the test tree, the total score is gradually accumulated and, if necessary, testing can be interrupted at any step, with the further renewal.

The final grade can be both quantitative and qualitative if a mutual agreement between qualitative and quantitative scales is specified.

An important advantage of the MDT is the ability to use both the intermediary and the final results of testing for the cognitive analysis. A visualized representation of students' achievements demonstrates the progress in learning and can serve as an additional means for motivating students.

## Conclusion

The concept of a mixed diagnostic test (MDT) combining unconditional and conditional components is introduced. A technique for the development and application of the mixed diagnostic tests is provided. We

demonstrated that utilizing the mixed diagnostic tests in blended education and training for assessing knowledge, professional and personal skills and abilities. The proposed approach for developing the MDT uses methods of fuzzy and threshold logic [11].

The use of MDT can support the process of the curriculum development. It provides valuable recommendations for constructing learning paths, which reduces the time and cost expenses for the organization and management of the educational process. Since the MDT can actually replace the teacher as a consultant, the proposed approach can be used for blended education and training as well as in MOOC based learning [13–15]. The technique is illustrated by a number of examples of interdisciplinary interaction in the study of new disciplines.

The proposed MDT approach provides a unique possibility to interrupt the testing procedure and to restart it later from the same point. Mainly since that, we strongly believe that the proposed approach is applicable for planning long-term educational processes.

## REFERENCES

1. Bliuc, A.M., Goodyear, P. & Ellis, R.A. (2007) Research focus and methodological choices in studies into students' experiences of blended learning in higher education. *Internet and Higher Education*. 10. pp. 231–244. DOI: 10.1016/j.iheduc.2007.08.001
2. Graham, C.R. (2006) Blended learning systems: definition, current trends, and future directions. In: Bonk, C.J. & Graham, C.R. (eds) *The handbook of blended learning: Global perspectives, local designs*. San Francisco, CA: Pfeiffer Publishing. pp. 3–21.
3. Liyanagunawardena, T.R., Adams, A.A. & Williams, S.A. (2013) MOOCs: A systematic study of the published literature 2008–2012. *The Int. Review of Research in Open and Distance Learning*. 14(3). pp. 202–227. DOI: 10.19173/irrodl.v14i3.1455
4. Kostyuk, Y.L., Levin, I.S., Fuks, A.L., Fuks, I.L., & Yankovskaya, A.E. (2014) Massive open online courses – the modern concept in education and learning. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(26). pp. 89–98.
5. Singera, F.M. & Stoicescu, D. (2011) Using blended learning as a tool to strengthen teaching competences. *Procedia Computer Science*. 3. pp. 1527–1531. DOI: 10.1016/j.procs.2011.01.043
6. Brusilovsky, P., Knapp, J. & Gamper, J. (2006) Supporting teachers as content authors in intelligent educational systems. *International Journal of Knowledge and Learning*. 2(3/4). pp. 191–215. DOI: 10.1504/IJKL.2006.010992
7. Uskov, V. & Uskov, A. (2010) Computers and advanced technology in education – perspectives for 2010–2015. *Proc. of the 13th IASTED Int. Conf. on Computers and Advanced Technology in Education (CATE 2010)*, Maui, Hawaii, USA.
8. Ausburn, L.J. (2004) Course design elements most valued by adult learners in blended online education environments: an American perspective. *Educational Media International*. 41(4). pp. 327–337. DOI: 10.1080/0952398042000314820
9. Shute, V.J. & Rahimi, S. (2017) Review of computer-based assessment for learning in elementary and secondary education. *Journal of Computer Assisted Learning*. 33(1). pp. 1–9. DOI: 10.1111/jcal.12172
10. Yankovskaya, A. (1996) Design of optimal mixed diagnostic test with reference to the problems of evolutionary computation. *Proc. First Int. Conf. on Evolutionary Computation and Its Applications*, Moscow, EVCA'96. pp. 292–297.
11. Yankovskaya, A.E. & Semenov, M.E. (2013) Application mixed diagnostic tests in blended education and training. *Proc. of the IASTED International Conference Web-based Education (WBE 2013)*, Innsbruck, Austria. pp. 935–939.
12. Yankovskaya, A.E. (2018) Intelligent learning-testing and predictive systems with a cognitive component, based on Mixed Diagnostic Tests. *Russian Foundation for Basic Research Journal*. 4(100). pp. 26–32. DOI: 10.22204/2410-4639-2018-100-04-26-32.
13. Bennett, R.E. (2011) Formative assessment: A critical review. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*. 18(1). pp. 5–25. DOI: 10.1080/0969594X.2010.513678
14. Farrell, T. & Rushby, N. (2015) Assessment and learning technologies: An overview. *British Journal of Educational Technology*. 47(1). pp. 160–120. DOI:10.1111/bjet.12348
15. Gikandi, J.W., Morrow, D. & Davis, N.E. (2011) Online formative assessment in higher education: review of the literature. *Computers & Education*. 57(4) pp. 2333–2351. DOI: 10.1016/j.compedu.2011.06.004

Received: May 7, 2019

Yankovskaya A.E., Levin I.S., Fuks I.L. (2019) MIXED DIAGNOSTIC TESTS STRUCTURE FOR LEARNING AND TESTING SYSTEMS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 49. pp. 101–109

DOI: 10.17223/19988605/49/12

Янковская А.Е., Левин И.С., Фукс И.Л. СТРУКТУРА СМЕШАННЫХ ДИАГНОСТИЧЕСКИХ ТЕСТОВ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХ И ТЕСТИРУЮЩИХ СИСТЕМ. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2019. № 49. С. 101–109

Предложен новый метод повышения эффективности учебной деятельности обучающихся. Метод основан на создании обучающих траекторий, получаемых в процессе применения смешанных диагностических тестов. Траектории обучения строятся с использованием специальных смешанных диагностических тестов, представляющих собой оптимальное сочетание безусловных и условных компонентов. Смешанные диагностические тесты могут быть использованы как в смешанном образовании и обучении, так и в массовых открытых онлайн-курсах (МООС). Смешанное диагностическое тестирование обеспечивает мониторинг знаний, профессиональных и личных навыков и способностей учащихся, а также построение траекторий обучения для каждого учащегося. В статье представлена инновационная междисциплинарная методика построения смешанных диагностических тестов.

Ключевые слова: смешанное образование и обучение; массовые открытые онлайн курсы; траектория обучения; дерево смешанных диагностических тестов; междисциплинарное тестирование.

*YANKOVSKAYA Anna Efimovna* (Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Software Engineering of National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: ayyankov@gmail.com

*LEVIN Ilya Semenovich* (Professor, School of Education, Tel Aviv University, Israel).

E-mail: ilial@tauex.tau.ac.il

*FUKS Irina Lvovna* (National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: fookil@sibmail.com

**ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ**

УДК 004.514.6

DOI: 10.17223/19988605/49/13

**В.В. Грибова, Л.А. Федорищев****АДАПТИВНЫЙ ГЕНЕРАТОР-WIMP-ИНТЕРФЕЙСА  
РЕДАКТОРОВ БАЗЫ ЗНАНИЙ НА ОСНОВЕ ОНТОЛОГИИ**

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке фонда РФФИ № 17-07-00956,  
№ 19-07-00244 и КПФИ «Дальний Восток» № 18-5-078.*

Рассматриваются концепция и основные принципы проектирования, реализации и адаптивной генерации пользовательских WIMP-интерфейсов облачных редакторов баз знаний и данных по их онтологии и базе знаний о правилах проектирования интерфейсов. Для иллюстрации предложенного подхода приведены концептуальные схемы генерации интерфейса и представлены соответствующие примеры.

**Ключевые слова:** WIMP-интерфейсы; онтологии; адаптивность; редактор базы знаний.

Пользовательский интерфейс является неотъемлемым компонентом подавляющего большинства программного обеспечения (ПО). Его разработка достаточно трудоемка и, по оценкам различных специалистов, занимает не менее половины времени, требуемого на разработку ПО в целом [1, 2]. Разработчику интерфейса приходится учитывать требования пользователей, их опыт, предпочтения, контекст использования программного средства, знания стандартов разработки, руководство по стилю целевой платформы и т.п. Таким образом, качество пользовательского интерфейса целиком и полностью зависит от навыков и умений его разработчика. Поэтому актуальность исследований в области автоматизации разработки пользовательских интерфейсов с учетом большого количества факторов очевидна.

Среди множества классов ПО выделяется особый класс – системы с базами знаний (СБЗ), которые в настоящее время активно используются для решения многих научных и практических задач; можно говорить о периоде зрелости данного класса систем. Несмотря на ряд успехов, достигнутых как российскими так и зарубежными коллективами, разрабатываемыми инструментами для их проектирования, одной из острых остается проблема формирования базы знаний экспертами предметной области без посредников в лице инженеров знаний и программистов. Одним из решений этой проблемы является использование онтологического подхода.

Существующие редакторы баз знаний, в том числе на основе онтологий – IWE, Protégé, OntoEdit, GrOWL, Graphl, RDFGravity, WebVOWL, Ontolingua, OntoSaurus, OilEd, WebOnto, WebODE и др., предлагают пользователям различные интерфейсные решения. В большинстве из них интерфейс редактора основан на экранных формах (WIMP-интерфейс<sup>1</sup>). В некоторых редакторах интерфейс с помощью плагинов или встроенных средств может быть также расширен другими видами представлений (графовые структуры, графические схемы, таблицы и др.), которые реализуют, как правило, только просмотр информации; ее ввод и редактирование осуществляются с помощью WIMP-интерфейса как наиболее распространенного и интуитивно понятного. Однако, несмотря на разнообразие интерфейсных решений, они имеют «жесткий» интерфейсный стиль, не адаптирующийся к структуре содержимого, внутреннему или внешнему окружению, изменению типа пользователя, работающего с ПО, и тому подобному в соответствии с требованиями проектирования (стандартами

<sup>1</sup> WIMP-интерфейс (windows, icons, menus, pointers – окна, пиктограммы, меню, указатели) в человеко-компьютерном взаимодействии означает взаимодействие с компьютером на базе этих элементов.

юзабилити<sup>1</sup>). В то же время важность адаптивных технологий в области разработки интерфейсов активно обсуждается в литературе [3, 4], при этом во многих приложениях (компьютерных играх, ряде мобильных сервисов) именно адаптивные интерфейсные технологии позволили вывести их на новый уровень, благодаря умению «интеллектуально» подстроиться под каждую задачу и пользователя. Учитывая, что разработчиками баз знаний являются эксперты в предметной области (в соответствии с современным подходом к разработке интеллектуальных систем), имеющие разный уровень владения компьютерными технологиями, исследования в области создания пользовательских интерфейсов, учитывающих структуру исходных данных, устройство, платформу, предпочтения и особенности пользователя, для редакторов баз знаний и сложноструктурированных данных являются актуальными.

Целью работы является описание концепции создания адаптивных генераторов пользовательских WIMP-интерфейсов по онтологии знаний. Описана архитектура программного средства и ее основные компоненты.

## 1. Концепция автоматизации разработки адаптивных редакторов баз знаний

В настоящее время наиболее распространенным является подход к формированию баз знаний на основе онтологий. В работах [5–13] подробно обсуждаются преимущества такого подхода. В соответствии с ним на первом этапе инженер по знаниям создает онтологию предметной области (или онтологию знаний), используя язык описания онтологии, на втором – автоматически генерируется редактор знаний (по онтологии), и затем эксперт предметной области (возможно, с инженером по знаниям) формирует базу знаний [14–17]. При этом метод генерации интерфейса редактора по созданной онтологии является фиксированным. Таким образом, основной недостаток описанного подхода состоит в том, что интерфейс генерируется на основе онтологии по «жесткой схеме», встроенной в генератор редакторов (рис. 1).

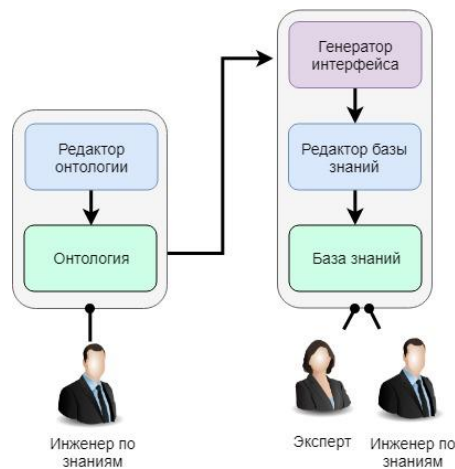


Рис. 1. Традиционный подход к генерации редакторов знаний  
Fig. 1. The traditional approach to generating knowledge editors

Для устранения указанного недостатка предлагается новая концепция, основные положения которой заключаются в следующем:

1. Вводится множество абстрактных элементов интерфейса, т.е. элементов, которые решают определенные интерфейсные задачи (ввод строки или числа, выбор из множества, вывод строки или числа и т.п.), но не фиксируют конкретный интерфейсный элемент и его визуальное представление.

2. Для каждого абстрактного элемента интерфейса задается множество его адаптаций – возможных вариантов визуального представления. Каждому визуальному представлению соответствует некоторый элемент WIMP-интерфейса с набором параметров. При этом с каждым элементом адапта-

<sup>1</sup> От англ. usability – удобство использования, пригодность использования, эргономичность – способность продукта быть понимаемым, изучаемым, используемым и привлекательным для пользователя в заданных условиях (ГОСТ Р ИСО/МЭК 25010–2015).

ции (WIMP-элементом) связано условие его применимости, которое зависит от типа операционной системы, устройства, структуры информации, типа пользователя, его предпочтений, среды использования и других факторов. Учитывая, что интерфейсные элементы, знания о проектировании, платформы и устройства постоянно изменяются и должны непрерывно совершенствоваться, соответствие между абстрактными интерфейсными элементами и их адаптациями задается в базе знаний о проектировании интерфейса.

3. Модель интерфейса (модель задач). Модель интерфейса определяет иерархию, расположение и порядок отображения (абстрактных) интерфейсных элементов в процессе работы с сервисом с учетом выполнения программной логики. Модель интерфейса определяет предпочтения пользователя (интерфейсный стиль, тип диалога, уровень владения компьютером и пр.). Вся информация, полученная либо от пользователя, либо в процессе его работы с редактором (число ошибок, скорость работы, порядок внесения информации и др.) сохраняется. Если пользователь не задает начальную информацию, то используется система умолчаний, а адаптация осуществляется на основе динамической (полученной в процессе работы с пользователем) информации.

4. Разрабатывается генератор интерфейса, который по онтологии предметной области, базе знаний о проектировании интерфейса и модели интерфейса формирует пользовательский интерфейс и обеспечивает его адаптацию к пользователю в процессе формирования базы знаний.

В соответствии с приведенными выше положениями концепции и современным подходом к разработке СБЗ необходимы следующие информационные ресурсы:

1. Онтология WIMP-элементов и сформированная по ней база (библиотека) WIMP-элементов, содержащая повторно используемое и расширяемое множество WIMP-элементов и их атрибутов, зависящих от платформы и устройства, а также специального (пользовательского) множества WIMP-элементов – реализаций для конкретной предметной области.

2. Онтология знаний о проектировании интерфейсов и база знаний о проектировании интерфейсов, соответствующая стандартам проектирования.

3. Онтология модели интерфейса.

## 2. Архитектура программного средства

В соответствии с приведенной концепцией предлагается следующая схема генерации WIMP-интерфейсов редакторов знаний (рис. 2).



Рис. 2. Формирование редактора с адаптивным WIMP-интерфейсом

Fig. 2. Formation of an editor with adaptive WIMP-interface



Формирование онтологии производится, как и в традиционном способе. Далее эксперт предметной области формирует модель интерфейса (указывает предпочтения пользователя, уровень владения компьютером, предпочтительный тип диалога и др.) либо дизайнер интерфейса задает в модели интерфейса общепринятые в предметной области способы представления информации. Этот этап может отсутствовать, тогда используется система умолчаний, при этом в процессе работы пользователя с редактором знаний модель интерфейса дополняется динамической информацией о пользователе (скорость работы, число ошибок, порядок действий и др.). Генератор редактора знаний по онтологии, модели интерфейса и базе знаний о проектировании интерфейса формирует пользовательский интерфейс и управляет им в процессе формирования базы знаний. Отдельным блоком системы является формирование базы знаний о проектировании интерфейса. База знаний разрабатывается на основе онтологии базы знаний по технологии создания онтологий, при этом используется библиотека WIMP-элементов, которая также формируется по соответствующей онтологии.

### 3. Онтология WIMP-элементов

Для формального представления онтологий будет использоваться нотация языка ИРУО [17–18]. Онтология WIMP-элементов состоит из двух основных разделов: множество WIMP-элементов и множество стилей:

```

Онтология WIMP элементов {
  ~copy WIMP-элементы {~ set WIMP -элемент {
    ~copy CSS-стили
    <Набор уникальных свойств>
  }}
  ~copy CSS-стили {~set CSS {
    ~copy selector {<...>}
    ~copy body {<...>}
  }}
}

```

WIMP-элементы – это стандартные «оконные» интерфейсные элементы: Базовый элемент (Div), Текст (Text), Кнопка (Button), Текстовое поле ввода, Списки (пролистываемый, выпадающий) (List, Combobox), Вкладки (Tabs), Радио-кнопки (RadioGroup), Чек-боксы (CheckboxGroup), Ползунок (Slider), Пиктограмма (Picture). Структурно каждый из этих элементов состоит из некоторого набора уникальных для данного элемента атрибутов и стилей CSS.

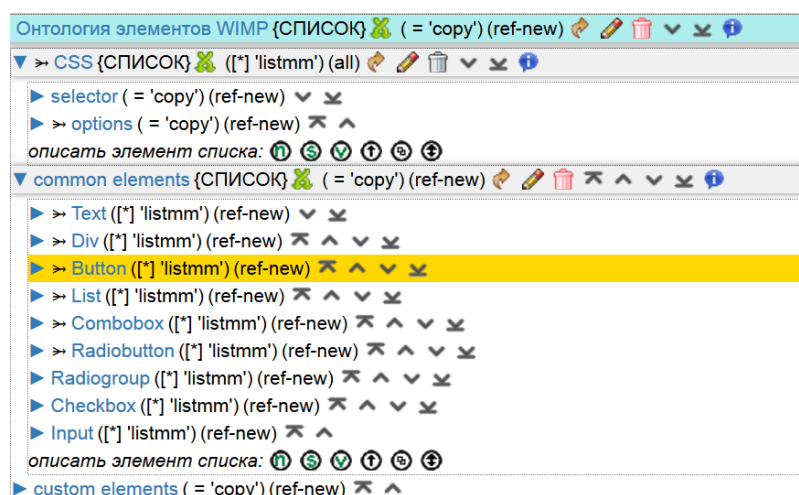


Рис. 3. Скриншот онтологии WIMP-элементов

Fig. 3. Screenshot of the ontology of WIMP-elements

CSS-стили – это каскадные таблицы стилей (аналогичные таблицам Cascading Style Sheets – CSS из веб-технологий), которые задают множества возможных типов оформления внешнего вида

WIMP-элементов, начиная от простых, таких как шрифт, цвет, размер элементов, до составных, содержащих наборы интерфейсных решений. Их определение осуществляется в соответствии принятым определением в веб-разработке [19] и состоит из «селектора» и «тела». «Селектор» определяет, для каких именно элементов интерфейса применить заданные правила (свойства). «Тело» стиля содержит набор свойств, которые будут применяться для соответствующих селектору элементов (рис. 3).

#### 4. Онтология БЗ о проектировании WIMP-интерфейса

База знаний о проектировании WIMP-интерфейса строится на основе онтологии, которая задает наборы соответствий между абстрактным интерфейсным элементом и его возможными представлениями в интерфейсе (рис. 4).

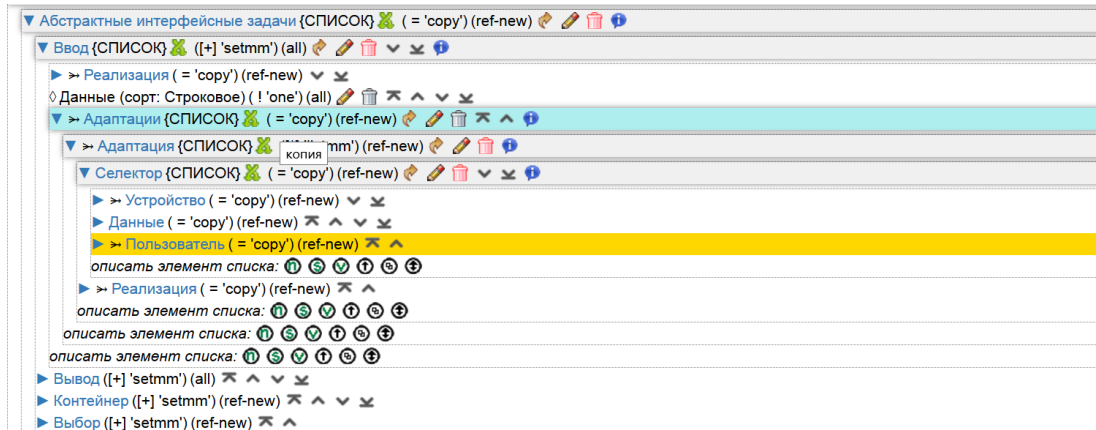


Рис.4. Скриншот онтологии с базами знаний о проектировании WIMP-интерфейса  
Fig. 4. Screenshot of an ontology with knowledge bases on designing a WIMP-interface

Применимость элемента определяется набором условий (адаптаций).

```

~one Абстрактный интерфейсный элемент {
    ~one -> WIMP-элемент
    ~set <Адаптация>
}

```

WIMP-элемент – это ссылка на WIMP-элемент (с конкретными параметрами) из онтологии WIMP.

<Адаптация> – это множество вариантов применимости интерфейсного элемента в зависимости от условий:

```

~set Адаптация {
    ~сору <Селектор адаптации>
    ~сору <Реализация>
}

```

<Селектор адаптации> – это набор условий адаптации, при выполнении которых интерфейсный элемент получает параметры, указанные в блоке <Реализация>. Условия реализации определяются следующими факторами: устройство, данные, пользователь:

```

~сору Селектор адаптации {
    ~сору <Устройство>
    ~сору <Данные>
    ~сору <Пользователь>
}

```

<Устройство> определяет его тип (например, ПК, планшет, смартфон), операционную систему (например, Android, Windows, IOS) и размеры.

<Данные> содержит параметры, характеризующие внешнее или внутреннее окружение элемента, которое может влиять на представление данного элемента, например количество потомков.

<Пользователь> определяет параметры адаптации, зависящие от данных пользователя, который работает в настоящее время с интерфейсом. Данные пользователя могут быть динамическими (скорость работы, количество ошибок и др.) и статическими (возраст, особые запросы и особенности и др.).

С каждым абстрактным элементом интерфейса может быть связано множество возможных интерфейсных элементов, как определенных разработчиками системы, так и разработанных пользователями. Список таких элементов был сформирован авторами данной работы на основе анализа литературы [2–4] и собственного опыта проектирования интеллектуальных интерфейсов [16–18]. Каждый абстрактный элемент задается своим именем и набором параметров (рис. 5):

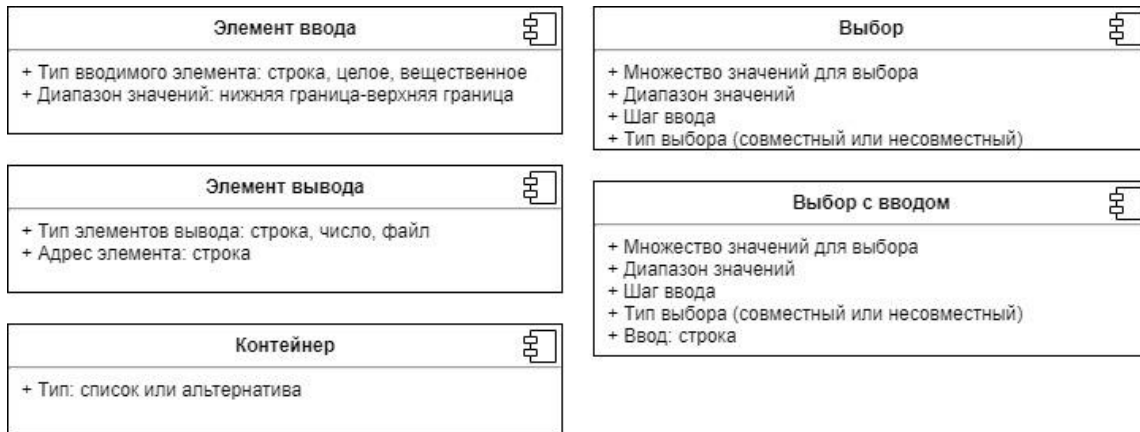


Рис. 5. Абстрактные элементы интерфейса  
Fig. 5. Abstract interface elements

На рис. 6 приведен пример возможных реализаций для абстрактного элемента «ВЫБОР». Как видно из данного примера, выбор элементов может осуществляться с использованием нескольких возможных элементов WIMP-интерфейса: группой радиокнопок, группой чек-боксов, пролистываемым и раскрывающимся списками. Выбор конкретного элемента WIMP-интерфейса определяется данными (количеством элементов и особенностью их выбора – несовместный (единственный) выбор или совместный), типом пользователя (продвинутый или новичок) и т.д.

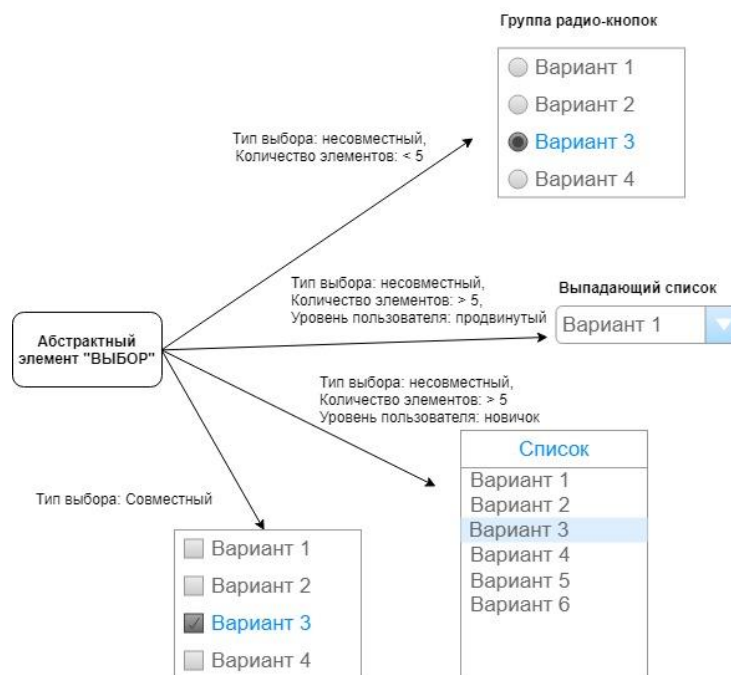


Рис. 6. Возможные реализации WIMP-элементов для абстрактного интерфейсного элемента «ВЫБОР»  
Fig. 6. Possible implementations of WIMP-elements for the "SELECT" abstract interface element

Абстрактным элементам соответствует не только множество конкретных WIMP-элементов, но и множество вариантов реализации каждого интерфейсного элемента для различных операционных систем и устройств (размеры экрана, возраст пользователя и др.) – адаптации. Если ни одна адаптация не удовлетворяет условиям, то необходим отдельный вариант адаптации интерфейсного элемента – некоторый WIMP-элемент по умолчанию. Интерфейсный элемент по умолчанию – это ссылка на любой описанный WIMP-элемент (с конкретными параметрами) из библиотеки WIMP-элементов.

Условия в селекторе адаптации имеют свой приоритет. Приоритеты могут иметь значение в случае, когда выполнены все условия для двух или более селекторов, содержащих некоторые одинаковые параметры изменения в реализации WIMP-элемента. В таком случае будет выбран тот параметр, селектор которого имеет больший суммарный приоритет: приоритет селектора равен сумме приоритетов всех его условий.

## 5. Онтология модели интерфейса

Онтология модели интерфейса хранит информацию следующих видов:

1. Пользовательская (информация, полученная от пользователя).
2. Динамическая (информация, полученная в процессе работы с сервисом).

*Онтология базы знаний о проектировании WIMP-интерфейса* {  
     ~сору Пользователь { ... }  
     ~сору Динамическая информация { ... }  
 }

Модель интерфейса определяет иерархию, расположение и порядок отображения (абстрактных) интерфейсных элементов в процессе работы с сервисом с учетом выполнения программной логики. Определяется отображение и поведение интерфейса в соответствии с индивидуальными характеристиками и предпочтениями пользователя сервиса.

Пользователь сам заполняет данные о себе, вносит предпочтения. Если пользователь не задает начальную информацию, то используются параметры по умолчанию. Модель пользователя включает следующие компоненты: пол, возраст, образование и др.

~сору Пользователь {  
     ~one -> Пол {Муж | Жен}  
     ~one -> Возраст [integer]  
     ~set -> Параметр {  
         ~one -> Ключ [string]  
         ~one -> Значение [string]  
     }  
 }

...

}

Динамическая информация включает следующие виды данных: число ошибок, скорость работы, порядок внесения информации и др.

~сору Динамическая информация {  
     ~one -> Число ошибок [integer]  
     ...  
 }

## Заключение

Предложена концепция создания адаптивных генераторов пользовательских WIMP-интерфейсов по онтологии знаний. В статье описаны необходимые в концепции онтологии (онтология WIMP-элементов, онтология знаний о проектировании интерфейсов и онтология модели интерфейса) и соответствующие им базы знаний. Основным результатом работы заключается в модификации

подхода к формированию редакторов баз знаний и разработке концепции автоматизированного создания WIMP-интерфейса с использованием введенных абстрактных адаптивных элементов интерфейса, соотносящихся с элементами метаязыка и отображаемыми WIMP-элементами. В результате вместо фиксированного метода генерации интерфейса редактора предлагается адаптивный механизм, автоматически учитывающий изменяющиеся параметры реализации интерфейса: устройство, структуру информации, предпочтения пользователя.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Myers W.A., Rosson M.B. Survey on user interface programming // Proc. SIGCHI'92: Human Factors in Computing Systems. Monterey, CA, May 3–7, 1992. P. 195–202.
2. Корончик Д.Н. Пользовательские интерфейсы интеллектуальных систем // Кибернетика и программирование. 2012. № 1. С. 16–22.
3. Белоусова С.А., Рогозов Ю.И. Анализ подходов к созданию пользовательского интерфейса // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2014. № 6 (155). С. 142–148.
4. Верлань А.Ф., Сопель М.Ф., Фургат Ю.О. Об организации адаптивного пользовательского интерфейса в автоматизированных системах // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2014. № 1 (150). С. 100–110.
5. Гаврилова Т.А., Хорошевский В.Ф. Базы знаний интеллектуальных систем. СПб.: Питер, 2001. 384 с.
6. Грибова В.В., Клещев А.С. Управление проектированием и реализацией пользовательского интерфейса на основе онтологий // Проблемы управления. 2006. № 2. С. 58–62.
7. Загоруйко Ю.А., Загоруйко Г.Б. Онтологии и их практическое применение в системах, основанных на знаниях // Всероссийская конференция с международным участием «Знания – Онтологии – Теории» (ЗОНТ-2011). Новосибирск, 3–5 окт. 2011. Новосибирск: Ин-т математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2011. С. 132–141
8. Ломов П.А., Шишаев М.Г., Диковицкий В.В. Преобразование OWL-онтологий для визуализации и использования в качестве основы пользовательского интерфейса // Онтология проектирования. 2012. № 3 (5). С. 49–61.
9. Подлипский О.К. Построение баз знаний группой экспертов // Компьютерные исследования и моделирование 2010 Т. 2, № 1. С. 3–11.
10. Щеглов С.Н. Онтологический подход и его использование в системах представления знаний // Известия Южного федерального университета. 2009. № 4 (93) С. 146–153.
11. Bechhofer S., Stevens R., Ng G., Jacoby A., Goble C. Guiding the user: an ontology driven interface // Proceedings of the User Interfaces to Data Intensive Systems (UIDIS). 1999. P. 158–161.
12. Feikje H., Chris M., Peter E. Evaluating an ontology-driven WYSIWYG interface // Proc. of the 5th Int. Conf. on Natural Language Generation. 2008. P. 138–146.
13. Musen M.A. Dimensions of knowledge sharing and reuse // Computers and Biomedical Research. 1992. V. 25. P. 435–467.
14. Gribova V., Kleshev A., Moskalenko P., Timchenko V., Fedorischev L., Shalfееva E. The IACPaaS cloud platform: Features and perspectives // Second Russia and Pacific Conference on Computer Technology and Applications (RPC) (Vladivostok, Russia, 25–29 Sept. 2017). IEEE. 2017. P. 80–84.
15. Грибова В.В., Клещев А.С., Крылов Д.А., Москаленко Ф.М., Тимченко В.А., Шалфеева Е.А. Базовая технология разработки интеллектуальных сервисов на облачной платформе IACPaaS. Ч. 1. Разработка базы знаний и решателя задач // Программная инженерия. 2015. № 12. С. 3–11.
16. Грибова В.В., Клещев А.С., Москаленко Ф.М., Тимченко В.А. Модель редактора сложноструктурированных информационных единиц, управляемого метаинформацией, и его реализация // Научно-техническая информация. Сер. 2. 2016. № 2. С. 1–13.
17. Грибова В.В., Клещев А.С., Москаленко Ф.М., Тимченко В.А. Модель порождения орграфов информации по орграфу метаинформации для двухуровневой модели сложноструктурированных информационных единиц // Научно-техническая информация. Сер. 2. 2015. № 12. С. 26–38.
18. Грибова В.В., Клещев А.С., Москаленко Ф.М., Тимченко В.А. Двухуровневая модель сложноструктурированных информационных единиц, соответствующая метафоре анкетирования // Научно-техническая информация. Сер. 2. 2015. № 10. С. 1–10.
19. CSS. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/CSS> (дата обращения: 01.02.2019).

Поступила в редакцию 25 февраля 2019 г.

Gribova V.V., Fedorischev L.A. (2019) ADAPTIVE GENERATOR WIMP-INTERFACE FOR KNOWLEDGE BASE EDITOR BASED ON AN ONTOLOGY. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science] *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 49. pp. 110–119

DOI: 10.17223/19988605/49/13

The concept of creating adaptive generators of user-defined WIMP-interfaces on knowledge ontology is proposed. In accordance with this concept, a domain ontology is created, a knowledge editor is automatically generated, and then a domain expert creates a knowledge base. The article presents the ontologies necessary in the concept (the ontology of WIMP elements, the ontology of knowledge about interface design and the ontology of the interface model) and the corresponding knowledge bases.

The Ontology of WIMP elements consists of two main sections: the set of WIMP elements and the set of CSS styles. WIMP elements are standard “window” interface elements: buttons, text fields, controls, containers, and others. CSS styles are cascading style sheets that define a set of possible types of appearance design for WIMP elements.

The knowledge base on designing a WIMP interface is built on the basis of an ontology that defines sets of correspondences between an abstract interface element and its possible representations in the interface. The applicability of an element is determined by a set of conditions (adaptations).

The ontology of the interface model stores information of both the user and dynamic information obtained in the process of working with the service.

The novelty of the research lies in the modification of the approach to the formation of knowledge base editors and the development of the concept of the automated creation of a WIMP interface using the newly introduced abstract adaptive interface elements that correlate with the elements of the metalanguage and the displayed WIMP elements. As a result, instead of the fixed method of generating the interface of the editor, a new adaptive mechanism is proposed that automatically takes into account the changing parameters of the interface implementation: device, information structure, user preferences. To illustrate the proposed ideas, conceptual schemes for generating the interface are given and relevant examples are presented.

Keywords: WIMP-interface; ontologies; adaptability; knowledge base editor.

*GRIBOVA Valerya Victorovna* (Doctor of Technical Sciences, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of Russian Academy Sciences, Vladivostok, Russian Federation).

E-mail: gribova@iacp.dvo.ru

*FEDORISCHEV Leonid Aleksandrovich* (Candidate of Technical Sciences, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of Russian Academy Sciences, Vladivostok, Russian Federation).

E-mail: fleo1987@mail.ru

## REFERENCES

1. Myers, B.A. & Rosson, M.B. (1992) Survey on user interface programming. *Proc. SIGCHI'92: Human Factors in Computing Systems*. Monterey, CA. May 3–7. pp. 195–202.
2. Koronchik, D.N. (2012) Intelligent system user interfaces. *Kibernetika i programmirovaniye*. 1. pp. 16–22. DOI: 10.7256/2306-4196.2012.1.13861
3. Belousova, S.A. & Rogozov, Yu.I. (2014) Analysis of approaches to user interface building. *Izvestiya Yuzhnogo federalnogo universiteta. Tekhnicheskiye nauki – Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*. 6(155). pp. 142–148.
4. Verlan, A.F., Sopel, M.F. & Furtat, Yu.O. (2014) On adaptive user interface organization in automated systems. *Izvestiya Yuzhnogo federalnogo universiteta. Tekhnicheskiye nauki – Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*. 1(150). pp. 100–110.
5. Gavrilova, T.A. & Khoroshevsky, V.F. (2001) *Bazy znaniy intellektual'nykh sistem* [Intelligent systems knowledge bases]. St. Petersburg: Piter.
6. Gribova, V.V. & Kleshchev, A.C. (2006) Upravlenie proektirovaniem i realizatsiyey pol'zovatel'skogo interfeysa na osnove ontologiy [Control of ontology-based user interface design and implementation]. *Problemy upravleniya – Control Sciences*. 2. pp. 58–62.
7. Zagorulko, Yu.A. & Zagorulko, G.B. (2011) [Ontologies and their practical application in knowledge-based systems]. *Znaniya – Ontologii – Teorii* [Knowledge-Ontologies-Theories]. Proc. of the All-Russian Conference with International Participation. Novosibirsk.
8. Lomov, P.A., Shishaev, M.G. & Dikovitsky, V.V. (2012) Transformation of owl-ontology for visualization and usage as the basis of the user interface. *Ontologiya proektirovaniya – Ontology of Designing*. 3(5). pp. 49–61.
9. Podlipsky, O.K. (2010) Construction of knowledge bases by a group of experts. *Kompyuternye issledovaniya i modelirovaniye – Computer Research and Modeling*. 2(1). pp. 3–11. DOI: 10.20537/2076-7633-2010-2-1-3-11
10. Shcheglov, S.N. (2009) The ontologic approach and its use in systems of representation of knowledge. *Izvestiya Yuzhnogo federalnogo universiteta*. 4(93). pp. 146–153.
11. Bechhofer, S., Stevens, R.D., Ng, G., Jacoby, A. & Goble, C. (1999) Guiding the user: An ontology driven interface. *UIDIS*. pp. 158–161. DOI: 10.1109/UIDIS.1999.791472
12. Feikje, H., Chris, M. & Peter, E. (2008) Evaluating an ontology-driven WYSIWYG interface. *Proc. of the 5th Int. Conf. on Natural Language Generation*. pp. 138–146.
13. Musen, M.A. (1992) Dimensions of knowledge sharing and reuse. *Computers and Biomedical Research*. 25. pp. 435–467. DOI: 10.1016/0010-4809(92)90003-S

14. Gribova, V., Kleshev, A., Moskalenko, P., Timchenko, V., Fedorischev, L. & Shalfeeva, E. (2017) The IACPaaS Cloud Platform: Features and Perspectives. *Second Russia and Pacific Conference on Computer Technology and Applications (RPC)*. Vladivostok, Russia. September 25–29, 2017. IEEE. pp. 80–84. DOI: 10.1109/RPC.2017.8168076
15. Gribova, V.V., Kleshchev, A.S., Krylov, D.A., Moskalenko, F.M., Timchenko, V.A. & Shalfeeva, E.A. (2015) A Base Technology for Development of Intelligent Services with the Use of IACPaaS Cloud Platform. Part 1. A Development of Knowledge Base and Problem Solver. *Programmnaya inzheneriya – Software Engineering*. 12. pp. 3–11.
16. Gribova, V.V., Kleshchev, A.S., Moskalenko, F.M. & Timchenko, V.A. (2016) Model' redaktora slozhnostruktirovannykh informatsionnykh edinit, upravlyаемого metainformatsiy, i ego realizatsiya [Editor's model for complex structured information units driven by meta-information and its implementation]. *Nauchno-tekhnicheskaya informatsiya. Series 2*. 2. pp. 1–13.
17. Gribova, V.V., Kleshchev, A.S., Moskalenko, F.M. & Timchenko V.A. (2015) Model' porozhdeniya orgrafov informatsii po orgrafu metainformatsii dlya dvukhurovnevoy modeli slozhnostruktirovannykh informatsionnykh edinit [The model of generating digraphs of information on the digraph of meta-information for a two-level model of complex structured information units]. *Nauchno-tekhnicheskaya informatsiya. Ser. 2*. 12. pp. 26–38.
18. Gribova, V.V., Kleshchev, A.S., Moskalenko, F.M. & Timchenko, V.A. (2015) Dvukhurovnevaya model' slozhnostruktirovannykh informatsionnykh edinit, sootvetstvuyushchaya metafore anketirovaniya [A two-level model of complex structured information units corresponding to the questionnaire metaphor]. *Nauchno-tekhnicheskaya informatsiya. Ser. 2*. 10. pp. 1–10.
19. CSS. (n.d.) [Online] Available form: <https://ru.wikipedia.org/wiki/CSS> (Accessed: 1st February 2019).

**СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ**

**БОРОДУЛИН Дмитрий Михайлович** – доктор технических наук, директор Института инженерных технологий Кемеровского государственного университета. E-mail: borodulin\_dmitri@list.ru

**ГОРЦЕВ Александр Михайлович** – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: a-gortsev@mail.ru

**ГРИБОВА Валерия Викторовна** – доктор технических наук, заместитель директора по научной работе, заведующая лабораторией интеллектуальных систем Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН (г. Владивосток). E-mail: gribova@iacp.dvo.ru

**ГРИГОРЬЕВ Юрий Дмитриевич** – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры математического обеспечения и применения ЭВМ факультета компьютерных технологий и информатики Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ». E-mail: yuri\_grigoriev@mail.ru

**ГУТОВА Светлана Геннадьевна** – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики Института фундаментальных наук Кемеровского государственного университета. E-mail: gsg1967@mail.ru

**ИГНАТЬЕВ Николай Александрович** – доктор физико-математических наук, профессор Национального университета Узбекистана (г. Ташкент, Узбекистан). E-mail: ignatev@ Rambler.ru

**ИЗМАЙЛОВА Яна Евгеньевна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: evgenevna.92@mail.ru

**КАГАН Елена Сергеевна** – кандидат технических наук, заведующая кафедрой прикладной математики Кемеровского государственного университета. E-mail: kaganes@mail.ru

**КАДЫРОВА Севиндж Шамистан кызы** – диссертант Института систем управления НАН Азербайджана (г. Баку, Азербайджан). E-mail: sevinc.qadirova@mail.com

**ЛЕВИН Илья Семенович** – профессор Школы образования Тель-Авивского университета (г. Тель-Авив, Израиль). E-mail: ilia1@tauex.tau.ac.il

**МАНСИМОВ Камил Байрамали оглы** – профессор, доктор физико-математических наук, профессор Бакинского государственного университета, руководитель лаборатории «Управление в сложных динамических системах» Института систем управления НАН Азербайджана (г. Баку, Азербайджан). E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

**МЕХТИЕВА Марал Рзабала кызы** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Бакинского государственного университета (г. Баку, Азербайджан). E-mail: mehdiyevamaral71@gmail.com

**МИРЗАЕВ Азиз Ибрахимович** – докторант кафедры алгоритмов и технологий программирования Национального университета Узбекистана (г. Ташкент, Узбекистан). E-mail: mirzaevaziz@gmail.com

**НАЗАРОВ Анатолий Андреевич** – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

**НЕЖЕЛЬСКАЯ Людмила Алексеевна** – доцент, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: ludne@mail.ru

**НОВОСЕЛЬЦЕВА Марина Александровна** – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики Института фундаментальных наук Кемеровского государственного университета. E-mail: man300674@gmail.com

**ПАРШУКОВ Андрей Николаевич** – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры автомобильного транспорта, строительных и дорожных машин Тюменского индустриального университета. E-mail: anparshukov@mail.ru

**ПЕРЕЛЕВСКИЙ Святослав Сергеевич** – аспирант Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: slavaperelevskiy@mail.ru

**ПЕРЕПЕЛКИН Евгений Александрович** – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики Алтайского государственного технического университета им. И.И. Ползунова. E-mail: eap@list.ru

**ПЧЕЛИНЦЕВ Евгений Анатольевич** – кандидат физико-математических наук, доцент Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: evgen\_pch@yandex.ru

**ФЕЙЗИЕВ Фикрат Гюльали оглы** – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и оптимизации Сумгаитского государственного университета (г. Сумгаит, Азербайджан). E-mail: FeuziyevFG@mail.ru

**ФЕДОРИЩЕВ Леонид Александрович** – кандидат технических наук, научный сотрудник лаборатории интеллектуальных систем Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН (г. Владивосток). E-mail: leo1987@mail.ru



**ФУКС Ирина Львовна** – старший преподаватель кафедры теоретических основ информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: fooxil@sibmail.com

**ЧЕТВЕРТАКОВА Евгения Сергеевна** – аспирант кафедры теоретической и прикладной информатики Новосибирского государственного технического университета. E-mail: evgenia.chetvertakova@gmail.com

**ЧИМИТОВА Екатерина Владимировна** – доктор технических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной информатики Новосибирского государственного технического университета. E-mail: ekaterina.chimitova@gmail.com

**ЯНКОВСКАЯ Анна Ефимовна** – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры программной инженерии Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: ayuankov@gmail.com

**Научный журнал**

**ВЕСТНИК  
ТОМСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА  
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY  
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

**2019. № 49**

Редактор Е.Г. Шумская  
Оригинал-макет Е.Г. Шумской  
Редакторы-переводчики: Г.М. Кошкин; В.Н. Горенинцева  
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано к печати 16.12.2019 г. Формат 60x84<sup>1/8</sup>.  
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 14, 2.  
Тираж 250 экз. Заказ № 4162. Цена свободная.

Дата выхода в свет 20.12.2019 г.

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании  
Издательского Дома Томского государственного университета  
634050, г. Томск, Ленина, 36  
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75  
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: [rio.tsu@mail.ru](mailto:rio.tsu@mail.ru)